Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
ISSN: 2007-6819
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje

Zapatera Llinares, Alberto
Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 21, núm. 1, 2018
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional
Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554987005
DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje

How Primary Education students solve problems of generalization of patterns. A learning trajectory

Alberto Zapatera Llinares alberto.zapatera@uchceu.es
Universidad Cardenal Herrera-CEU, España
http://orcid.org/0000-0002-7531-8609

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 21, núm. 1, 2018

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional

Recepción: 11 Abril 2017
Aprobación: 10 Marzo 2018

DOI: https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Redalyc: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554987005

Resumen: El objetivo de esta investigación es estudiar la forma en la que estudiantes de Educación Primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Para ello se ha analizado el nivel de éxito, las estrategias utilizadas y la progresión de 106 alumnos de 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria resolviendo un problema de generalización de patrones. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes con mayor éxito comienzan con estrategias aditivas y después cambian a estrategias funcionales, que invertir el proceso presenta una mayor demanda cognitiva y que muy pocos estudiantes son capaces de expresar la regla general algebraicamente. El análisis de la progresión de los estudiantes nos ha permitido definir descriptores de una trayectoria de aprendizaje que ayuda a diagnosticar la comprensión de los estudiantes y a describir su progreso en términos de crecimiento a través de diez niveles de desarrollo.

Palabras clave: Generalización de patrones, pensamiento algebraico, trayectoria de aprendizaje, resolución de problemas, early algebra.

Abstract: The objective of this research is to study the way in which students of Primary Education solve problems of generalization of patterns. For this we analyzed the level of success, the strategies used and progression of 106 students in 3rd, 4th, 5th and 6th degree of Primary Education solving one problem of generalization of patterns. The results obtained show that the most successful students begin with additive strategies and then change to functional strategies, that reverse the process has a higher cognitive demand and very few students are able to express the general rule algebraically. The analysis of students' progression has allowed us to define a descriptors of learning trajectory that help to recognize the students' understanding and to describe their progress in terms of growth through ten levels of development.

Keywords: Generalization of patterns, algebraic thinking, learning trajectory, problem solving, early algebra.

Résumé: L'objectif de cette recherché est d'étudier la façon dont les élèves de l'Enseignement Primaire résolvent les problèmes de généralisation de modèles. Pour ce faire, on a analysé le niveau de succès, les stratégies utilisées et la progression de 106 élèves de 3e, 4e, 5e et 6e année de l'Enseignement Primaire en résolvant un problème de généralisation de modèles. Les résultats obtenus montrent que les étudiants avec le plus de succès commencent avec des stratégies additives et après ils changent à des stratégies fonctionnelles, car invertir le procès présente une plus grande demande cognitive, et que très peu d'étudiants sont capables d'exprimer la règle générale de manière algébraïque. L'analyse du progrès des étudiants nous a permis de définir des descripteurs d'une trajectoire d'apprentissage qui aide à faire le diagnostic de la compréhension des étudiants et à décrire leur progrès en termes de croîssance à travers dix niveaux de développement.

Mots clés: généralisation de modèles, pensée algébraïque, trajectoire d'apprentissage, résolution de problèmes, early algebra.

Resumo: O objetivo desta pesquisa é estudar a maneira pela qual os alunos da escola primária resolvem problemas de generalização de padrões. Com este fim, analisamos o nível de sucesso, as estratégias utilizadas e a progressão de 106 alunos no 3º, 4º, 5º e 6º cursos do Ensino Básico enquanto resolvem um problema de generalização de padrões. Os resultados mostram que os alunos mais bem-sucedidos começam com estratégias aditivas para mudar depois a estratégias funcionais, que reverter o processo tem uma maior demanda cognitiva e também que poucos alunos são capazes de expressar algebricamente a regra geral. Além disso, a análise da progressão dos estudantes permitiu-nos definir descritores duma trajetória de aprendizagem que ajuda a diagnosticar a compreensão dos estudantes e a descrever os seus progressos em termos de crescimento através de dez níveis de desenvolvimento.

Palavras-chave: Generalização de padrões, pensamento algébrico, trajetória de aprendizagem, resolução de problemas, early algebra.

1. Problemática de la investigación

A finales de la década de los ochenta, Kieran (1989) advertía que "un área muy necesitada de la investigación matemática es el pensamiento algebraico" (p. 163). Desde entonces numerosas investigaciones han sugerido promover el desarrollo de aspectos algebraicos en la Educación Primaria y fomentar cambios en la forma de pensar de los estudiantes que les conduzca al pensamiento algebraico.

A partir de estas ideas surgen dos corrientes que promueven iniciar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria, la pre-álgebra y el álgebra temprana, o *early algebra*. Mientras que la pre-álgebra propone introducir el álgebra como una aritmética generalizada en los dos últimos cursos de la Educación Primaria para suavizar la transición entre la aritmética y el álgebra, el álgebra temprana tiene unos objetivos más amplios y propone un cambio curricular para introducir el pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la Educación Primaria como una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas que sirva de guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas (Carraher & Schliemann, 2015; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kaput, 2000; Warren, Trigueros & Ursini, 2016).

Esta forma de pensar, caracterizada como algebraica, puede ser desarrollada por niños de temprana edad (Kaput & Blanton, 2001) al tener implícito el pensamiento algebraico (Socas, 2011) y ser capaces de observar regularidades de forma intuitiva desde los primeros años de escolarización (Carpenter et al., 2003). Para explicitar este pensamiento algebraico se propone el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades y propiedades mediante tareas de generalización (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016).

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática, de tal forma que para Mason, Burton & Stacey (1992) las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática y consideran la generalización como la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia ella.

La generalización consiste en pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular, y la generalización de patrones implica *1)* tomar conciencia de una propiedad común; *2)* generalizar dicha propiedad a todos los términos de la secuencia, y *3)* usar esa propiedad común para encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la secuencia (Radford, 2008).

Gran parte de las investigaciones sobre la generalización han estudiado las estrategias empleadas por los alumnos, las etapas o niveles de generalización, los obstáculos, el papel de los ámbitos numérico y visual-geométrico en el desarrollo de la generalización y la introducción del lenguaje algebraico (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García Cruz, 1998; Orton & Orton, 1994; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989), el conocimiento del profesor sobre la generalización de patrones (Rivera & Becker, 2007; Zazkis & Liljedahl, 2002) o la forma en la que maestros en ejercicio o estudiantes para maestro "*miran profesionalmente*" el pensamiento matemático de alumnos que resuelven problemas de generalización de patrones (Mouhayar & Jourdak, 2012; Zapatera, 2015). Esta investigación, además de estudiar la forma en la que alumnos de Educación Primaria resuelven un problema de generalización de patrones, incluyendo también el proceso inverso, propone una trayectoria de aprendizaje de la generalización de patrones que puede servir para evaluar el grado de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

De esta manera, el objetivo de esta investigación es estudiar cómo resuelven un problema de generalización de patrones alumnos de 3º a 6º de Educación Primaria, *1)* analizando el nivel de éxito, las estrategias que utilizan y la flexibilidad para cambiar de estrategia, y *2)* estudiando su progresión para establecer unos descriptores de niveles que conformen una trayectoria de aprendizaje.

2. Marco teórico

Los problemas de generalización de patrones presentan una situación mediante un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$... de una progresión aritmética y contiene *1)* tareas de generalización cercana (Stacey, 1989) en las que se pide calcular el valor $f(n)$ para n "pequeño" y que se puede obtener mediante recuento, haciendo un dibujo o una tabla; *2)* tareas de generalización lejana (Stacey, 1989) en las que se pide calcular el valor de $f(n)$ para n "grande" y que requiere la identificación de un patrón o pauta; *3)* obtención y expresión de la regla general que permita calcular el valor de $f(n)$ para cualquier n, y *4)* inversión del proceso para hallar el valor de n, dado el número de elementos, $f(n)$, es decir, hallar la posición de un término de la secuencia a partir del número de elementos de dicho término.

