UNIVERSIDAD SAN PABLO - CEU

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE INGENIERÍA BIOMÉDICA 3

Ejercicios

Profesor:
Rodrigo García Carmona

Versión 1.32

CEU
Universidad
San Pablo

Temas 1 y 2: Lógica y Demostraciones

Ejercicio 1

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1:

$$(\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b)) \implies (\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b))$$

Vamos a darle significado a los diferentes conjuntos y elementos del teorema:

$$A = \{\text{ estudiantes de FM3 }\}$$
$$B = \{\text{ clases de FM3 }\}$$
$$P(a,b) = \text{"estudiante } a \text{ se duerme durante la clase } b\text{"}$$

El siguiente teorema es similar al anterior:

Teorema 2:

$$(\forall b \in B, \exists a \in A, P(a,b)) \implies (\exists a \in A, \forall b \in B, P(a,b))$$

Preguntas:

1. £Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la izquierda de la implicación del teorema 1?
2. £Cómo se podría escribir en lenguaje natural el lado a la derecha de la implicación del teorema 1?
3. Averigüe si el teorema 1 es cierto o no, y demuéstrelo.
4. Averigüe si el teorema 2 es cierto o no, y demuéstrelo.

Solución

1. Existe un estudiante que se duerme en todas las clases de FM3.
2. En todas las clases de FM3 se duerme algún estudiante.
3. Es cierto. Consideramos dos casos posibles. Por agotamiento:
   - **Caso 1:** Supongamos que el lado izquierdo de la implicación es falso. En este caso el predicado es cierto por definición de implicación.
   - **Caso 2:** Supongamos que el lado izquierdo de la implicación es cierto. En este caso existe un elemento $a_0 \in A$ tal que $P(a_0, b)$ es cierto para todo $b \in B$. Por tanto, para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ (que hemos llamado a_0) tal que $P(a_0, b)$ es cierto. Por tanto, el lado derecho de la implicación también es cierto.

   Como se dan ambos casos, el lado izquierdo implica el lado derecho, así que el teorema es cierto. $\square$
4. Es falso. Encontramos un contraejemplo. Según el lado izquierdo de la implicación, pueden $\exists a_0, a_1 \in A$ y $\exists b_0, b_1 \in B$, tal que $a_0 \neq a1$ y $b_0 \neq b1$, y para los que $P(a_0, b_0)$ y $P(a_1, b_1)$ sean ciertos, pero que hagan $P(a_0, b_1)$ y $P(a_1, b_y)$ falsos. Por tanto, en este caso no existiría un $a_x \in A$ que hiciera $P(a_x, b)$ cierto para todo $b \in B$.

Ejercicio 2

Una pequeña sociedad secreta dentro de la EPS tiene aviesas intenciones: hacer que el examen final de FM3 sea *obscenamente difícil*, con enunciados del estilo *"Demuestre que un conjunto de axiomas no puede ser a la vez consistente y completo."* o *"Demuestre el último teorema de Fermat."* La única forma de acabar con sus malvados planes es determinar con exactitud quién forma parte de dicha sociedad secreta. Tras intensas investigaciones se ha conseguido reducir el grupo de profesores de la EPS sospechosos a tan solo nueve personas:

$$\{Abraham, Ana, Carlos, Gabriel, Gianluca, Teo, Mariano, Rodrigo, Victor\}$$

La sociedad secreta es un subconjunto de estos nueve. Se ha encontrado una lista con los participantes en el complot, pero está cifrada utilizando notación lógica, para evitar que los descubran (pues saben que los alumnos de FM3 no podran resolver un problema así). El predicado *miembro* indica quién forma parte de la sociedad. Esto es: $miembro(x)$ es cierto si y sólo si x es miembro de la sociedad.

Los contenidos de la lista se encuentran a continuación. Traduzca a lenguaje natural cada uno de los predicados siguientes y deduzca quién forma parte de la sociedad secreta.

