PROBLEMAS DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONJUNTA

1. Sea X la variable aleatoria que indica el número de trabajadores de una clínica de odontología, y sea Y el número de trabajadores de dicha clínica que no pertenecen a la familia propietaria de la clínica, con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

X \ Y	0	1	2
1	2/9	1/9	0
2	1/9	2/9	0
3	0	1/9	2/9

   a) Calcule las distribuciones de probabilidad marginales de X e Y.
   b) Calcule la probabilidad de que Y sea mayor que X.
   c) Calcule la correlación entre X e Y.

2. Se seleccionan al azar dos tiritas de una caja que contiene tres tiritas de color azul, dos tiritas de color rojo y tres tiritas de color verde. La variable aleatoria X denota el número de tiritas azules que se seleccionan y la variable aleatoria Y denota el número de tiritas rojas que se seleccionan. La distribución de probabilidad conjunta de X e Y es la siguiente:

$f_{XY}(x, y)$		*x*		
		0	**1**	**2**
y	**0**	3/28	9/28	3/28
	1	6/28	6/28	-
	2	1/28	-	-

   a) Calcule las distribuciones de probabilidad marginales de X y de Y.
   b) Obtenga la función de masa de probabilidad condicional de X, conocido el valor de la variable aleatoria Y, y utilícela para determinar la siguiente probabilidad: $P(X = 0 \mid Y = 1)$.
   c) Demuestre que las variables aleatorias X e Y no son estadísticamente independientes.

3. Una empresa biotecnológica destina parte de sus beneficios a adquirir nuevo equipamiento, y parte a I+D+i.

   Sean:

   a) X: variable aleatoria que indica el porcentaje (en tanto por uno) destinado a adquirir equipamiento.
   b) Y: variable aleatoria que indica el porcentaje (en tanto por uno) destinado a I+D+i.

La función densidad de probabilidad conjunta de *X* y de *Y* es:

$$\mathbf{f}_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{k} & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtenga *k* para que $f_{XY}(x, y)$ sea una función de densidad.

   NOTA: Para resolver el resto de apartados del ejercicio, sustituya *k* por el valor calculado.

b) Obtenga las funciones de densidad de probabilidad marginales y las funciones de distribución marginales.

c) ¿Son independientes *X* e *Y*?

d) ¿Qué porcentaje podemos esperar que se destine a adquirir nuevo equipamiento?

e) Suponga que el porcentaje destinado a I+D+i es del 45%, ¿cuál sería en ese caso la probabilidad de que el porcentaje destinado a adquirir nuevo equipamiento fuese superior al 50%?

4. Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias continuas con la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$\mathbf{f}_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0 \;;\; y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Compruebe si *X* e *Y* son o no independientes.

b) Demuestre que la covarianza de *X* e *Y* es cero.

5. Sean *X* e *Y* dos variables aleatorias continuas con la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$\mathbf{f}_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & |y| < x \;;\; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Compruebe que $f_{XY}(x, y)$ es una función de densidad de probabilidad.

b) Calcule E(*X*) y E(*Y*).

c) Calcule estas probabilidades: $P(X < 1/2, Y < 0)$, $P(X > 1/2, -1/2 < Y < 1/2)$.

6. Dadas las variables aleatorias continuas *X* e *Y*, con la siguiente función densidad de probabilidad conjunta:

$$\mathbf{f}_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} cx^2y & x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de la constante *c*.

b) Determine la siguiente probabilidad: $P(X > Y)$.

7. Se sabe que las bombas de insulina para diabéticos pueden clasificarse según su rendimiento en cuatro grupos:
   - 40%: excelente (*E*)
   - 20%: buena (*B*)
   - 30%: regular (*R*)
   - 10%: mala (*M*)

   Si se selecciona una muestra al azar de 9 bombas de insulina, ¿cuál es la probabilidad de que 3 de estas bombas queden clasificadas según su rendimiento como excelentes, 3 se clasifiquen como buenas, 1 como regular y 2 como malas?