2.1. Estrategias para la generalización de patrones y flexibilidad

Las estrategias son los métodos que conducen a la solución de problemas de cualquier tipo, y en Educación Matemática se definen como "formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas [...] y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados" (Rico, 1997, p. 31).

Stacey (1989) identificó en estudiantes de 9 a 13 años tres tipos de estrategias en la resolución de problemas de generalización de patrones: *1) aproximación recursiva* en la que se utiliza un método de conteo más o menos sofisticado, por ejemplo, dibujando la figura correspondiente al término pedido y contando el número de elementos, utilizando la diferencia, *a*, entre los términos de la sucesión, que responde al patrón $f(n) = f(1)+a+a+...$; *2) aproximación funcional*, en la que se relacionan dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta mediante una expresión matemática en forma de función afín $f(n) = an+b$ $(b \neq 0)$, donde a es la diferencia entre términos consecutivos y b se mantiene constante en toda la sucesión, y *3) razonamiento proporcional* incorrecto usando la relación $f(n) = an$ en lugar de la relación $f(n) = an+b$ $(b \neq 0)$.

García Cruz (1998), al ratificar la clasificación de Stacey (1989), estableció tres esquemas subyacentes a las estructuras de cálculo: *1) esquema de recuento* en el que el alumno cuenta los elementos del término requerido; *2) esquema lineal* en el que la respuesta dada por los alumnos corresponde a la estructura simbólica $f(n) = an+b$ $(b\ ^1\ 0)$, y *3) esquema de proporcionalidad* directa en el que el alumno utiliza razonamientos proporcionales erróneos.

En la misma línea, Zapatera y Callejo (2011) clasificaron las estrategias de la generalización de patrones en: *1) estrategias aditivas* que pueden ser de recuento sobre el dibujo, recuento iterativo o recuento recursivo; *2) estrategias funcionales* mediante la aplicación de la función afín $f(n) = an+b$ $(b\ ^1\ 0)$, y *3) estrategias proporcionales* mediante la función lineal $f(n) = an$.

Las investigaciones han constatado que una de las dificultades de los estudiantes en el proceso de generalización es el paso del recuento a la abstracción del patrón. Esta dificultad está asociada con la falta de flexibilidad, entendida como "la habilidad para modificar la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea" (Krems, 1995, p. 202).

De esta manera, Lee (1996) observó que la fijación de una cierta estrategia y su resistencia a abandonarla es un obstáculo que impide generalizar a algunos estudiantes; Orton & Orton (1994) centraron esta fijación en los enfoques recursivos que suponen un obstáculo para avanzar hacia la regla general, y English & Warren (1998) confirmaron que una vez que los estudiantes percibían un patrón de una determinada manera, les costaba abandonar esta percepción inicial.

2.2. Elementos matemáticos y estadios de comprensión de la generalización de patrones

Investigaciones centradas en la manera en la que los estudiantes de Primaria resuelven tareas de generalización de patrones lineales (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008; Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005; Zapatera y Callejo, 2013), han puesto de manifiesto el papel relevante en el desarrollo del proceso de generalización de tres elementos matemáticos: *1)* estructuras espacial y numérica; *2)* relación funcional, y *3)* proceso inverso.

Para continuar una sucesión, los estudiantes necesitan identificar una regularidad que relacione la estructura espacial, basada en la distribución espacial de los elementos de las figuras, y la estructura numérica, basada en el número de elementos que componen cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010); para identificar un término lejano, o no especificado, los estudiantes deben establecer una relación funcional que asocie la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005), y para identificar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman, es preciso establecer una relación funcional inversa a la anterior (Warren, 2005).

A partir de estos resultados, Zapatera (2015) caracterizó tres estadios de comprensión en el desarrollo del proceso de generalización de patrones: *estadio 1*, si el estudiante es capaz de continuar la sucesión para términos cercanos identificando el patrón de crecimiento cuantitativo, pero no coordina las estructuras numérica y espacial; *estadio 2*, si el estudiante es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica y de establecer una relación funcional que le permita hallar el número de elementos de cualquier término de la sucesión, y *estadio 3*, si el estudiante además es capaz de invertir dicha relación en casos específicos (Figura 1).

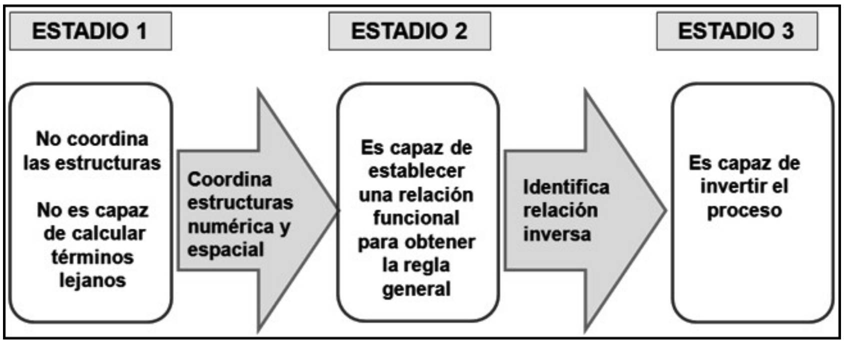


Figura 1
Estadios del proceso de generalización de patrones.

2.3. Trayectoria de aprendizaje

Estos estadios, relacionados con los tres elementos matemáticos significativos, establecen una cierta progresión en el desarrollo del proceso de generalización y marcan el punto de partida para una posible trayectoria de aprendizaje.

Las trayectorias de aprendizaje tienen su origen en las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que Simon (1995) introdujo como parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que realiza el profesor en su planificación de tareas "consisten en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes" (Simon & Tzur, 2004, p. 93) (Figura 2) y constituyen "un marco para pensar sobre cómo las tareas pueden fomentar el proceso de aprendizaje" (Simon & Tzur, 2004, p. 101).

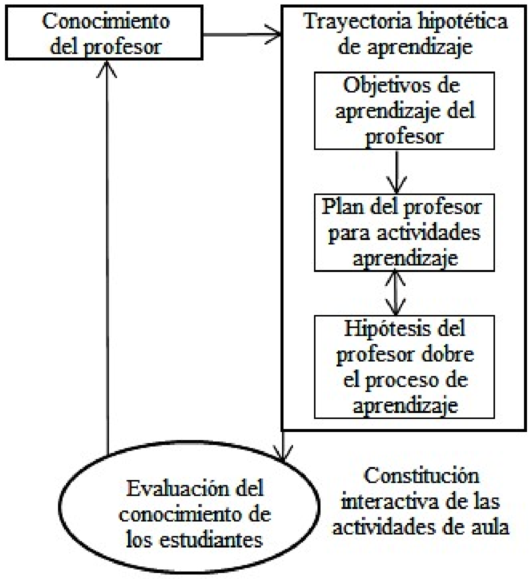


Figura 2
Ciclo de la enseñanza de las matemáticas. (Simon, 1995, p. 136)

El constructo teórico trayectoria de aprendizaje puede entenderse como un camino hipotético por el que los estudiantes progresan en el aprendizaje de un tópico matemático (Clements & Sarama, 2014), de forma que contienen conjeturas sobre el orden y el carácter del crecimiento de la comprensión matemática de los estudiantes y sobre las tareas que impulsen la transición hacia el objetivo programado.

