ESTUDIOS

Revista **Complutense de Educación**
ISSNe: 1988-2793

http://dx.doi.org/10.5209/RCED.55070

EDICIONES
COMPLUTENSE

El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles

Alberto Zapatera Llinares[1]; María Luz Callejo de la Vega[2]

Recibido: Enero 2017 / Evaluado: Abril 2017 / Aceptado: Mayo 2017

Resumen. El objetivo de esta investigación es estudiar la relación entre el conocimiento matemático y la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes" en el contexto de la generalización de patrones. Para ello se pidió a 40 estudiantes para maestros (EPM) que resolvieran un problema de generalización de patrones y que describieran e interpretaran las soluciones de tres alumnos de Educación Primaria al mismo problema. La resolución del problema permitió determinar el grado de conocimiento de los EPM y la capacidad para interpretar la comprensión de los alumnos a partir de la identificación de los elementos matemáticos significativos en las respuestas de los alumnos permitió determinar el grado de competencia. Del análisis de las destrezas identificar e interpretar se generaron descriptores para caracterizar cuatro perfiles en el desarrollo de la competencia, que posteriormente se refinaron incorporando descriptores del conocimiento. La investigación evidenció que los EPM con nivel bajo de conocimiento, y algunos con un nivel suficiente, no eran capaces de interpretar la comprensión de los alumnos de Educación Primaria, por lo que, aunque el conocimiento matemático del contenido es necesario para tener una mirada profesional, ese conocimiento no garantiza la competencia docente. Los materiales utilizados y la trayectoria inferida pueden servir de referencia para elaborar módulos de enseñanza sobre la competencia "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes" en el contexto de la generalización de patrones.
Palabras clave: conocimiento; matemáticas; generalización; formación de profesores.

[en] Mathematical knowledge and professional noticing of prospective teachers in the context of pattern generalization. Characterization of Profiles

Abstract. The aim of this research is to study the relationship between mathematical knowledge and teacher competence of professional noticing of children's mathematical thinking in the context of generalization of patterns. For this purpose, 40 prospective teachers (PPT) were asked to solve a problem of generalization of patterns and to describe and interpret the answers of three elementary students to the same problem. The resolution of the problem allowed to determinate the degree of knowledge of the PPT and the ability to interpret the students' comprehension from the identification of the significant mathematical elements in the students' answers allowed to determine the degree of competence. From the analysis of the skills to identify and interpret were generated descriptors to characterize four profiles in the development of the competence, which were later refined by incorporating knowledge descriptors. The research evidenced that the PPT with low level of knowledge, and some with a sufficient level of knowledge, were not able to interpret the comprehension of the elementary students, therefore, although

[1] Universidad Cardenal Herrera-CEU, CEU Universities (España)
E-mail: alberto.zapatera@uchceu.es
[2] Universidad de Alicante (España)
E-mail: luz.callejo@ua.es

the mathematical knowledge of the content is necessary to have a professional noticing, this knowledge does not guarantee the teaching competence. The materials used and the inferred trajectory can be used as a reference to compose teaching modules about the competence of professional noticing of children's mathematical thinking in the context of generalization of patterns.
Keywords: knowledge; mathematics; generalization; teacher education.

Cómo citar: Zapatera Llinares, A. y Callejo de la Vega, M. L. (2017). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación,* 24 (1), 35-38.

1. Introducción

Un foco de interés de la investigación en didáctica de las matemáticas, y en particular en la formación y en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, es la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos" (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002).

Para profundizar en esta competencia algunos investigadores han generado descriptores que ayudan a comprender el desarrollo de la mirada profesional de los estudiantes para maestro (EPM), codificando las respuestas de los participantes en niveles de evidencia. Las investigaciones más operativas son las que han identificado elementos matemáticos significativos y los han utilizado para interpretar la comprensión de los alumnos (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014) y las que han descrito etapas de una trayectoria de aprendizaje en dominios matemáticos específicos (Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassell y Yoder, 2013; Wilson, Mojica y Confrey, 2013).

Las investigaciones que se basan en los elementos matemáticos significativos relacionan las dimensiones matemática y cognitiva, vinculadas respectivamente a la identificación de elementos y a la interpretación de la comprensión de los alumnos. Por ejemplo, Fernández, Valls y Llinares (2011) para analizar las descripciones de los EPM de las respuestas de alumnos de Primaria a problemas proporcionales y no proporcionales, consideraron tres elementos significativos: si la función pasa por el origen, el valor de la pendiente y los cambios en las razones; a partir de estos elementos generaron descriptores de cuatro perfiles de desarrollo de la competencia. Por su parte, Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2014) también definieron, en el dominio de la derivada, tres elementos matemáticos: tasas de variación, interpretación geométrica y aproximación numérica; posteriormente caracterizaron tres estadios de comprensión: intra si usa los elementos pero no los relaciona, inter si usa los elementos y relaciona algunos y trans si usa los elementos y los relaciona todos; después, en función de los elementos matemáticos significativos y de los estadios de comprensión, establecieron tres perfiles de desarrollo de la competencia.

Otras investigaciones que generaron descriptores de la mirada profesional centraron su atención en las características propias de cada estadio de la trayectoria y en los saltos cognitivos necesarios para pasar de un estadio a otro. Por ejemplo, Schack et al. (2013) se basaron en el SEAL (Stages of Early Arithmetic Learning), que establece una trayectoria de aprendizaje sobre la introducción de la aritmética y que consta de seis etapas superpuestas del pensamiento matemático de los alumnos de Primaria: conteo emergente, conteo perceptual, conteo figurativo, secuencia numérica inicial, secuencia numérica intermedia y secuencia numérica con facilidad. Por su parte, Wilson, Mojica y Confrey (2013) estudiaron si las respuestas que daban maestros analizando vídeos en los que alumnos resolvían problemas de reparto respondían a los distintos estadios de la trayectoria de aprendizaje EPLT (EquiPartitioning Learning Trajectory) sobre la equivalencia de fracciones, organizada en niveles de crecimiento cognitivo: en los niveles bajos los alumnos aprenden a coordinar las ideas esenciales del razonamiento sobre fracciones, en los niveles intermedios los alumnos utilizan relaciones matemáticas y en los niveles superiores describen las estrategias y usan todos los conceptos correctamente.

