PROBLEMAS DE TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

1. Describa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
   a) Lanzar una moneda.
   b) Lanzar un dado.
   c) Lanzar una moneda y un dado simultáneamente.
   d) Lanzar tres monedas.
   e) Sexo de los tres hijos de una familia.

2. Se tiene una urna con diez bolas numeradas del 1 al 10. Realizando extracciones con reemplazo, se consideran los siguientes sucesos:

   A = {*sale un número primo*}

   B = {*sale un cuadrado perfecto*}

   Verifique que se cumplen las Leyes de De Morgan para los sucesos *A* y *B.*

$$(A \cup B)' = (A' \cap B')$$
$$(A \cap B)' = (A' \cup B')$$

3. La probabilidad de un suceso *A* es 1/3, la de un suceso *B* es 2/4 y la de la intersección es 1/6. Calcule:
   a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
   b) La probabilidad de que no suceda *A.*
   c) La probabilidad de que no ocurran ni *A* ni *B.*
   d) La probabilidad de que o bien no ocurra *A* o bien no ocurra *B.*

4. Se lanza una moneda al aire tres veces consecutivas. En cada uno de los lanzamientos denominamos *C* al suceso “obtener cara” y *X* al suceso “obtener cruz”. En este contexto, se definen los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \{(CCC), (CCX), (CXX), (XXX)\} \\ B &= \{(CCC), (CXC), (XCX), (XXX)\} \\ C &= \{(CCC), (XCC), (XXC), (XXX)\} \end{aligned}$$

   a) ¿Son independientes *A*, B y *C*?
   b) Deduzca la expresión que nos permite obtener *P* (*A* ∪ *B* ∪ *C*) y calcule posteriormente su valor.

   NOTA: Para realizar la deducción de la expresión pedida, utilice en primer lugar la propiedad asociativa de conjuntos para expresar la probabilidad de la unión de tres conjuntos como la probabilidad de la unión de dos conjuntos no disjuntos (*A* por un lado y $B \cup C$ por otro) y posteriormente utilice la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión de sucesos y desarrolle las expresiones obtenidas.

5. Calcule la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 4 veces un dado.

6. Dados los sucesos *A* y *B*, tales que $P(A) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.3$ y $P(A' \cap B') = 0.2$:
   a) Calcule la probabilidad de que ocurra *B.*
   b) ¿Son *A* y *B* independientes?

7. Un hospital recibe mensualmente bolsas de suero fisiológico de dos empresas distribuidoras *A* y *B*, de acuerdo con la siguiente tabla:

	Bolsas defectuosas	Bolsas no defectuosas
A	20	130
B	10	110

   Si se elige una bolsa de suero al azar de entre todas las disponibles cuando llega el pedido a principios de mes, obtenga:
   a) La probabilidad de que la bolsa de suero provenga de la empresa *A*
   b) La probabilidad de que la bolsa esté defectuosa
   c) La probabilidad de que la bolsa sea defectuosa y provenga de la empresa *B*
   d) La probabilidad de que la bolsa sea defectuosa si se sabe que es de la empresa *B*
   e) La probabilidad de que la bolsa sea de la empresa *A* sabiendo a priori que es una defectuosa
   f) La probabilidad de que la bolsa sea de la empresa *A* o bien que sea de la empresa *B*
   g) La probabilidad de que la bolsa sea de la empresa *B* o que la bolsa sea no defectuosa

8. En una familia de cuatro hermanos parece más probable que haya tres hermanos del mismo sexo a que haya dos varones y dos hembras, pero, ¿realmente es así? Responda a esta cuestión resolviendo el problema a partir de un diagrama de árbol.

9. ¿Cuántas opciones distintas de pódium pueden darse en una carrera de velocidad en la que participan 8 personas?

   NOTA: Tenga en cuenta que en cada caso suben al pódium los tres primeros clasificados.

10. Calcule el número total de posibles resultados que se pueden generar en un sorteo de lotería primitiva teniendo en cuenta que este juego consiste en acertar 6 números extraídos al azar de una urna con 49 bolas numeradas del 1 al 49, sin importar el orden de extracción y sabiendo además que la extracción se realiza sin reemplazo.