Clements & Sarama (2004) hacen hincapié en tres elementos de las trayectorias de aprendizaje como herramientas de investigación: *1)* un objetivo matemático; *2)* un modelo de cognición que llaman progresiones del desarrollo, y *3)* tareas de instrucción en las que los estudiantes progresan a través de los niveles de desarrollo. Battista (2004) conceptualiza las progresiones del desarrollo utilizando el concepto de niveles de sofisticación, que son estratos mediante los cuales los estudiantes progresan en su razonamiento al pasar por diferentes estadios cognitivos que culminan en conceptos matemáticos formales. Investigadores como Steffe (2004) y Gravemeijer (2004) consideran "la construcción de trayectorias de aprendizaje como un trabajo del investigador, cuyos resultados pueden apoyar el trabajo del profesor" (Gómez y Lupiáñez, 2006, p. 82), es decir, la información teórica generada en las trayectorias de aprendizaje puede proporcionar "un marco conceptual que los profesores pueden utilizar para construir trayectorias de aprendizaje hipotéticas que se ajusten a sus propios contextos de aula" (Clements & Sarama, 2004, p. 1).

Las trayectorias de aprendizaje permiten diagnosticar la comprensión de los estudiantes y describir el progreso en términos de crecimiento a través de niveles, proporcionan un *feedback* para los maestros y mejoran la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes mediante la adaptación de la instrucción a lo que el estudiante necesita con el fin de progresar hacia el objetivo del aprendizaje. Investigaciones sobre la generalización de patrones han identificado la importancia de la idoneidad de las estrategias a utilizar y de la flexibilidad en el uso de las estrategias que permite pasar de la generalización cercana a la generalización lejana y a la expresión de la regla general. Sin embargo, estos trabajos aportan poca información acerca de la secuencia de estrategias que utilizan los alumnos a lo largo del proceso de resolución o de cómo varía esta secuencia en estudiantes de diferentes edades (Callejo y Zapatera, 2014). Esta información es importante para identificar los obstáculos de los estudiantes en el proceso de generalización y para favorecer los cambios cognitivos que permitan identificar el patrón general a partir del recuento de casos particulares.

3. Metodología

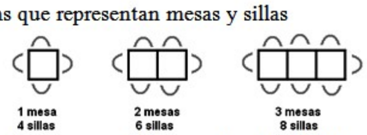
3.1. Participantes y contexto

En este estudio participaron 106 estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria (de 8 a 12 años) del CEIP “Poble Nou” de Villajoyosa (Alicante) que no habían recibido ninguna preparación específica en la resolución de problemas de generalización de patrones.

3.2. Instrumento de recogida de datos

El enunciado del problema de generalización lineal utilizado (Figura 3) proporciona los primeros términos de una progresión aritmética que relaciona mesas y sillas, en el que se pide realizar la generalización en los dos sentidos, directo e inverso. Este problema es una adaptación y una ampliación del propuesto por Carraher et al. (2008) en el que los estudiantes debían completar una tabla con el número de mesas y sillas.

Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas



Como puedes ver, alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. Continúa la sucesión y dibuja 4 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántas sillas hay?
2. En un cumpleaños hemos colocado 8 mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?
3. Sin hacer dibujos, ¿cuántos niños pueden sentarse si colocamos 100 mesas?
4. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas
5. Y si colocamos m mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?
6. ¿Cuántas mesas necesitaremos para invitar a 12 niños a la fiesta?
7. Sin hacer dibujos, ¿cuántas mesas necesitaremos para invitar a 100 niños?
8. Si sabes el número de invitados a la fiesta, escribe una regla para calcular el número de mesas que necesitas
9. ¿Cuántas mesas necesitaremos para invitar a n niños?

Figura 3
Problema de generalización de patrones.

Con las cinco primeras cuestiones se estudiará el proceso directo de la generalización lineal: con las dos primeras la generalización cercana; con la tercera la generalización lejana, y con las dos siguientes la expresión de la regla general verbal y simbólicamente. Con las cuatro últimas cuestiones se estudiará el proceso inverso: con la sexta cuestión la generalización cercana; con la séptima la generalización lejana, y con las dos últimas la expresión de la regla.

El objetivo del problema propuesto es analizar el proceso de generalización de patrones en estudiantes de Educación Primaria, y con las cuestiones se pretende establecer la progresión de los estudiantes mediante niveles de desarrollo de la trayectoria de aprendizaje.

3.3 Análisis de datos

as respuestas se analizaron con base en dos criterios: *1)* corrección de las respuestas, y *2)* estrategias de resolución. Las respuestas se consideraron correctas si tanto el procedimiento como la solución eran correctos, aunque el procedimiento no fuese el más eficiente; en cualquier otro caso se consideraron incorrectas. Las estrategias empleadas se han clasificado siguiendo las aportaciones de Zapatera y Callejo (2011) (Figura 4).

ESTRATEGIAS	D Directo		
	EA Estrategias aditivas	RD Con dibujo	
		RI Recuento iterativo	→ $f(n) = f(1) + (n-1)\cdot a$
		RR Recuento recursivo	→ $f(n) = f(p) + (n-p)\cdot a$
	EF Estrategias funcionales	FL Función local	→ $f(m) = m\cdot a + b$, m determinado
		FG Función global	→ $f(n) = n\cdot a + b$, n indeterminado
	EP Estrategias proporcionales		→ $f(n) = a\cdot n$
	O Otras		

Figura 4

Estrategias de resolución de Problema de generalización de patrones.

En el apartado *directo* se recogen las respuestas que los estudiantes escriben de forma directa sin mostrar evidencias de ningún tipo de estrategia.

En las *estrategias aditivas* (EA) el alumno observa el patrón de crecimiento, las dos sillas que aumentan por cada mesa, y realiza el recuento dibujando la figura y contando los elementos (RD), partiendo de la primera figura y sumando el patrón de crecimiento de forma iterada hasta el término requerido (RI) o partiendo de una figura cualquiera y sumando el patrón de crecimiento de forma iterada hasta el término requerido (RR).

En las *estrategias funcionales* (EF) el alumno relaciona las dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta mediante una función afín $f(n) = a\cdot n + b$ ($b\neq 0$), donde a es el patrón de crecimiento, las dos sillas que aumentan por cada mesa, y b es el término independiente, las dos sillas de los extremos, que se mantiene constante. Pueden ser estrategias de *función local* (FL) si la relación se aplica a una determinada figura, y estrategias de *función global* (FG) si la relación se aplica a una figura cualquiera.

En las *estrategias proporcionales* (EP) el alumno halla, erróneamente, el número de elementos mediante razonamientos proporcionales con multiplicaciones o reglas de tres con base en una función lineal $f(n) = an$, donde no se considera el término independiente que se mantiene constante.

Como *otras* se consideran las respuestas que usan estrategias, acertadas o erróneas, distintas a las anteriores, o respuestas sin sentido aparente.

A partir del nivel de éxito de cada una de las cuestiones se podrá observar la progresión de los estudiantes en el proceso de generalización, lo que permitirá establecer niveles de una posible trayectoria de aprendizaje y caracterizar los descriptores de cada nivel.

4. Resultados

Los resultados se han organizado en tres apartados: en primer lugar se ha considerado el nivel de éxito de los estudiantes en cada una de las cuestiones; en segundo lugar se han estudiado las estrategias utilizadas por los estudiantes en las diferentes cuestiones, y por último se ha analizado la progresión de los estudiantes al establecerse los niveles de desarrollo en una trayectoria de aprendizaje.

4.1. Nivel de éxito

En la Tabla I se muestran las respuestas correctas de los alumnos de cada curso a cada una de las cuestiones planteadas.

TABLA I

Respuestas correctas de los estudiantes por cuestiones y por cursos.

Curso	Nº	Cuestiones								
		Proceso directo					Proceso inverso			
		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
3º	24	21	19	2	2	0	13	1	1	0
4º	28	25	24	9	7	0	17	3	2	0
5º	28	28	28	18	16	0	26	8	6	0
6º	26	26	26	16	15	4	23	10	9	2
Total	106	100	97	45	40	4	79	22	18	2

En el proceso directo los estudiantes consiguieron un mayor éxito en las cuestiones 1 y 2, las cuestiones de generalización cercana: de los 106 estudiantes, 100 continuaron con éxito la secuencia de figuras y 97 calcularon el número de sillas de 8 mesas; el éxito de la cuestión 3 de la generalización lejana, que pedía calcular el número de sillas de 100 mesas, fue ligeramente superior al de la cuestión 4 que pedía expresar de forma verbal la regla general, 45 sobre 40, y la cuestión que presentó mayor dificultad para los estudiantes fue la cuestión 5 en la que debían expresar la regla general de forma algebraica haciendo uso de la indeterminada, que sólo fue contestada correctamente por cuatro alumnos de 6º.