Investigaciones recientes sobre la "mirada profesional" están poniendo el énfasis en identificar características de esta competencia en dominios matemáticos específicos, avalando la idea de que los profesores deben conocer cómo los estudiantes comprenden los contenidos matemáticos para poder tomar decisiones adecuadas para la enseñanza (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). El dominio elegido en esta investigación es la generalización de patrones debido al reconocimiento de la importancia de introducir y desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización por medio de la identificación de patrones en sucesiones de figuras o de números (NCTM, 2000; Radford, 2014).

Esta investigación sigue la línea de las investigaciones anteriores pues se centra en cómo los EPM identifican elementos matemáticos significativos de la generalización de patrones y los utilizan para interpretar la comprensión de los alumnos y establece perfiles de desarrollo de la "mirada profesional" basados en los estadios de comprensión de una hipotética trayectoria de aprendizaje de la generalización de patrones. Sin embargo, esta investigación incorpora nuevas ideas: por una parte estudia la mirada profesional de los EPM en un contexto nuevo como es la generalización de patrones, que está adquiriendo un gran interés por su importancia en la introducción del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización y, por otra parte, estudia el conocimiento matemático que debe poseer el profesor de matemáticas y su vinculación con la mirada profesional.

Desde esta perspectiva, el objetivo de esta investigación es generar descriptores de perfiles de EPM para analizar la relación entre el conocimiento matemático y la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos", en el contexto específico de la generalización de patrones.

2. Marco teórico

Del interés por el estudio del conocimiento y de las destrezas que precisa el profesor para enfrentarse al proceso de enseñanza-aprendizaje han surgido modelos y corrientes de investigación como el "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT; Ball, Thames y Phelps, 2008), que intenta sistematizar los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas y la competencia docente "mirar profesionalmente (professional noticing) el pensamiento matemático de los alumnos" (Mason 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011) que se centra en el uso de ese conocimiento que hace el profesor en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Respecto al "Conocimiento Matemático de la Enseñanza", Ball, Thames y Phelps (2008) señalan dos dominios en el conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas: el Conocimiento del Contenido a Enseñar y el Conocimiento Didáctico del Contenido. Respecto a la competencia "mirar profesionalmente", Jacobs, Lamb y Philipp (2010) señalan tres destrezas interrelacionadas que debe desarrollar el profesor de matemáticas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir las acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Lo que el profesor necesita saber para enseñar matemáticas y la forma en que utiliza ese conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) y la competencia docente "mirar profesionalmente", son constructos dependientes y conforman una línea importante de investigación en el campo de la educación matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008).

2.1. Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

El Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) parte de las ideas de Shulman (1986) que, en contraposición con las tendencias anteriores basadas en aspectos generales de la enseñanza, se centra en los conocimientos que debe tener un profesor. Para ello propone tres dominios de conocimiento: el Conocimiento del Contenido a Enseñar, el Conocimiento Pedagógico del Contenido y el Conocimiento del Currículo.

Ball, Thames y Phelps (2008), centrándose también en el conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas, establecen el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), señalando dos grandes dominios de conocimiento: el Conocimiento del Contenido a Enseñar (SMK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), divididos a su vez en tres subdominios (Figura 1).

MKT. Conocimiento Matemático de la Enseñanza

- SMK. Conocimiento del Contenido a Enseñar
  - CCK. Conocimiento Común del Contenido
  - HCK. Conocimiento Matemático del Horizonte
  - SCK. Conocimiento Especializado del Contenido
- PCK. Conocimiento Didáctico del Contenido
  - KCS. Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes
  - KCT. Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza
  - KCC. Conocimiento Curricular del Contenido

Figura 1. Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza MKT

El Conocimiento del Contenido a Enseñar (SMK) comprende los conocimientos matemáticos y está formado por tres subdominios:

1. El Conocimiento Común del Contenido (CCK), que es el conocimiento matemático necesario para resolver tareas no exclusivas de la enseñanza e incluye la habilidad del profesor para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades.
2. El Conocimiento Matemático del Horizonte (HCK), que es el conocimiento de un contenido matemático a lo largo de las etapas educativas e incluye la habilidad del profesor para reconocer la importancia de un determinado contenido matemático y enlazarlo con otros.
3. El Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), que es el conocimiento matemático necesario para la enseñanza e incluye la habilidad del profesor para valorar e interpretar la validez de las respuestas de los estudiantes y explicar el origen de sus errores.

El Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) comprende los conocimientos específicos para la enseñanza y está formado también por tres subdominios:

1. El Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (KCS), que conecta los conocimientos matemáticos con el conocimiento sobre los estudiantes e incluye la habilidad del profesor para predecir lo que les interesa a los alumnos y los errores que cometerán con mayor frecuencia.
2. El Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (KCT), que conecta los conocimientos matemáticos con el conocimiento para su enseñanza e incluye la habilidad del profesor para reconocer los procedimientos más adecuados para enseñar un determinado contenido.
3. El Conocimiento Curricular del Contenido (KCC), que está formado por los programas, objetivos, contenidos… e incluye los materiales y recursos que utiliza el profesor en su práctica docente.

