

PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

1. En una población hay individuos de tres tipos con las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{Tipo1}) &= \theta^2 \\ \Pr(\text{Tipo2}) &= 2\theta(1 - \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \\ \Pr(\text{Tipo3}) &= (1 - \theta)^2\end{aligned}$$

Si se obtiene una muestra aleatoria de tamaño n , resultando N_1 individuos de Tipo 1, N_2 individuos de Tipo 2 y los restantes de Tipo 3, estudie si el estimador $\hat{T} = \frac{2N_1 + N_2}{2n}$ es insesgado para estimar θ .

2. La variable aleatoria poblacional “nivel de colesterol” de los alumnos de un colegio de Madrid, se distribuye siguiendo un modelo normal $N(\mu, \sigma)$. Se extraen 4 muestras aleatorias de la población (x_1, x_2, x_3 y x_4), y como estimadores de μ se proponen los siguientes:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{X_3 - 4X_2}{-3}$$

$$\hat{\mu}_3 = \bar{X}$$

- a) Compruebe si los estimadores son insesgados.
b) Determine cuál es el MVUE.
c) ¿Cuál sería el estimador más preciso? Justifique la respuesta en función del ECM.
3. La variable aleatoria X representa los “gastos mensuales de una empresa farmacéutica”, cuya función de densidad de probabilidad es $f(\theta, x) = \theta x^{\theta-1}$ con $\theta > 0$ y $0 < x < 1$. Se realiza un muestreo aleatorio de tamaño 3, y se proponen tres estimadores:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2}{6}$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{X_2 - 2X_1 + 4X_3}{6}$$

Calcule los sesgos de cada uno de los tres estimadores propuestos.

4. Sea una población con media μ de la que se extrae una muestra aleatoria de tamaño n . Considere los siguientes estimadores de la media:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$$

Calcule la eficiencia relativa de los dos estimadores propuestos.

5. El sistema de comunicaciones de un hospital modela los mensajes fallidos en un intervalo de una hora como una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ . Calcule el estimador de máxima verosimilitud para λ si se considera una muestra aleatoria de tamaño n .
6. Sea la distribución $N(\mu, \sigma)$ con media y varianza desconocidas. Calcule los estimadores de máxima verosimilitud para estos dos parámetros si se considera una muestra aleatoria de tamaño n .
7. Si el contenido en gramos de un determinado medicamento sigue una distribución normal $N(7.5, 0.3)$, calcule la probabilidad de que en una muestra de tamaño 5 se obtenga que la media es menor que 7.
8. Se ha comprobado que la concentración promedio de cierto analito de la sangre en una muestra formada por 36 extracciones de sangre es de 2.6 $\mu\text{g/ml}$. Encuentre el intervalo de confianza que se corresponde con $\alpha = 0.05$ para la concentración media de este analito de toda la población, suponiendo que la desviación típica de la población es 0.3, y que el modelo utilizado es una distribución normal.