Los resultados de las cuestiones del proceso inverso fueron significativamente inferiores a las del proceso directo, pero mantuvieron una línea semejante: 79 estudiantes realizaron correctamente la generalización cercana de la cuestión 6, en la que debían calcular el número de mesas que correspondían a 12 sillas; 22 la cuestión 7 de la generalización lejana en la que debían calcular las mesas correspondientes a 100 sillas; 18 estudiantes expresaron la regla general de forma verbal en la cuestión 8, y sólo dos expresaron la regla de forma algebraica en la cuestión 9.

El análisis empírico de estos resultados nos muestra las primeras evidencias para la elaboración posterior de la trayectoria de aprendizaje: *1)* la expresión de la regla general requiere un mayor nivel cognitivo que la generalización lejana y ésta, a su vez, requiere un mayor nivel que la generalización cercana, y *2)* el proceso inverso requiere también un mayor nivel cognitivo que el proceso directo.

El nivel de éxito, relacionado con el desarrollo cognitivo y biológico de los estudiantes, aumentó progresivamente según los cursos: los porcentajes de respuestas correctas de 3º y 4º han sido, respectivamente, 27 y 35%, mientras que los de 5º y 6º han sido bastantes superiores, 52 y 56%.

4.2. Estrategias

En la Tabla II aparecen los resultados obtenidos en las cuestiones de generalización cercana, generalización lejana y regla general en los dos procesos, directo e inverso, clasificados por estrategias y con el número de respuestas correctas entre paréntesis. Las columnas O y B se refieren respectivamente a "otras estrategias" y a "respuestas en blanco".

Cuestiones			D	EA			EF		EP	O	B	Total
				RD	RI	RR	FL	FG				
Proceso	GC	C2	7 (5)	80(79)	3 (3)		10(10)		6			106(97)
	GL	C3	15 (1)				45(44)		42	6		106(45)
directo	RG	C4		1	9 (1)	4	13(13)	27(26)	31	16	5	106(40)
Proceso	GC	C6	40(31)	32(30)	3 (1)	2 (2)	17(17)		8	2	2	106(81)
	GL	C7	12				32(22)		49	10	3	106(22)
inverso	RG	C8	5	7	4		5 (4)	23(14)	41	12	9	106 (8)

En el proceso directo los estudiantes han utilizado mayoritariamente en la generalización cercana estrategias aditivas, especialmente el recuento sobre el dibujo; en la generalización lejana han utilizado estrategias funcionales locales o, erróneamente, estrategias proporcionales, y para expresar la regla general han utilizado estrategias funcionales, globales si expresaban la regla para cualquier término y locales si lo hacían apoyándose en términos determinados, y también han utilizado erróneamente estrategias proporcionales.

En el proceso inverso los estudiantes han resuelto la generalización cercana de forma directa fijándose en resultados de cuestiones anteriores y mediante estrategias aditivas, especialmente el recuento sobre el dibujo; en la generalización lejana han utilizado estrategias funcionales locales o estrategias proporcionales que les han conducido a error; para la regla general han utilizado estrategias funcionales, globales o locales, y en muchos casos estrategias proporcionales erróneas.

Las estrategias con mayor éxito en el proceso directo han sido las aditivas en la generalización cercana, las funcionales locales en la generalización lejana y las funcionales globales en la expresión de la regla general; mientras que en el proceso inverso las estrategias más exitosas han sido semejantes: en la generalización cercana, junto con las estrategias aditivas, se incluye también el método directo al apoyarse algunos estudiantes en los resultados obtenidos en las cuestiones anteriores, en la generalización lejana las estrategias con más éxito han sido las funcionales locales y en la regla general las funcionales globales.

4.3. Trayectoria de aprendizaje de la generalización lineal

Para establecer los niveles de la trayectoria de aprendizaje se ha analizado por separado el éxito de las cuestiones relacionadas con los procesos directo e inverso de la generalización lineal de patrones, en el que se observa una progresión constante y lineal en cada uno de los procesos. Posteriormente se han analizado las cuestiones de los dos procesos de forma conjunta, intercalando las cuestiones de ambos procesos según el nivel de éxito, y se ha observado también una progresión lineal en casi todos los estudiantes. El orden de las cuestiones nos ha permitido establecer una serie de niveles de una trayectoria de aprendizaje y definir sus descriptores en función de las cuestiones resueltas correctamente.

En el proceso directo, 21 de los 24 alumnos de 3º de Primaria fueron capaces de continuar una sucesión y 19 de realizar la generalización cercana, pero sólo dos fueron capaces de realizar la generalización lejana y de describir una regla general que relacionara el término de la figura con la cantidad de elementos. Los resultados de las dos primeras cuestiones de los alumnos de 4º fueron semejantes a los de 3º, 25 de 28 alumnos fueron capaces de continuar la serie, y 24 de realizar la generalización cercana, pero aumentaron de forma considerable en las cuestiones 3 y 4, 9 realizaron correctamente la generalización lejana, y 7 expresaron verbalmente la regla general (Figura 5).

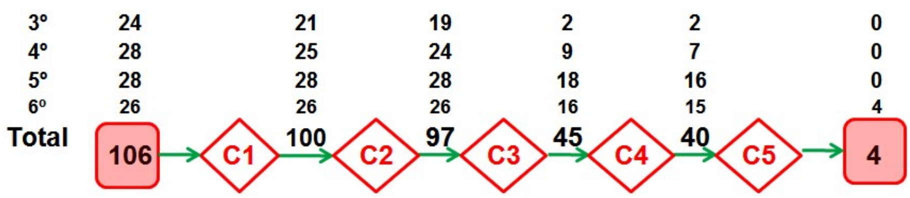


Figura 5

Evolución por cursos del proceso directo de la generalización lineal

Los resultados de los alumnos de 5º y 6º fueron mejores en todas las cuestiones: todos fueron capaces de continuar la secuencia y generalizar para términos pequeños, 18 de 28 alumnos de 5º y 16 de 26 de 6º realizaron correctamente la generalización lejana, y 16 de 5º y 15 de 6º expresaron verbalmente la regla general; sin embargo, sólo cuatro alumnos de 6º fueron capaces de expresar algebraicamente la regla general utilizando la indeterminada.

Hemos observado que la progresión a lo largo de las cinco cuestiones ha sido constante y lineal, de forma que todos los estudiantes que han resuelto correctamente una determinada cuestión habían resuelto también correctamente las cuestiones previas.

De los 24 alumnos de 3º, 13 fueron capaces de invertir el proceso para términos pequeños y sólo uno fue capaz de invertir el proceso para términos grandes y de escribir la regla general: estos resultados aumentan ligeramente en los alumnos de 4º, de los que 17 realizaron la generalización cercana, tres la generalización lejana y dos expresaron verbalmente la regla general (Figura 6).