2.2. Mirada Profesional del pensamiento matemático de los estudiantes

La mirada profesional es un término usado para indicar el acto de observar o reconocer los fenómenos significativos y actuar en consecuencia. Desde esta perspectiva, la mirada profesional forma parte del aprendizaje de cualquier profesión (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010) y es una habilidad que se puede aprender y que mejora con la experiencia (Star y Strickland, 2007).

En el caso concreto de la enseñanza, para van Es y Sherin (2002) tener una mirada profesional implica identificar y reconocer los aspectos relevantes en una situación de aula, aplicar el conocimiento sobre el contexto para adoptar decisiones y conectar los aspectos identificados con principios generales de enseñanza y aprendizaje.

Algunas investigaciones proponen centrar la mirada profesional en el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que implica investigar la capacidad de los profesores para observar, describir, interpretar y dar sentido a las situaciones de enseñanza. Desde esta perspectiva, Jacobs, Lamb y Phillip (2010) conceptualizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes como el conjunto de tres destrezas interrelacionadas:

1. Identificar las estrategias que utilizan los estudiantes
2. Interpretar la comprensión que manifiestan los estudiantes
3. Decidir las acciones para mejorar la enseñanza-aprendizaje en función de la comprensión de los estudiantes

La primera destreza implica identificar los aspectos matemáticos significativos en las estrategias que usan los estudiantes porque sus detalles proporcionan una ventana para mirar su pensamiento matemático (Carpenter, Franke y Levi, 2003). Para ello, el maestro debe tener un profundo conocimiento matemático para la enseñanza que le permita observar con detalle las respuestas y las acciones de los estudiantes y la forma en la que se enfrentan a los problemas (Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares y Valls, 2013; Zapatera y Callejo, 2013).

Para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes el maestro debe conectar los elementos matemáticos identificados en las estrategias con la comprensión de los conceptos matemáticos, para lo que necesita un conocimiento suficiente en el campo de las matemáticas (Jacobs, Lamb y Phillip, 2010). Mason (2002) centra esta destreza en explicar y teorizar las observaciones para relacionarlas con contenidos matemáticos, y evaluarlas para tomar las decisiones adecuadas.

El objetivo de un maestro, al identificar las estrategias e interpretar la comprensión de los estudiantes, es utilizar esa información para decidir cómo responder. Van Es y Sherin (2002) enfatizan en este aspecto práctico de la mirada profesional e indican que el objetivo de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es hacer efectivas las respuestas de instrucción.

Sherin, Jacobs y Phillip (2011) consideran que la habilidad de integrar estas tres destrezas es condición necesaria, aunque no suficiente, para dar respuesta a la comprensión de los alumnos.

2.3. La generalización de patrones

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática, de tal forma que para Mason (2002) la generalización es el verdadero nervio de las matemáticas y una de las rutas fundamentales hacia el álgebra.

Pólya (1954) afirma que generalizar es *"pasar de un objeto a una clase que contiene el objeto"* (p. 12) y Dreyfus (1991) que generalizar es *"derivar o inducir desde lo particular, identificando lo que es común y extendiendo dominios de validez para incluir un conjunto mayor de casos"* (p. 35).

En el caso particular de la generalización de patrones, Radford (2008) considera tres aspectos: tomar conciencia de una propiedad común, generalizar la propiedad a todos los términos de la secuencia y usar la propiedad para encontrar una regla que permita calcular cualquier término de la secuencia.

Investigaciones sobre la generalización de patrones (Radford, 2008; Rivera, 2010; Warren, 2005) han puesto de relieve la importancia de tres elementos matemáticos: las estructuras numérica y espacial, la relación funcional y el proceso inverso. Las estructuras numérica y espacial emergen respectivamente del número y de la distribución de los elementos de cada término de la sucesión, la relación funcional asocia la posición de una figura y el número de elementos que la forman y el proceso inverso permite identificar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman.

Estos elementos marcan tres aspectos cognitivos en la generalización de patrones: la coordinación entre las estructuras espacial y numérica, el pensamiento funcional y la reversibilidad. La coordinación entre las estructuras espacial y numérica permite identificar una regularidad entre ambas estructuras para continuar la sucesión; el pensamiento funcional permite establecer la relación funcional para identificar el número de elementos de un término lejano o no especificado; y la reversibilidad permite establecer la función inversa para reconocer la posición de un determinado término de la secuencia en función del número de elementos.

Los elementos matemáticos y los aspectos cognitivos han permitido caracterizar tres estadios de la comprensión de la generalización de patrones en los estudiantes de Primaria: en el estadio 1, el estudiante no reconoce el patrón de crecimiento cuantitativo por lo que no respeta las estructuras espacial y/o numérica; en el estadio 2, el estudiante coordina las estructuras espacial y numérica, reconoce la relación funcional y la expresa de forma verbal en una regla general; y en el estadio 3, el estudiante, además de coordinar las estructuras y reconocer la relación funcional, es capaz de invertir la relación en casos específicos (Callejo y Zapatera, 2016) (Figura 2).

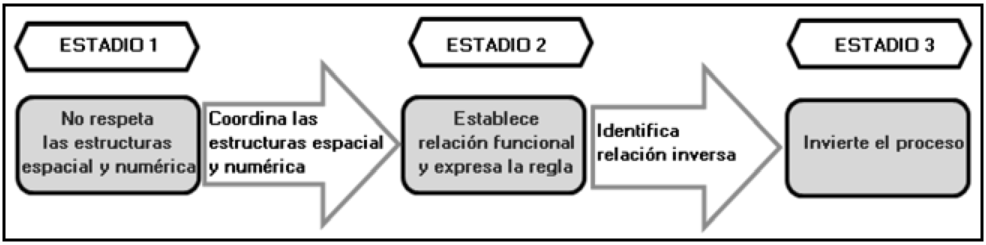


Figura 2. Estadios de comprensión y trayectoria de aprendizaje

Estos estadios, establecen una cierta progresión en el desarrollo del proceso de generalización y marcan una posible trayectoria de aprendizaje con los saltos cognitivos necesarios para pasar de un estadio a otro.