8. Una empresa farmacéutica desea conocer la opinión de algunos de sus clientes sobre tres medicamentos *A*, *B* y *C* que se utilizan para combatir los síntomas gripales. Sabiendo que, a partir de estudios previos realizados, esta empresa ha llegado a la conclusión de que el producto *A* es preferido por el 10% de los consumidores, el *B* por el 30% y el *C* por el 40%, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 10 personas, 2 de ellas prefieran el medicamento *A*, 3 personas prefieran el medicamento *B* y 2 personas prefieran el medicamento *C*?

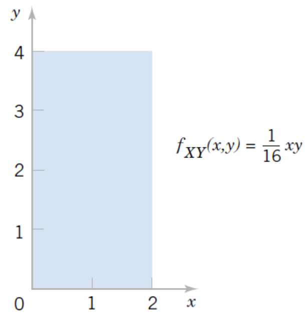
   NOTA: Tenga en cuenta que hay ciertas personas que no se decantan por ninguno de los tres medicamentos.

9. Suponga que las variables aleatorias *X*, *Y* y *Z*, tienen la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta: $f_{XYZ}(x, y, z) = 8xyz$, para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$.

   Determine:

   a) $P(X < 0.5)$.
   b) $P(X < 0.5, Y < 0.5)$.
   c) $P(Z < 2)$.
   d) $E(X)$.
   e) $P(X < 0.5 \mid Y = 0.5)$.
   f) $P(X < 0.5, Y < 0.5 \mid Z = 0.8)$.
   g) $f_{YZ}(y, z)$.
   h) $P(X < 0.5 \mid Y = 0.5, Z = 0.8)$.

10. Para las dos variables aleatorias de la figura que se adjunta a continuación, demuestre que $\sigma_{XY} = 0$.



11. Determine el valor de c, la covarianza y la correlación, para la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{XY} = (x, y) = c$, definida en el rango $0 < x < 4$, $0 < y$, $x - 1 < y < x + 1$.

    NOTA:

    - Aunque los valores de varianza que necesita para calcular la correlación se adjuntan a continuación, plantee las integrales que habría que resolver para calcular tanto V(X) como V(Y).
    - V(X) = 1.222, V(Y) = 1.385.

12. Las variables X e Y representan dos dimensiones de una pieza utilizada en prótesis de cadera. Suponga que X e Y tienen una distribución normal de dos variables con $\sigma_X = 0.04$, $\sigma_Y = 0.08$, $\mu_X = 3.00$, $\mu_Y = 8.00$ y $\rho_{XY} = 0$. Determine P $(2.95 < X < 3.05, 7.60 < Y < 7.80)$.

13. Un soporte microfluídico de un biosensor para la detección de Legionella se compone de dos mitades cuyos grosores pueden modelarse utilizando distribuciones normales. El grosor de la primera mitad tiene una distribución normal con media 0.1 µm y desviación estándar de 0.00031 µm, y el grosor de la segunda mitad tiene una distribución normal con media 0.23 µm y desviación estándar de 0.00017 µm. Las distribuciones son independientes.
    a) Determine la media y la desviación estándar del grosor total de las dos mitades.
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el grosor total sea mayor que 0.2405 µm?

14. Si X e Y son dos variables aleatorias normales e independientes con E(X) = 0, V(X) = 5, E(Y) = 10 y V(Y) = 9, determine:
    a) E(2X + 3Y).
    b) V(2X + 3Y).
    c) P(2X + 3Y < 30).
    d) P(2X + 3Y < 40).

15. Una variable aleatoria X tiene una media $\mu = 12$ y una varianza $\sigma^2 = 9$. Utilizando la regla de Chebyshev determine una cota inferior para cada una de las siguientes probabilidades:
    a) P $(6 < X < 18)$
    b) P $(3 < X < 21)$

16. Una farmacia estudió la demanda mensual de cajas de cierto tipo de antiinflamatorios por parte de sus clientes durante algunos meses y determinó que el promedio era de 28 y la desviación estándar de 4. Utilizando la regla de Chebyshev, determine cuántas cajas de antiinflamatorios debe tener la farmacia en stock al principio de cada mes para asegurar que la demanda solamente será mayor que la oferta como mucho en el 10% de los casos (es decir, con una probabilidad de 0.1).