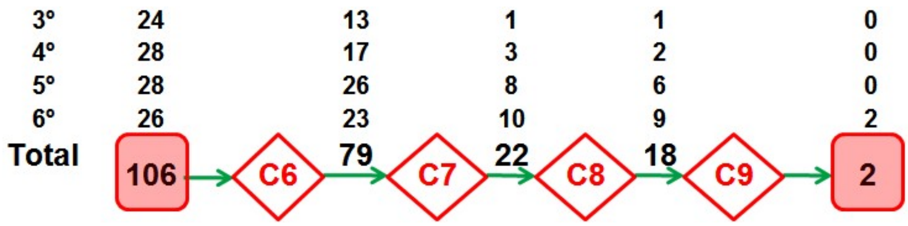


Figura 6
Evolución por cursos del proceso inverso de la generalización lineal

El número de alumnos de 5º y de 6º capaces de invertir el proceso fue muy superior: 26 alumnos de 5º y 23 de 6º invirtieron el proceso para términos pequeños, ocho de 5º y diez de 6º invirtieron el proceso para términos grandes, y seis de 5º y nueve de 6º expresaron verbalmente la regla general del proceso inverso. Sólo dos alumnos de 6º expresaron algebraicamente la regla general del proceso inverso.

La progresión en el proceso inverso, al igual que en el directo, a lo largo de los cuatro cursos y de las cuatro cuestiones, también ha sido constante y lineal.

Al unificar los resultados de los dos procesos, se observa que todos los alumnos, excepto uno de 5º, siguen también una progresión lineal según la secuencia de cuestiones de la Figura 7. En la parte superior de esta figura se muestran los alumnos que superan cada una de las nueve cuestiones ordenadas según la progresión y en la parte inferior los alumnos que no superan cada una de las cuestiones.

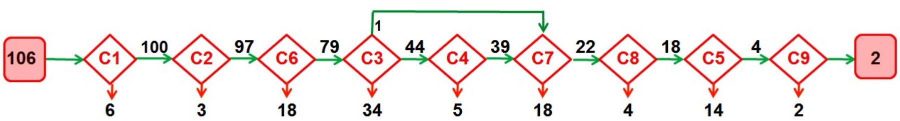


Figura 7
Evolución por cursos del proceso de la generalización lineal, directo e inverso

El alumno de 5º curso que no sigue la progresión lineal resolvió la cuestión 3, generalización lejana del proceso directo, y no expresó en la cuestión 4 la regla utilizada, sin embargo, sí invirtió el proceso para términos lejanos en la cuestión 7.

Esta secuenciación de tareas nos ha permitido establecer 10 niveles de desarrollo en una trayectoria de aprendizaje: el nivel 0 estaría formado por los estudiantes que no siguen la secuencia y los nueve niveles siguientes se caracterizarían por los saltos cognitivos que permiten adquirir ese determinado nivel y que se arrastran progresivamente a los niveles posteriores.

- Nivel 0. No continúa la secuencia
- Nivel 1. Continúa la secuencia
- Nivel 2. Realiza generalización cercana
- Nivel 3. Invierte proceso para términos pequeños
- Nivel 4. Realiza generalización lejana
- Nivel 5. Expresa regla general
- Nivel 6. Invierte proceso para términos grandes
- Nivel 7. Expresa regla general del proceso inverso
- Nivel 8. Expresa algebraicamente la regla general
- Nivel 9. Expresa algebraicamente la regla general del proceso inverso

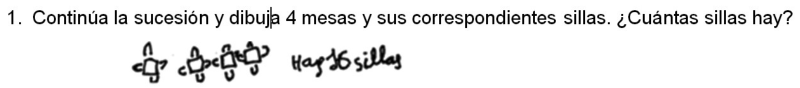
A partir de estos resultados hemos clasificado a todos los estudiantes, excepto al alumno de 5º que no sigue la progresión, en los diez niveles (Tabla III).

TABLA III
Clasificación de alumnos por cursos y niveles.

Curso	Niveles										Total
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3º	3	2	6	11	0	1	0	1	0	0	24
4º	3	1	5	10	2	4	1	2	0	0	28
5º	0	0	2	8	1	9	1	6	0	0	27
6º	0	0	3	7	1	5	1	5	2	2	26
Total	6	3	16	36	4	19	3	14	2	2	105

Los resultados obtenidos permiten organizar los cursos analizados en dos ciclos diferenciados: más de la mitad de los alumnos de 3º y 4º estarían en el nivel 3 o superior, mientras que más de la mitad de los alumnos de 5º y 6º estarían en el nivel 5 o superior. Además, las medias ponderadas para cada uno de los cuatro cursos marcan también esta diferenciación: las medias de 3º y 4º están próximas entre sí, 2'46 y 3'18, y separadas de las de 5º y 6º, 4'63 y 5'04. Estos datos confirman la progresión a lo largo de los cuatro cursos, marcando un salto notable en el paso de 4º a 5º.

Los seis estudiantes del *nivel 0* no fueron capaces de continuar la secuencia dibujando cuatro mesas, ya que no respetaron las estructuras espacial o numérica al dibujar las mesas separadas o al dibujar más sillas de las que se le pedía. Un ejemplo de estudiante de este nivel es Sara, de 4º curso (Figura 8).


1. Continúa la sucesión y dibuja 4 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántas sillas hay?

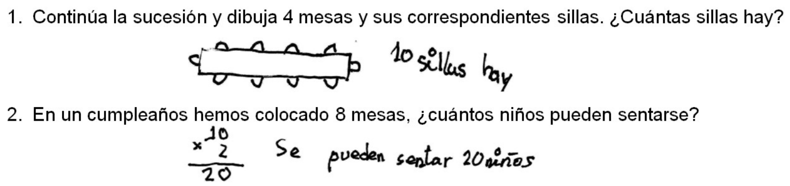
Hay 16 sillas

Figura 8

Respuestas de Sara, 4º curso, del nivel 0 a la cuestión 1.

Sara no respetó la estructura espacial a la hora de continuar la secuencia y dibujó las cuatro mesas separadas. Este error provocó que contestara erróneamente el resto de las cuestiones aplicando estrategias proporcionales y considerar que todas las mesas tenían cuatro sillas.

Los tres estudiantes del *nivel 1* continuaron la secuencia pero después usaron estrategias proporcionales erróneas para hallar el número de sillas de ocho mesas: uno no tuvo en cuenta las dos sillas de los extremos y multiplicó 8·2 = 16, y los otros dos argumentaron que si en cuatro mesas hay diez sillas, en ocho mesas habrá 20 sillas, entre ellos Luz, de 3º curso (Figura 9).


1. Continúa la sucesión y dibuja 4 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántas sillas hay?

10 sillas hay

2. En un cumpleaños hemos colocado 8 mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?

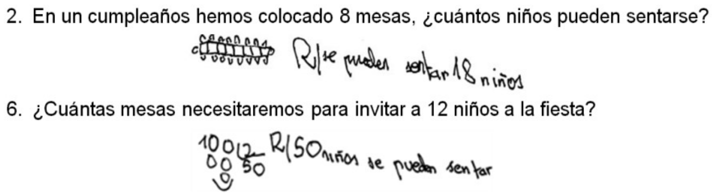
$10 \times 2 = 20$ Se pueden sentar 20 niños

Figura 9

Respuestas de Luz, de 3º curso, del nivel 1 a las cuestiones 1 y 2.

Luz realizó un recuento sobre el dibujo en la primera cuestión, pero en la segunda no captó las dos sillas de los extremos y utilizó una estrategia proporcional multiplicando 10 por 2.

Los 16 estudiantes del *nivel 2* realizaron correctamente la generalización cercana para ocho mesas, la mayoría mediante un recuento sobre el dibujo; sin embargo, no fueron capaces de invertir el proceso para hallar el número de mesas que se necesitan para invitar a 12 niños y utilizaron mayoritariamente estrategias proporcionales. Es importante señalar que la mitad de estos estudiantes fueron conscientes, como Kevin, de 5º curso (Figura 10), de que esta cuestión tiene "algo" distinto de las cuestiones anteriores y dividieron en lugar de multiplicar.


2. En un cumpleaños hemos colocado 8 mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?

R/ se pueden sentar 18 niños

6. ¿Cuántas mesas necesitaremos para invitar a 12 niños a la fiesta?