3. Metodología

3.1. Participantes y contexto

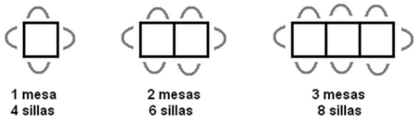
En este estudio participaron 40 estudiantes para maestro que estaban en el segundo semestre de su programa de formación del Grado en Maestro en Educación Primaria.

3.2. Instrumentos de recogida de datos

Se utilizaron dos cuestionarios diseñados a partir de investigaciones anteriores sobre la comprensión de la generalización de patrones en alumnos de Primaria (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Radford, 2008). En el primer cuestionario los EPM debían resolver un problema de generalización de patrones y en el segundo cuestionario debían responder a dos cuestiones profesionales a partir del análisis de las respuestas de tres alumnos de Primaria pertenecientes a cada uno de los estadios de comprensión de la generalización de patrones.

En el problema del primer cuestionario (Figura 3), adaptado de Carraher, Martínez y Schliemann (2008), se presenta una situación cuyo enunciado proporciona los primeros términos de una progresión aritmética y se pide a los alumnos continuar la sucesión, calcular el número de sillas para un número pequeño de mesas (generalización cercana) y para un número grande de mesas (generalización lejana), hallar el número de mesas para un determinado número de sillas (proceso inverso) y obtener la regla general que relacione las dos variables, es decir, las sillas y las mesas.

Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas



Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. **¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?**
2. **¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?**
3. **En una fiesta se han colocado juntas 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.**
4. **Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila?**
5. **Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.**

Figura 3. Problema de generalización de patrones

En el segundo cuestionario, los EPM debían analizar las respuestas de tres alumnos de Educación Primaria, A, B y C, pertenecientes a cada uno de los tres estadios de comprensión de la generalización y contestar a dos cuestiones profesionales (Figura 4). Las respuestas de estos alumnos se seleccionaron de un trabajo de investigación anterior sobre la "mirada profesional" de EPM analizando el proceso de generalización en alumnos de 3º a 6º de Educación Primaria (Zapatera, 2015).

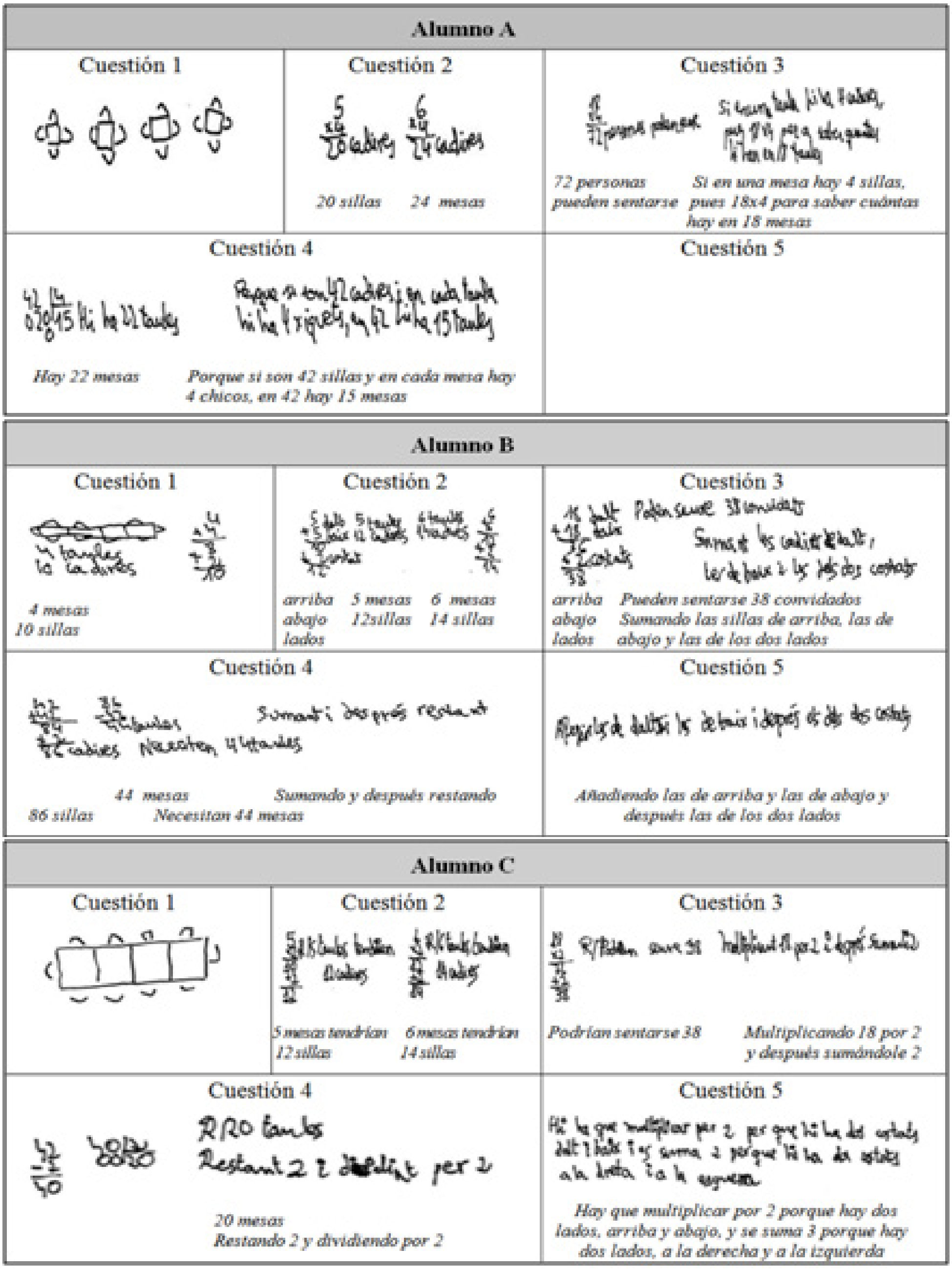


Figura 4. Respuestas de los alumnos de Primaria al problema

Las dos cuestiones profesionales del cuestionario 2 que debían responder los EPM están relacionadas con dos destrezas de la mirada profesional, identificar e interpretar (Figura 5).

