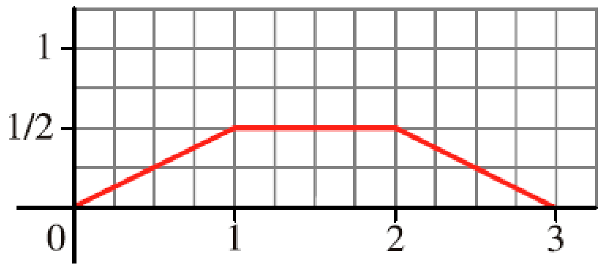
PROBLEMAS DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

1. La demanda diaria de un tipo específico de anestesia en el servicio de urgencias de un hospital es una variable continua X (medida en ml) cuya función densidad de probabilidad $f(x)$ es la siguiente:



   Calcule la probabilidad de que la demanda diaria de este tipo de anestésico:

   a) Sea superior a 2 ml.

   b) Esté entre 1.5 y 2.5 ml.

2. En una distribución normal estándar $N(\mu, \sigma) = N(0, 1)$ calcule:

   a) $P(Z < -1.73)$

   b) $P(0.62 < Z < 1.34)$

   c) $P(-1.2 < Z < 1.2)$

   d) $P(-0.71 < Z < 1.23)$

   e) $P(Z > 2.5)$

   f) $P(Z > 5.0)$

3. El nivel de colesterol (en mg/dl) de una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(192, 12)$. Calcule la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

   a) Superior a 200 mg/dl.

   b) Entre 180 y 220 mg/dl.

4. Las ventas de cierto medicamento pueden modelarse según una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(25, 6)$. Calcule el valor de k si:

   a) $P(X < k) = 0.8315$.

   b) $P(X > k) = 0.0062$.

5. Si un alumno contesta al azar un examen tipo test de 100 preguntas (la respuesta a cada pregunta sólo puede ser verdadero o falso), ¿cuál es la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas?

NOTA:

- Resuelva en primer lugar el ejercicio utilizando la variable aleatoria discreta que considere adecuada.
- Estudie posteriormente si es viable aproximar el resultado utilizando una distribución normal y, si lo es, resuelva de nuevo el ejercicio con dicha aproximación.
- Compare el resultado exacto con el resultado obtenido al hacer la aproximación.
- Realice de nuevo la aproximación utilizando la corrección de continuidad o corrección de Yates (lea el primer lugar el anexo relacionado que tiene disponible en el portal del alumno) y compare de nuevo el valor exacto con esta nueva aproximación.

6. En un hospital hay ingresados en los distintos servicios del mismo un total de 200 mujeres y 180 hombres. Calcule la probabilidad de que en un grupo de 30 pacientes seleccionados al azar, haya más de 20 hombres.

   NOTA:

   - Resuelva en primer lugar el ejercicio utilizando la variable aleatoria discreta que considere adecuada.
   - Estudie posteriormente si es viable aproximar el resultado utilizando una distribución binomial y, si lo es, resuelva de nuevo el ejercicio con dicha aproximación.
   - Posteriormente, estudie si es posible hacer una nueva aproximación y expresar el resultado en función de una distribución normal y, si lo es, resuelva el ejercicio con dicha aproximación (con y sin corrección de continuidad).
   - Compare finalmente todos los resultados, tanto el exacto, como los obtenidos utilizando las aproximaciones.

7. Suponga que en cierta planta de fabricación de carcasas de marcapasos, cada día el número promedio de paradas de la maquinaria debidas a problemas durante el proceso de producción es 12. ¿Cuál es la probabilidad de tener como mucho 15 paradas en un día concreto?

   NOTA: Resuelva el ejercicio utilizando la variable aleatoria discreta que considere adecuada, y posteriormente resuélvalo realizando una aproximación (cuando realice la aproximación, utilice la corrección de continuidad).