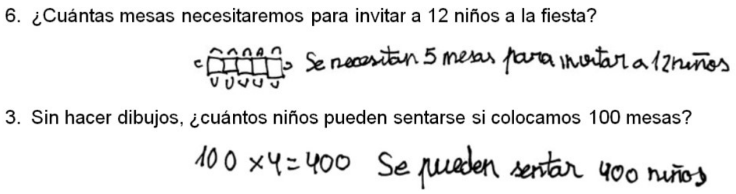
100 | 2 → 50 — R/ 50 niños se pueden sentar

Figura 10

Respuestas de Kevin, de 5º curso y del nivel 2, a las cuestiones 2 y 6

Kevin realizó correctamente el recuento sobre el dibujo en la segunda cuestión, pero en la cuestión 6 no supo invertir el proceso y utilizó una estrategia proporcional, aunque captó "algo" distinto y, en lugar de multiplicar, dividió 100 entre 2.

Los 36 estudiantes del *nivel 3* invirtieron el proceso y hallaron las mesas necesarias para 12 sillas, casi la mitad de forma directa apoyándose en las respuestas de las cuestiones anteriores y el resto mediante estrategias aditivas, especialmente en el recuento sobre el dibujo. Sin embargo, no fueron capaces de coordinar las estructuras espacial y numérica para calcular el número de sillas para 100 mesas y utilizaron, casi todos, estrategias proporcionales erróneas, como María, de 6º curso (Figura 11).


6. ¿Cuántas mesas necesitaremos para invitar a 12 niños a la fiesta?

Se necesitan 5 mesas para invitar a 12 niños

3. Sin hacer dibujos, ¿cuántos niños pueden sentarse si colocamos 100 mesas?

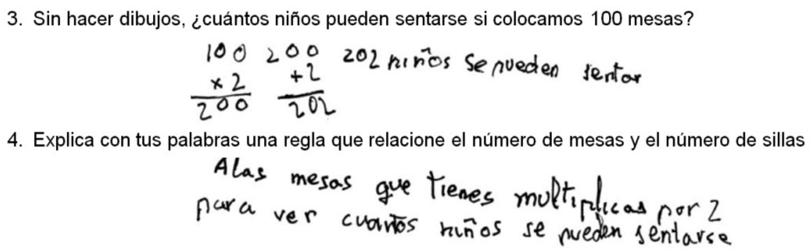
100 × 4 = 400 Se pueden sentar 400 niños

Figura 11

Respuestas de María, de 6º curso y nivel 3.

María utilizó el recuento sobre el dibujo en la cuestión 6 en la que le pedían el número de mesas necesarias para invitar a 12 niños, pero no fue capaz de realizar la generalización lejana y multiplicó las 100 mesas por 4.

Los cuatro estudiantes del nivel 4 coordinaron las estructuras espacial y numérica para realizar la generalización lejana y hallar el número de sillas correspondientes a 100 mesas, tres mediante la función afín f (100) = 2·100+2 y el otro mediante $f(100) = 98{\cdot}2 + 2{\cdot}3$. Sin embargo, no fueron capaces de expresar verbalmente esta relación funcional utilizando estrategias proporcionales, como Iván de 6º (Figura 12) o escribiendo explicaciones sin sentido.


3. Sin hacer dibujos, ¿cuántos niños pueden sentarse si colocamos 100 mesas?

100 × 2 = 200; 200 + 2 = 202 — 202 niños se pueden sentar

4. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas

Alas mesas que tienes multiplicas por 2 para ver cuantos niños se pueden sentarse

Figura 12

Respuestas de Iván, 6º curso, del nivel 4.

Iván estableció una relación funcional para realizar la generalización lejana, pero no fue capaz de explicarla al olvidar sumar las dos sillas de los extremos.

Los 19 estudiantes del *nivel 5* expresaron verbalmente la regla general que relaciona el número de mesas y de sillas: diez utilizaron una función local al basar su explicación en un número determinado de mesas y nueve utilizaron una función global al explicar la regla general para un número cualquiera. Sin embargo, no fueron capaces de invertir el proceso para términos lejanos y utilizaron estrategias funcionales incompletas o estrategias proporcionales erróneas, como Lucía de 5º curso (Figura 13).

4. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas

Es el doble de las mesas+2

7. Sin hacer dibujos, ¿cuántas mesas necesitaremos para invitar a 100 niños?

100 | 2
00 50 Necesitaremos 50 mesas

Figura 13

Respuestas de Lucía, de 4º curso y nivel 5.

Lucía expresó la regla general mediante una relación funcional global, pero no fue capaz de invertir el proceso para hallar las mesas necesarias para 100 niños y se limitó a dividir entre 2.

Los tres estudiantes del *nivel 6* invirtieron el proceso para hallar las mesas correspondientes a 100 sillas utilizando una función local; sin embargo, no fueron capaces de expresar verbalmente la relación funcional inversa que relaciona las sillas con las mesas; Carla, de 6º curso (Figura 14), pertenece a este nivel.

7. Sin hacer dibujos, ¿cuántas mesas necesitaremos para invitar a 100 niños?

x 47 mesas
2 sillas R\ 49 mesas.
94 sillas
+ 6 sillas = 2 mesas la del final y del principio.
100 niños

8. Si sabes el número de invitados a la fiesta, escribe una regla para calcular el número de mesas que necesitas

Cada mesa ocupa 2 sillas. Excepto la del principio y la del final.

Figura 14

Respuestas de Carla, de 6º curso y nivel 6.

Carla invirtió el proceso para términos lejanos realizando un tanteo y comprobando después su validez, pero expresó de forma incompleta la regla general al no concretar el número de sillas de las mesas del principio y del final. La función local que utilizó para realizar la generalización lejana del proceso inverso se basa en que las mesas centrales tienen dos sillas y las de los dos extremos tienen tres sillas.

Los 14 estudiantes del *nivel 7* expresaron verbalmente la regla general del proceso inverso, 11 mediante una función global que sirve para cualquier término y tres mediante una función local al basar su explicación en 100 sillas. Estos estudiantes, como César, de 3º curso (Figura 15), no fueron capaces de utilizar la indeterminada "*m mesas*" para explicar algebraicamente la regla general en el proceso directo.

8. Si sabes el número de invitados a la fiesta, escribe una regla para calcular el número de mesas que necesitas

pues la mitat menos 1

5. Y si colocamos m mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?

pues m niños

Figura 15

Respuestas de César, de 3º curso y nivel 7.

César fue el alumno de 3º curso que llegó a un nivel más alto sorprendiendo a los investigadores por sus respuestas: en la cuestión 1 siguió la secuencia e hizo el dibujo como se le pedía, pero después realizó todas las demás cuestiones mediante estrategias funcionales, incluso expresó la regla general del proceso inverso con "*la mitad menos 1*", aunque no fue capaz de expresar algebraicamente las reglas y escribió "*m niños*" en la cuestión 5 y "*n sillas*" en la cuestión 9. Además, en la cuestión 5, utiliza la indeterminada *m* en lugar de *n*.

Los dos estudiantes del *nivel 8* son de 6º curso y aunque utilizaron la indeterminada "*m mesas*" para escribir algebraicamente la regla general del proceso directo, $2m+2$, no fueron capaces de utilizar la indeterminada "*n sillas*" para expresar la regla general del proceso inverso, escribiendo uno de ellos $2n+2$ y la otra, Natalia, una expresión en la que no aparecía la indeterminada *n* (Figura 16).

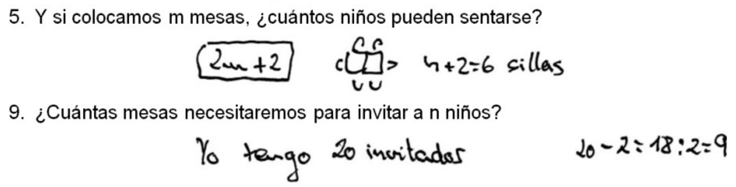


Figura 16

Respuestas de Natalia, de 6º curso, del nivel 8.