1. Qué aspectos destacarías de las respuestas del estudiante X.

   a) Corrección de las respuestas

   b) Estrategias utilizadas

   c) Uso de las figuras

   d) Dificultades o bloqueos

2. A partir de los aspectos que has destacado, identifica algunas características del proceso de generalización del estudiante X en los tres problemas.

Figura 5. Cuestiones profesionales del cuestionario 2

El objetivo de la primera cuestión era ver en qué medida los EPM identifican los elementos matemáticos significativos usados por los alumnos y el de la segunda cuestión era determinar si los EPM eran capaces de abstraer las regularidades observadas para interpretar las características de la comprensión de la generalización.

3.3. Análisis de datos

El análisis de la resolución del problema (cuestionario 1) se centró en la corrección de las respuestas, mientras que el análisis de las dos cuestiones profesionales (cuestionario 2) se centró en verificar si los EPM identificaban los elementos matemáticos significativos en las respuestas de los alumnos y si usaban estos elementos para interpretar la comprensión del proceso de generalización de cada uno de los tres alumnos de Educación Primaria.

Se clasificaron a los EPM en cuatro grados de conocimiento en función del número de preguntas del problema que resolvían correctamente: muy bajo si resolvían una o dos preguntas, bajo si resolvían tres preguntas, medio si resolvían cuatro preguntas y alto si resolvían las cinco preguntas (Tabla 1).

Se caracterizaron cuatro grados en la destreza identificar según el número de elementos significativos que los EPM identificaron: muy bajo si no identificaban ningún elemento, bajo si identificaban un elemento, medio si identificaban dos elementos y alto si identificaban los tres elementos.

La destreza interpretar también se caracterizó en cuatro grados en función del número de alumnos cuya comprensión eran capaces de interpretar: muy bajo si no interpretaban la comprensión de ningún alumno, bajo si interpretaban la comprensión de un alumno, medio si interpretaban la comprensión de dos alumnos y alto si interpretaban la comprensión de los tres alumnos.

Tabla 1. Caracterización de grados de conocimiento y de destrezas

		Muy bajo	Bajo	Medio	Alto
Conocimiento	Cuestiones que resuelve	≤ 2 cuestiones	3 cuestiones	4 cuestiones	5 cuestiones
Identificación	Elementos que identifica	0 elementos	1 elemento	2 elementos	3 elementos
Interpretación	Alumnos que interpreta	0 alumnos	1 alumno	2 alumnos	3 alumnos

A partir del análisis conjunto de las dos destrezas se generaron unos descriptores para caracterizar cuatro perfiles en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente. Posteriormente se refinaron estos perfiles a partir de los grados de conocimiento de los EPM en la resolución del problema de generalización de patrones, añadiendo un nuevo descriptor en cada perfil.

4. Resultados

4.1. Identificación de elementos matemáticos e interpretación de la comprensión

Al analizar las respuestas a las cuestiones profesionales, los EPM se clasificaron en cuatro grados según las evidencias mostradas en sus respuestas en cada una de las dos destrezas: muy bajo, bajo, medio y alto (Tabla 2).

Los resultados obtenidos en la identificación fueron superiores a los obtenidos en la interpretación, ya que todos los EPM identificaron al menos un elemento matemático significativo mientras que 15 EPM no fueron capaces de interpretar la comprensión de ninguno de los tres alumnos de Primaria y, además, 17 EPM identificaron los tres elementos matemáticos, mientras que solo 2 interpretaron la comprensión de los tres alumnos.

Tabla 2. Clasificación de los EPM según el grado de evidencia en las dos destrezas

	Muy bajo	Bajo	Medio	Alto
Identificación	0	7	16	17
Interpretación	15	13	10	2

En la destreza identificación, de los 40 EPM participantes, 7 identificaron solo las estructuras, 16 identificaron las estructuras y otro elemento más (11 la relación funcional y 5 el proceso inverso) y 17 identificaron los tres elementos.

Por ejemplo, el EPM-26 fue clasificado en el grado bajo porque identificó solo las estructuras numérica y espacial, al afirmar del alumno B que "*emplea la estrategia espacial y numérica para la resolución de las figuras, respeta el espacio, el orden y la planificación de la figura",* pero no mostró ninguna evidencia de identificación de los otros dos elementos, realizando comentarios ambiguos centrados en su corrección o en el tipo de lenguaje utilizado como *"ha resuelto bien algunas cuestiones"* o *"podía haberlo explicado mejor".*

Sin embargo, el EPM-18 fue clasificado en el grado alto pues identificó los tres elementos en el alumno B: identificó las estructuras al afirmar que *"respeta la distribución espacial y emplea la estrategia de recuento sobre el dibujo";* identificó la relación funcional ya que *"se da cuenta de que la fila de arriba y la de abajo tienen el número de sillas igual al número de la figura y, además sabe que hay dos sillas más, que son las de los extremos";* e identificó el proceso inverso al observar que *"se le pide que calcule el número de mesas y no el número de sillas, es decir, la operación contraria a la realizada anteriormente".*

En la destreza interpretar, 15 EPM no fueron capaces de interpretar la comprensión de la generalización de patrones de ninguno de los tres alumnos de Primaria, 13 EPM interpretaron la comprensión de un solo alumno (12 del alumno A y 1 del alumno B), 10 interpretaron la comprensión de dos alumnos (6 la de los alumnos A y

B, 3 la de los alumnos A y C y 1 la de los alumnos B y C) y 2 EPM interpretaron la comprensión de los tres alumnos.