8. En un hospital de una pequeña localidad, atienden en promedio 50 casos de infarto de miocardio al año.

   a) ¿Cuál es el tiempo medio (en días) que transcurre entre la llegada de un paciente con un infarto y el siguiente?

b) Calcule la probabilidad de que después de la llegada de un paciente con un infarto, pasen más de dos semanas (14 días) hasta que llegue al hospital el siguiente caso de infarto.

9. En un sistema microfluídico que inyecta un determinado nutriente (encapsulado) a un cultivo celular, el tiempo entre llegadas sucesivas de cápsulas del nutriente a un punto concreto del cultivo se distribuye como una exponencial con parámetro $\lambda = 0.01$ cápsulas/ms.

    a) Calcule la media y la varianza de esta variable aleatoria exponencial.

    b) Se envía un estímulo eléctrico de una zona del cultivo a otra, inmediatamente después de que llegue una de las cápsulas. Si el estímulo tarda 50 ms en llegar de una zona del cultivo a otra y debe atravesar el punto del cultivo en el que se reciben las cápsulas con nutrientes, ¿cuál es la probabilidad de que el impulso eléctrico "choque" contra la siguiente cápsula?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que en 60 ms no llegue ninguna cápsula al cultivo?

10. El tiempo entre fallos de la lámpara ultravioleta de una cabina de cultivos celulares se distribuye como una exponencial con media de 10 días.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya fallos en la lámpara durante más de 10 días?

    b) Suponiendo que cada vez que falla la lámpara se cambia por una nueva, calcule la probabilidad de que haya al menos un fallo al mes (30 días).

    c) Determine el número medio de fallos en un mes.

11. Una variable aleatoria *X* tiene una función de distribución definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

    a) Represente gráficamente $F(x)$

    b) Demuestre que $F(x)$ es una función de distribución

    c) Calcule $P(0 < x < 1/4)$

    d) ¿Cuál sería la función densidad de probabilidad $f(x)$?

12. En un sistema de comunicaciones entre hospitales, los mensajes que llegan a un nodo determinado se concatenan formando paquetes de 5 mensajes cada uno antes de transmitirlos al resto de la red. Los mensajes llegan al nodo siguiendo una distribución de Poisson con $\lambda = 25$ mensajes en un intervalo de 1 minuto.

    a) ¿Cuál es el tiempo medio antes de poder formar cada paquete, es decir, hasta que llegan cinco mensajes al nodo?

b) ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo que pasa hasta que se forma cada paquete?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que pueda formarse un paquete en menos de 12 segundos?

13. Las llamadas a la central de "Emergencias 112" de una gran ciudad siguen una distribución de Poisson con un promedio de 20 llamadas en cada intervalo de 1 minuto.

    a) ¿Cuál es el tiempo medio que transcurre hasta que se realizan 100 llamadas?

    b) ¿Cuál es el tiempo medio que pasa entre la llamada 60 y la llamada 80?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que tengan lugar tres o más llamadas en un intervalo de 15 segundos?

14. Suponga que el tiempo de vida de un glucómetro sigue una distribución de Weibull con parámetros $\beta = 3$ y $\delta = 10.000$ horas.

    a) Determine la probabilidad de que un glucómetro tarde al menos 8000 horas en fallar.

    b) Determine el tiempo medio de vida cada glucómetro.

    c) Si se están utilizando 10 glucómetros y los fallos se producen de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que los 10 glucómetros tarden al menos 8000 horas en fallar?

    NOTA: Para resolver el último apartado de este ejercicio, considere una variable aleatoria binomial, en la que la probabilidad de éxito viene dada por el resultado obtenido en el primer apartado.

15. La vida (en horas) de la CPU de un ordenador que se utiliza en el análisis de imágenes médicas se modela utilizando una distribución Weibull con parámetros $\beta = 5$ y $\delta = 900$ horas.

    a) Determine el tiempo medio de vida de la CPU.

    b) Determine la varianza del tiempo de vida de la CPU.

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que la CPU falle antes de 500 horas?