Natalia escribió algebraicamente la regla del proceso directo, utilizando la indeterminada *m* y comprobando su validez para dos mesas; sin embargo, no fue capaz de expresar algebraicamente la regla general en el proceso inverso, limitándose a hallar el número de mesas necesarias para invitar a 20 niños.

Sólo dos alumnos de 6º, uno de ellos Jaime (Figura 17), alcanzaron el nivel 9, al realizar correctamente todas las cuestiones.

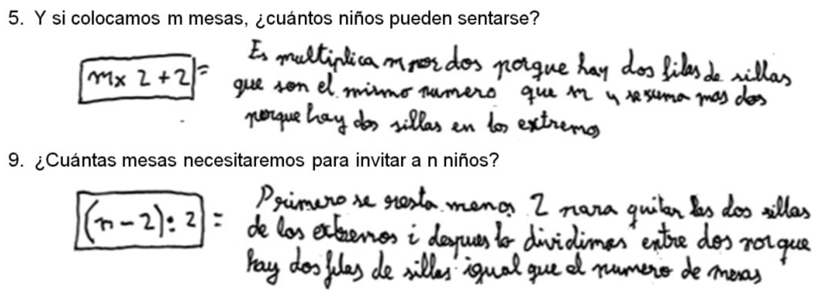


Figura 17

Respuestas de Jaime, de 6º curso, del nivel 8.

Jaime, además de escribir algebraicamente las dos reglas generales, haciendo un uso muy correcto de los paréntesis en la regla general del proceso inverso, explicó ambas reglas con total precisión a pesar de no haberse iniciado en clase el estudio de la sintaxis algebraica. Este hecho puede deberse, en opinión del profesor-tutor, a la alta capacidad del alumno y a la implicación familiar.

En la figura 18 se recogen los descriptores de los niveles de la trayectoria de aprendizaje de la generalización de patrones; estos descriptores son acumulativos, de forma que un determinado nivel también incluye los descriptores de los niveles que le preceden; entre paréntesis se muestra la dificultad que impide a los estudiantes de un determinado nivel avanzar al nivel siguiente.

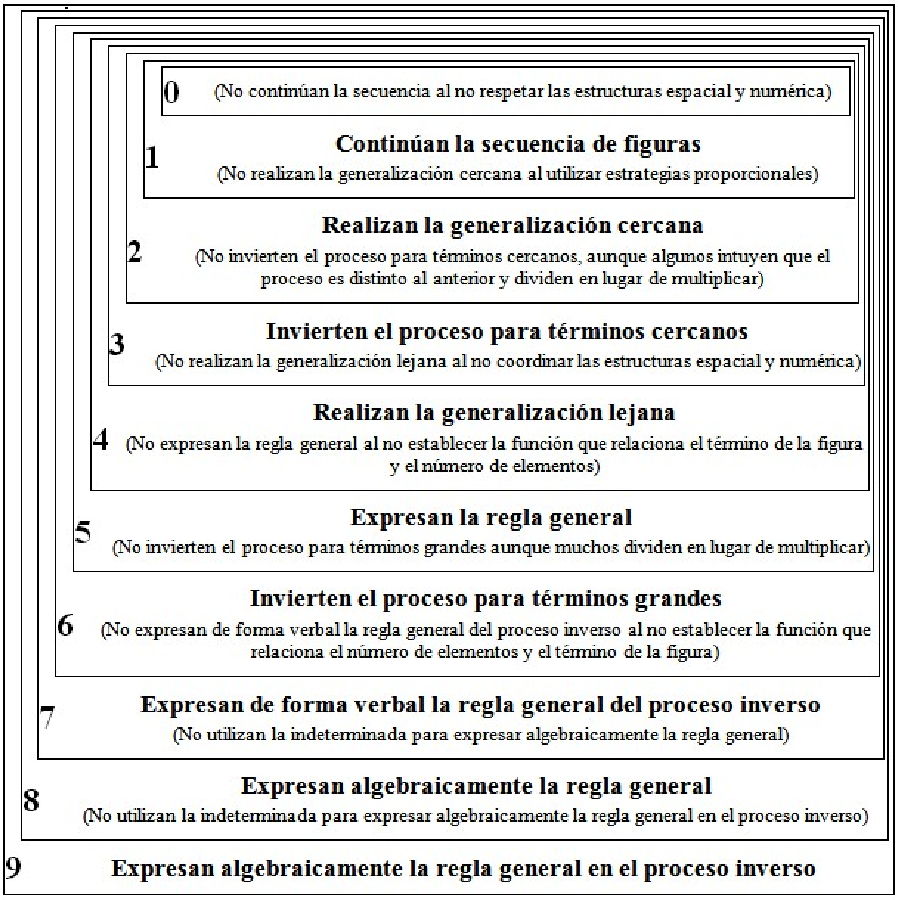


Figura 18
Descriptores de los niveles de la trayectoria.

De los 105 estudiantes clasificados en niveles, 40 están en el nivel 5 o superior, es decir, consiguieron completar las tres fases del proceso directo de la generalización de patrones: *1)* para realizar la generalización cercana, 32 hicieron un recuento sobre el dibujo y ocho utilizaron una función local; *2)* para la generalización lejana, 39 utilizaron la función local y uno contestó de forma directa, y *3)* para expresar la regla general, 24 utilizaron una función global, 15 una función local y uno utilizó recuento iterativo. Además, la secuencia de estrategias que más éxito obtuvo en las tres fases del proceso directo fue “recuento sobre dibujo –función local– función global” que fue seguida por 19 estudiantes de los 40 que completaron las tres fases de la generalización de patrones.

Por otra parte, 18 estudiantes están en el nivel 7 o superior, es decir, completaron las tres fases del proceso inverso de la generalización: *1)* 12 utilizaron la función local para realizar la generalización cercana, tres realizaron un recuento sobre el dibujo y otros tres contestaron de forma directa; *2)* todos utilizaron la función local para conseguir la generalización lejana, y 3) 14 expresaron la regla general de forma verbal mediante una función global y cuatro mediante una función local. La secuencia más exitosa en el proceso inverso ha sido "función local – función local– función global", que fue seguida por 10 estudiantes de los 18 que completaron las tres fases del proceso inverso.

De esta forma, los estudiantes que más éxito obtuvieron en el problema de generalización de patrones fueron los que se apoyaron en un dibujo para captar el patrón de crecimiento de la sucesión y después tuvieron la flexibilidad necesaria para cambiar a estrategias funcionales, primero local para un determinado término de la secuencia, y después global para cualquier término de la secuencia.

5. Conclusiones

El objetivo de esta investigación era estudiar la forma en la que alumnos de 3º a 6º de Educación Primaria resuelven un problema de generalización de patrones, para lo que debíamos analizar en primer lugar el nivel de éxito, las estrategias utilizadas y la flexibilidad para cambiar de estrategia, y después su progresión para establecer descriptores de una trayectoria de aprendizaje que permitiera diagnosticar la comprensión de los estudiantes y describir su progreso a través de niveles de desarrollo.

5.1. Nivel de éxito alcanzado

Casi 90% de los alumnos de 3º de Educación Primaria siguió la secuencia dibujando la figura y realizando correctamente el recuento de sillas, 80% realizó la generalización cercana y sobre 10% realizó la generalización lejana y expresó verbalmente la regla general; estos resultados confirman la observación en la que Radford (2011) sostenía que estudiantes de Primaria son capaces de coordinar las dos estructuras a partir de 2º grado.

La tercera parte de los alumnos de 4º han sido capaces de realizar correctamente la generalización lejana y una cuarta parte incluso ha expresado verbalmente una regla general; estos resultados también confirma la idea de Warren (2005) de que los estudiantes son capaces de establecer una relación funcional entre la posición de la figura y el número de elementos que la componen a partir de 4º grado.