Por ejemplo, el EPM-12, clasificado en el grado muy bajo, no fue capaz de interpretar la comprensión de ninguno de los alumnos de Primaria, limitándose a expresar comentarios genéricos y ambiguos, sin hacer referencia a los elementos matemáticos que caracterizan el proceso de generalización. Del alumno A afirmó que *"no ha hecho una buena generalización*", del alumno B que *"sabe realizar la mayoría de los apartados, pero no obstante tiene ciertas dificultades en algunos"* y del alumnos C que "*sí sabe generalizar bien*".

Por otro lado, el EPM-18 fue clasificado en el grado alto de interpretación al ser capaz de interpretar la comprensión de la generalización de los tres alumnos. Del alumno A comentó que "*no ha sabido seguir el patrón general al dibujar las mesas separadas, arrastrando este error todo el problema";* del alumno B que *"consigue encontrar el patrón general del problema, pero no consigue aplicarlo al contrario"; y* del alumno C que "*respeta la distribución espacial y numérica de las mismas, es capaz de hacer una generalización más lejana ya que encuentra el patrón que siguen todas las figuras y además lo aplica al contrario"*.

4.2. Caracterización de los perfiles

El análisis de las destrezas identificar e interpretar permitió generar descriptores para cuatro perfiles de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Zapatera, 2015): en el perfil 0 fueron clasificados 15 EPM que, aunque identificaron uno o más elementos matemáticos en las respuestas de los alumnos de Primaria, no fueron capaces de interpretar la comprensión de ninguno de ellos; en el perfil 1 fueron clasificados 13 EPM que también identificaron uno o más elementos, pero interpretaron la comprensión de un alumno; los 10 EPM clasificados en el perfil 2 identificaron 2 o 3 elementos e interpretaron la comprensión de dos alumnos; y al perfil 3 se asignaron los 2 EPM que identificaron los tres elementos matemáticos significativos e interpretaron la comprensión de los tres alumnos de primaria (Tabla 3).

Tabla 3. Caracterización de los perfiles

Perfil	Caracterización	Nº de EPM
Perfil 0	Identifican uno o más elementos matemáticos	15
	No reconocen evidencias de estadios de la comprensión de la generalización	
Perfil 1	Identifican uno o más elementos matemáticos	13
	Reconocen evidencias de un estadio de la comprensión de la generalización.	
Perfil 2	Identifican dos o más elementos matemáticos	10
	Reconocen evidencias de dos estadios de la comprensión de la generalización	
Perfil 3	Identifican los tres elementos matemáticos	2
	Reconocen evidencias de los tres estadios de la comprensión de la generalización	

4.3. El grado de conocimiento matemático

En el análisis del cuestionario 1 se identificaron los errores cometidos por los EPM al resolver el problema de generalización de patrones y se asignaron los grados de conocimiento a los EPM, según el número de cuestiones resueltas correctamente. De los 40 EPM participantes, 2 fueron asignados al grado muy bajo al responder incorrectamente tres cuestiones, 4 al bajo al responder incorrectamente dos cuestiones, 6 EPM al medio al responder incorrectamente una cuestión y 28 EPM fueron asignados al grado alto al responder correctamente las cinco cuestiones (Tabla 4).

Tabla 4. Clasificación de los EPM según el grado de conocimiento matemático

	Muy bajo	**Bajo**	**Medio**	**Alto**
Conocimiento matemático	2	4	6	28

Todos los EPM resolvieron correctamente las cuestiones de generalización cercana, sin embargo 2 EPM cometieron errores en la cuestión de generalización lejana, 8 lo hicieron en la cuestión del proceso inverso y 10 no fueron capaces de explicar la regla general.

Los 2 EPM que no fueron capaces de hallar el número de sillas para 18 mesas utilizaron erróneamente estrategias proporcionales: el EPM-12 encontró el patrón de crecimiento, pero no sumó las dos sillas de los extremos al afirmar que *"la sucesión numérica que se rige en ir sumando 2 sillas más a cada mesa, los invitados que se sentarían serían 36 personas. O multiplicando el número de mesas por 2"* y el EPM-25 realizó una regla de tres (Figura 6).

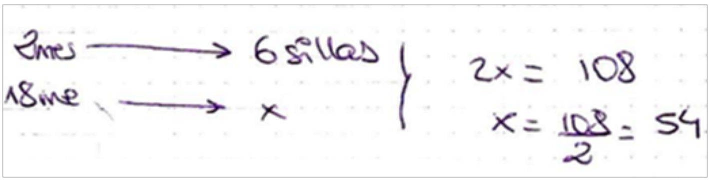


Figura 6. Respuesta del EPM-25 a la cuestión de generalización lejana

Los 8 EPM que no resolvieron correctamente la cuestión sobre el proceso inverso en la que debían hallar el número de mesas necesarias para 42 niños, no escribieron ninguna respuesta o escribieron respuestas sin sentido, usaron estrategias recursivas o proporcionales, confundieron mesas con sillas o tuvieron problemas a la hora de despejar la incógnita. Así, por ejemplo, el EPM-6 respondió sin sentido y de forma incompleta al escribir *"aplicamos la fórmula general"*; el EPM-12 utilizó una estrategia proporcional sin tener en cuenta las dos mesas constantes de los extremos señalando que "*serían 21 mesas, porque he multiplicado el número de mesas por 2 y me ha dado el resultado de sillas";* el EPM-16, aunque vinculó niños con sillas, no invirtió la función (Figura 7); y el EPM-21 aunque identificó la necesidad de aplicar la función inversa, no fue capaz de hallarla correctamente (Figura 8).