11. Calcule el número total de resultados posibles en una quiniela de fútbol, teniendo en cuenta que en cada elección, las elecciones posibles forman el espacio muestral $S = \{1, X, 2\}$, y que se realizan 15 elecciones (con reemplazo, puesto que en cada elección puede seleccionarse cualquier resultado posible de entre los que forman el espacio muestral). La muestra se considera por supuesto, ordenada.

    Si realizamos una sola apuesta, ¿cuál es la probabilidad de acertar los quince resultados de la quiniela?

12. Si se dispone de una urna con siete bolas numeradas del 0 al 6, de manera que $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y se define un experimento consistente en extraer dos bolas al azar, con reemplazo y sin importar el orden de las extracciones, calcule el número total de resultados posibles que podría tener el experimento.

13. Una bolsa contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se realizan 4 extracciones con reemplazo, para formar un número de 4 dígitos (que puede empezar por cero).

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número con cuatro cifras repetidas?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número con tres cifras repetidas y una distinta?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea capicúa?

14. Calcule la probabilidad de extraer tres figuras en una baraja de cartas española, teniendo en cuenta que el número total de cartas es de 40, que hay 4 palos distintos (oros, espadas, copas y bastos) y que en cada palo hay 3 figuras (sota, caballo y rey).

    Considere dos opciones:

    a) Que las extracciones se realicen con reemplazo.

    b) Que las extracciones se realicen sin reemplazo.

15. Una prueba diagnóstica para diabetes tiene un probabilidad de falso positivo del 4% ($P(+/S) = 0.04$) y una probabilidad de falso negativo del 5% ($P(-/E) = 0.05$). Si la prevalencia de la diabetes en la población donde se usa esta prueba diagnóstica es del 7%:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo al que la prueba le salga positiva? → se pide $P(E/+)$.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea diabético un individuo al que la prueba le salga negativa? → se pide $P(S/-)$.

NOTA: Los falsos positivos son las pruebas diagnósticas que salen positivas (+) en individuos sanos (*S*), y los falsos negativos son las pruebas diagnósticas que salen negativas (-) en individuos enfermos (*E*).

16. Una prueba diagnóstica para el cáncer uterino tiene una probabilidad de falso positivo de 0.05 y una probabilidad de falso negativo de 0.10. Una mujer con una probabilidad pre-prueba de padecer la enfermedad de 0.15 tiene un resultado negativo al realizarse la prueba. Bajo esta premisa, calcule la probabilidad de que la mujer no esté enferma.

17. La madre de Sara es portadora de la enfermedad de *Duchenne*. Sara a su vez, tiene tres hijos varones sin la enfermedad. Bajo estas premisas, calcule la probabilidad de que Sara sea portadora de la enfermedad.

    NOTA:

    - Los portadores de la enfermedad tienen un gen alterado. Si identificamos *x* como el gen alterado y *X* como el gen sano, el espacio muestral para el nacimiento de Sara sería *S* = {*xX*, *XX*}, siendo *xX* el suceso que identificaría a Sara como portadora, y *XX* el suceso que identificaría a Sara como sana, ocurriendo cada suceso con la misma probabilidad (1/2) según la 1ª Ley de Mendel.
    - Con respecto a sus hijos varones, todos estarán identificados por un par *XY*, al ser todos sanos.
    - Tenga en cuenta además, que los genotipos de los sucesivos hijos son independientes, según la 2ª Ley de Mendel.

18. Una empresa que fabrica implantes cocleares tiene tres máquinas, *A*, *B* y *C* que producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de los implantes producidos en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5% respectivamente.

    a) Si se selecciona un implante al azar, calcule la probabilidad de que salga defectuoso.

    b) Si se selecciona un implante al azar y resulta ser defectuoso, calcule la probabilidad de que dicho implante haya sido fabricado por la máquina B.

    c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido un implante defectuoso?