Hemos comprobado también que, tal y como afirma Zapatera (2015), a la mayoría de los estudiantes de Primaria les resulta difícil revertir el pensamiento para, dado el número de elementos de una figura, identificar su posición: los resultados obtenidos en el proceso inverso son inferiores a los obtenidos en el proceso directo, de tal forma que en la generalización cercana se ha pasado de más de 90% de éxito en el proceso directo a menos de 75% en el proceso inverso, y en la generalización lejana y en la expresión de la regla general se ha pasado de un éxito en torno a 40% y 20%. Sin embargo, muchos de los estudiantes que no son capaces de invertir el proceso, sí observan que en las cuestiones del proceso inverso se pide "algo" distinto y realizan divisiones en lugar de multiplicaciones.

Los estudiantes de Primaria encuentran un nivel de dificultad muy alto en las cuestiones en las que tienen que expresar la regla general de forma algebraica mediante la utilización de indeterminadas. Aunque esta dificultad para utilizar las letras como variables ha sido atribuida frecuentemente a la inherente abstracción del álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth & Peled, 2003), pensamos que la causa está relacionada con el tipo de enseñanza recibida (Carpenter et al., 2003; Kaput, 2000), ya que el currículo de matemáticas no contempla de forma explícita el álgebra, al considerarla fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los estudiantes de Educación Primaria. Consideramos, al igual que otros estudios empíricos en línea con la *early algebra*, que los estudiantes de Primaria pueden aprender y comprender conceptos algebraicos elementales y utilizar modos y expresiones de pensamiento algebraicos y valoramos positivamente que vaya "en aumento el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debe ser parte del currículo propio de la Educación Primaria" (Molina, 2009, p. 139).

5.2. Utilización de estrategias y flexibilidad en su uso

Las estrategias aditivas son casi exclusivas en las cuestiones de generalización cercana, mientras que las estrategias funcionales, locales y globales, son mayoritarias, respectivamente, en las de generalización lejana y regla general.

Los estudiantes que realizaron las cuestiones de generalización cercana con estrategias aditivas y después tuvieron la suficiente flexibilidad para cambiar a estrategias funcionales para realizar la generalización lejana y expresar la regla general fueron los que alcanzaron un mayor nivel de éxito, siendo la secuencia "estrategia aditiva sobre dibujo-estrategia funcional local-estrategia funcional global" la secuencia más exitosa. Estas observaciones confirman la idea de Zapatera y Callejo (2011) de que "las estrategias más utilizadas han sido las aditivas y las más eficaces las funcionales [...] los alumnos con mayor nivel de éxito presentaron una mayor flexibilidad en la utilización de las estrategias" (p. 599).

Hemos constatado que muchos estudiantes intentaron responder utilizando erróneamente el razonamiento proporcional, especialmente en la generalización lejana y en la regla general, confirmando así los resultados de García Cruz (1998) sobre "el uso amplio de métodos inapropiados como la proporcionalidad directa" (p. 3). Este abuso de estrategias proporcionales en tareas de no proporcionalidad ha sido puesto de manifiesto en diversas investigaciones (De Bock, van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002), por lo que se hace necesario proponer a los estudiantes tareas en las que deban distinguir situaciones de proporcionalidad de las que no lo son.

Resulta significativo que ningún estudiante haya utilizado el método deconstructivo en el que interviene la sustracción, para resolver las tareas planteadas en el problema. A los alumnos les resulta más fácil sumar elementos en cada término que restar los elementos comunes, coincidiendo con Rivera y Becker (2008) que afirman que “el método deconstructivo es el más difícil de alcanzar” (p. 81).

5.3. Trayectoria de aprendizaje de la generalización de patrones

En los dos procesos de la generalización de patrones, directo e inverso, existe una progresión en las cuestiones planteadas que pone de manifiesto los niveles de dificultad y de conocimiento que requieren. De esta forma los niveles de dificultad y de conocimiento son menores en las cuestiones de generalización cercana, y aumentan en la generalización lejana y en la expresión verbal de la regla general alcanzando niveles muy altos en la expresión algebraica de la regla.

Al analizar de forma conjunta los resultados de los dos procesos observamos que la progresión era lineal, por lo que pudimos establecer una trayectoria de aprendizaje con diez niveles que marca la progresión de los estudiantes y que puede ayudar a los maestros a evaluar la evolución del pensamiento algebraico de sus estudiantes en el contexto de la generalización de patrones.

La trayectoria de aprendizaje se inicia en el nivel 0 con los estudiantes que no son capaces de continuar la sucesión al no respetar las estructuras espacial y numérica y acaba en el nivel 9 con los estudiantes que son capaces de expresar algebraicamente la regla general del proceso inverso. Para determinar estos niveles en la trayectoria de aprendizaje fijamos los descriptores del conocimiento de la generalización de patrones que deben poseer los estudiantes de cada nivel y precisamos también los saltos cognitivos que deben superar para realizar la transición al nivel superior (Figura 18).

Por otra parte, la categorización en niveles nos ha permitido estudiar la evolución de los estudiantes por cursos, observando la existencia de un progreso continuo entre los cursos. Este progreso alcanza su máximo entre 4º y 5º, lo que marca la existencia de dos ciclos: un primer ciclo formado por los alumnos de 3º y 4º que se sitúan en torno al nivel 3 y un segundo ciclo formado por los alumnos de 5º y 6º que se sitúan en torno al nivel 5.

5.4. Implicaciones para la enseñanza de las matemáticas

Deseamos que esta investigación contribuya a que los maestros reconozcan y valoren la importancia de la generalización de patrones en la construcción del conocimiento matemático y que les sirva como un recurso para introducir y desarrollar el pensamiento algebraico en sus alumnos y para valorar su progresión mediante la trayectoria de aprendizaje descrita.

Animamos a los maestros a plantear desde los primeros años de escolarización tareas de generalización que incluyan la exploración de patrones para que sus alumnos sean capaces de descubrir, extender y analizar las leyes que gobiernan las relaciones y expresarlas de forma verbal y simbólica e introducir así el pensamiento algebraico tal y como propone la *early algebra*.

Referencias

Battista, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 185-204. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_6

Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *BOLEMA, 28* (48), 64-88. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a04

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores & P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 283-294). Tenerife: SEIEM.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 191-218). New York: Taylor & Francis.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education, 40*, 3-22. doi: 10.1007/s11858-007-0067-7

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* London: Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 81-89. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_1

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50* (3), 311-334. doi: 10.1023/A:1021205413749

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91* (2), 166-170.

García Cruz, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (tesis doctoral no publicada). Universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife, España.

Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2006). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA, 1* (2), 79-98.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 105-128. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_3

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. doi: 10.17226/6286

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. In R. Speiser, C. Maher, & C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 99-107). Utah, USA: PME.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vernand, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 163-171). Paris, France: Laboratoire PSYDEE.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-32258-2

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. *Complex problem solving: The European perspective*, 201-218.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_6

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Editorial Labor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3* (3), 135-156.

Mouhayar, R. R., & Jurdak, M. E. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82* (3), 379-396. doi: 10.1007/s10649-012-9434-6

Orton, A., & Orton, J. (1994). Students' perception and use pattern and generalization. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 8thInternational Conference for the Psychology, of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 407-414). Lisbon: University of Lisbon.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40* (1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26* (2), 140-155. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40* (1), 65-82.doi: 10.1007/s11858-007-0062-z

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. In M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S., & Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, G. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME and the 25th PME-NA joined conference* (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145. doi: 10.2307/749205

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104. doi:10.1207/s15327833mtl0602_2

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números, 77*, 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20* (2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 129-162. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_4

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-108). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers. doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_3

Zapatera, A. (2015). *La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Alicante, Alicante, España.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao, España: SEIEM.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real, España: SEIEM.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49* (3), 379-402. doi: 10.1023/A:1020291317178