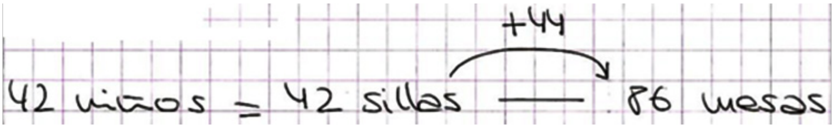


Figura 7. Respuesta del EPM-16 a la cuestión del proceso inverso

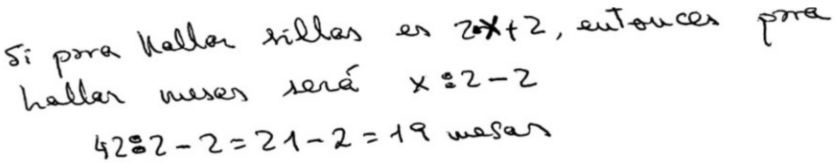


Figura 8. Respuesta del EPM-21a la cuestión del proceso inverso

La mayoría de los 10 EPM que no obtuvieron la regla general se bloquearon al fijar una estrategia recursiva o no discriminaron situaciones de proporcionalidad y de no proporcionalidad. El EPM-29 explicó el patrón de crecimiento pero no fue capaz de expresar una regla que sirviera para cualquier figura al escribir que *"la regla que condiciona el número de mesas y el número de sillas es que cada vez que se añade una mesa se añaden dos sillas";* y el EPM-22 señaló que se trata de "*una regla de tres directamente proporcional, ya que a más mesas se dan más sillas. Además, cuando se juntan las mesas perdemos un sitio para colocar una silla".*

4.4. El grado de conocimiento matemático y los perfiles de los EPM

Una vez clasificados los EPM en grados de conocimiento y en perfiles de la competencia mirada profesional, se procedió a estudiar la relación entre el grado de conocimiento y los perfiles caracterizados, realizándose un segundo refinamiento (Tabla 5).

Tabla 5. Resultados cuestionario 1

		Grado de conocimiento				**Total**
		MB (0)	**B (1)**	**M (2)**	**A (3)**	
Perfil mirada profesional	0 (MB)	1	2	4	8	15
	1 (B)	1	2	1	9	13
	2 (M)	0	0	1	9	10
	3 (A)	0	0	0	2	2

Todos los EPM que tuvieron dificultades en la resolución del problema de generalización de patrones se encuentran en los perfiles inferiores de la mirada profesional, y los EPM de los perfiles superiores, excepto el EPM-21 que no supo invertir la función, no tuvieron dificultades en la resolución del problema.

El grado de conocimiento de todos los EPM, excepto el EPM-12 del perfil 1 con conocimiento muy bajo, fue igual o superior al perfil de la mirada profesional: 6

EPM obtuvieron el mismo nivel en los dos conceptos, 12 obtuvieron un nivel superior en conocimientos, 13 obtuvieron dos niveles más y 8 tres niveles.

Estas observaciones permitieron refinar los perfiles de la mirada profesional descritos anteriormente, incluyendo en su caracterización la capacidad para resolver problemas de generalización lineal: en los perfiles 0 y 1 se incluyó el descriptor "*algunos EPM tienen dificultades para resolver problemas de generalización*" y en los perfiles 2 y 3 se incluyó el descriptor *"no tienen dificultades para resolver problemas de generalización"* (Tabla 6).

Tabla 6. Caracterización de los niveles después del refinamiento basado en el conocimiento

Perfil	Caracterización	Nº de EPM
Perfil 0	Identifican uno o más elementos matemáticos	15
	No reconocen evidencias de estadios de la comprensión de la generalización	
	Algunos tienen dificultades para resolver problemas de generalización	
Perfil 1	Identifican uno o más elementos matemáticos	13
	Reconocen evidencias de un estadio de la comprensión de la generalización.	
	Algunos tienen dificultades para resolver problemas de generalización l	
Perfil 2	Identifican al menos dos elementos matemáticos	10
	Reconocen evidencias de dos estadios de la comprensión de la generalización	
	No tienen dificultades para resolver problemas de generalización	
Perfil 3	Identifican los tres elementos matemáticos	2
	Reconocen evidencias de los tres estadios de la comprensión de la generalización	
	No tienen dificultades para resolver problemas de generalización	

5. Conclusiones

El objetivo de esta investigación ha sido caracterizar perfiles de EPM para analizar la relación del conocimiento matemático y la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos" en el contexto específico de la generalización de patrones.

El análisis conjunto de la identificación de elementos matemáticos y la interpretación de la comprensión de los alumnos con los grados de conocimiento de los EPM permitió caracterizar cuatro perfiles de EPM e inferir una trayectoria de aprendizaje (Figura 8), en la que el perfil 2 se ha desglosado en 2a y 2b (Zapatera, 2015).

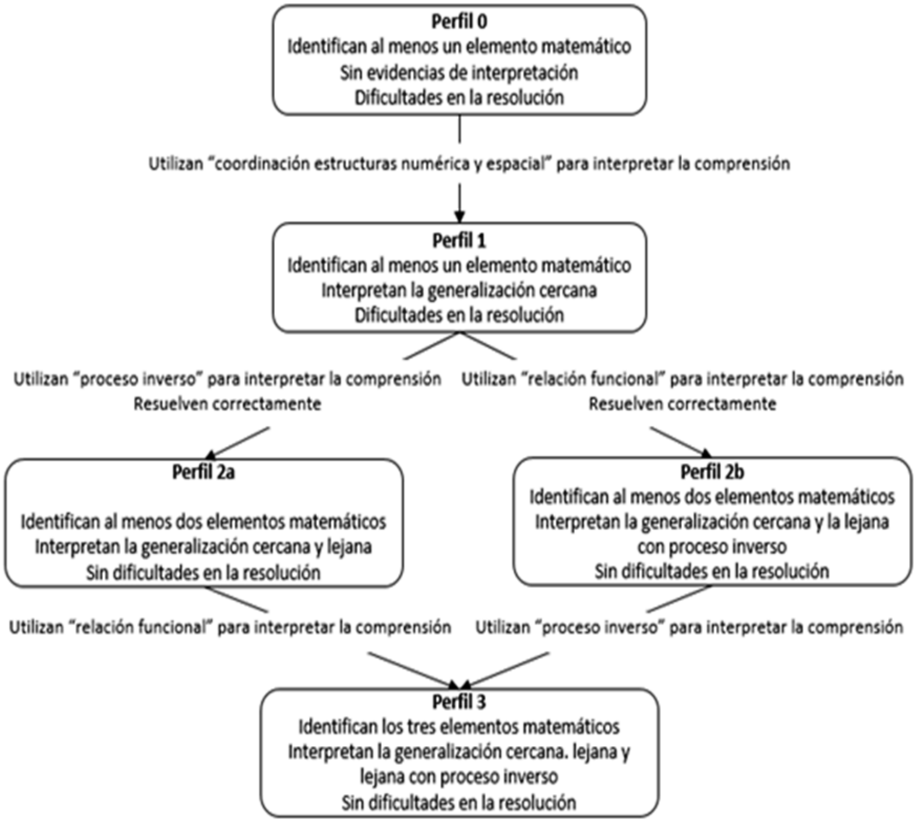


Figura 9. Trayectoria de aprendizaje y transición entre perfiles (Zapatera, 2015)

Los saltos cognitivos que permiten la transición de un perfil a otro superior están en función de cómo los EPM identifican los elementos matemáticos significativos, de cómo utilizan estos elementos para interpretar la comprensión de los alumnos de Educación Primaria y de cómo los EPM resuelven los problemas de generalización de patrones.

La transición del perfil 0 al perfil 1 se produce cuando los EPM usan la coordinación de las estructuras espacial y numérica para caracterizar el alumno de Primaria que se encuentra en el estadio 1. El paso del perfil 1 al perfil 2 se produce cuando los EPM usan además otro elemento matemático, relación funcional o proceso inverso, para interpretar la comprensión de un alumno de los estadios 2 o 3. Para pasar del perfil 2 al 3 los EPM deben usar todos los elementos para interpretar la comprensión de los alumnos de los tres estadios.

Algunos EPM de los perfiles bajos (perfiles 0 y 1) de la mirada profesional tienen dificultades para resolver correctamente los problemas de generalización de patrones. De esta manera, los 6 EPM que no fueron capaces de resolver dos o tres cuestiones del problema, pertenecen a los perfiles más bajos de la mirada profesional. Su insuficiente conocimiento matemático les impidió identificar elementos matemáticos significativos e interpretar la comprensión de los alumnos, lo que indica que el conocimiento matemático es una condición necesaria para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell et al., 2013; Fernández, Valls y Llinares, 2011).

Sin embargo, de los 34 EPM que están en los niveles altos de conocimiento, 22 pertenecen a los perfiles bajos de la mirada profesional. Aunque estos EPM tenían un conocimiento matemático suficiente, este conocimiento no les aseguró tener una competencia adecuada, lo que indica que el conocimiento matemático no es condición suficiente para mirar profesionalmente y se confirma la idea de que el conocimiento matemático no garantiza la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Sánchez-Matamoros et al., 2013; Zapatera y Callejo, 2013).

La habilidad del maestro para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes exige algo más que señalar lo que es correcto o incorrecto acerca de sus respuestas, requiere determinar de qué manera las respuestas de los alumnos son o no son significativas desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (Wilson, Mojica y Confrey, 2013); es decir, para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es necesario utilizar de forma interrelacionada el conocimiento del contenido matemático a enseñar y el conocimiento de los estudiantes, de la enseñanza y del currículo en contextos específicos.

Los cuestionarios utilizados y la trayectoria inferida pueden servir de apoyo para el desarrollo de la mirada profesional en estudiantes para maestro: los descriptores de los perfiles son indicadores que ayudan a describir y comprender el desarrollo de esta competencia docente y, por tanto, el aprendizaje de los EPM y además pueden servir de referencia para elaborar módulos de enseñanza sobre la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos en el contexto de la generalización de patrones.

6. Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo en parte del Proyecto I+D+i, EDU2014-54526— R y de EDU2017-87411— R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.

7. Referencias bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 57-79.

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers 'noticing of students' understanding of pattern generalization *Journal of Mathematics Teacher Education.* DOI 10.1007/s10857-016-9343-1

Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003).*Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D.W., Martinez, M.V. y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library, 11*, 25-41.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), I*nvestigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Jacobs, V.R., Lamb. L.C., y Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26,* 257-277.

Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En Pinto, M.F. y Kawasaki, T.F. (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 81-88. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, 501 — 509. Bilbao: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derívate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education,* DOI 10.1007/s10763-014-9544-y.

Schack E.O., Fisher M.H., Thomas J.N, Eisenhardt S., Tassell J. y Yoder M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's esarly numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 379-397.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, R.A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing:Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand.Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Star, J.R. y Strickland, S.K. (2007). Learning to observe: Using video to improve preservice teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 107-125.

van Es, E.A. y Sherin, M.G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.).*Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behaviour, 32,* 103-121.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Preservice primary teacher's noticing of students' generalization process En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 425-432. Kiel, Germany: PME.

Zapatera, A. (2015). La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria. *Tesis doctoral.* Universidad de Alicante.