1. $\exists x, \exists y, \exists z, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge miembro(x) \wedge miembro(y) \wedge miembro(z))$
2. $\neg(miembro(Ana) \wedge miembro(Gianluca))$
3. $(miembro(Mariano) \vee miembro(Gabriel)) \implies \forall x, miembro(x)$
4. $miembro(Ana) \implies miembro(Gianluca)$
5. $miembro(Carlos) \implies miembro(Mariano)$
6. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Teo)) \implies \neg miembro(Victor)$
7. $(miembro(Abraham) \vee miembro(Gianluca)) \implies \neg miembro(Rodrigo)$

Solución

1. $\exists x, \exists y, \exists z, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge miembro(x) \wedge miembro(y) \wedge miembro(z))$
   Esto se puede traducir por: "Existe un conjunto de 3 personas, a las que llamaremos x, y y z, diferentes entre sí, que pertenecen a la sociedad secreta." Otra forma más natural de decir esto seria omintir el nombrado de las personas: "Existen 3 personas que pertenecen a la sociedad secreta." O, de forma aún más simple: "La sociedad secreta cuenta con, al menos, 3 personas."

2. $\neg(miembro(Ana) \wedge miembro(Gianluca))$
   "Es imposible que tanto Ana como Gianluca formen parte de la sociedad" O, dicho de otra forma: "O Ana o Gianluca no forman parte de la sociedad."

3. $(miembro(Mariano) \vee miembro(Gabriel)) \implies \forall x, miembro(x)$
   "Si Mariano o Gabriel forman parte de la sociedad, entonces todo el mundo forma parte de la sociedad."

4. $miembro(Ana) \implies miembro(Gianluca)$
"Si Ana forma parte de la sociedad, entonces Gianluca también."

5. $miembro(Carlos) \implies miembro(Mariano)$
"Si Carlos forma parte de la sociedad, entonces Mariano también."

6. $(miembro(Abraham) \lor miembro(Teo)) \implies \neg miembro(Victor)$
"Si Abraham o Teo forman parte de la sociedad, entonces Víctor no." O, dicho de otra forma: "Si Víctor forma parte de la sociedad, entonces ni Abraham ni Teo forman parte."

7. $(miembro(Abraham) \lor miembro(Gianluca)) \implies \neg miembro(Rodrigo)$
"Si Abraham o Gianluca forman parte de la sociedad, entonces Rodrigo no." O, dicho de otra forma: "Si Rodrigo forma parte de la sociedad, entonces ni Abraham ni Gianluca forman parte."

Y ahora que ya tenemos las traducciones, vamos a argumentar por qué la sociedad secreta sélo puede estar compuesta por exactamente tres miembros: Abraham, Gianluca y Teo.

Fijándonos en (2) podemos deducir que existe al menos una persona, ya sea Ana o Gianluca, que no forma parte de la sociedad secreta. Pero también sabemos, por (3), que si Mariano o Gabriel formaran parte de la sociedad, entonces todo el mundo lo haría. Por lo que, por contradicción, concluimos que:

Mariano y Gabriel no forman parte de la sociedad secreta.

Ahora consideremos que (5) implica su contrapositivo: Si Mariano no forma parte de la sociedad, entonces tampoco Carlos forma parte. Por tanto, como Mariano no forma parte de la sociedad secreta:

Carlos no forma parte de la sociedad secreta.

Después nos fijamos en (4). Vemos que si Ana formara paerte de la sociedad, entonces Gianluca también, lo cual llevaría la contraria a (2). Así que, por contradicción, concluimos que:

Ana no forma parte de la sociedad secreta.

Ahora, supongamos que Víctor forma parte de la sociedad. Entonces, según (6), ni Abraham ni Teo formarían parte. Ya sabemos que Mariano, Gabriel, Carlos y Ana no forman parte de la sociedad secreta, por lo que, si suponemos que Víctor forma parte de la sociedad entonces solo habría tres personas que podrían pertenecer a ella: Víctor, Rodrigo y Gianluca. Como indica (1), la sociedad secreta tiene que estar compuesta por al menos 3 miembros, por lo que la sociedad tendría que estar formada por exactamente estos tres. Esto demuestra:

Lema 1: *Si Víctor forma parte de la sociedad, entonces Rodrigo y Gianluca también son miembros.*

Pero observando (7), vemos que si Gianluca forma parte de la sociedad, entonces Rodrigo no puede hacerlo, por lo que:

Lema 2: *Es imposible que tanto Gianluca como Rodrigo formen parte de la sociedad.*

Por tanto, a partir del Lema 2 concluimos que el Lema 1 es falso. Por lo que, por el contrapositivo, demostramos que la hipótesis del Lema 1 es falsa. Es decir, que:

Víctor no forma parte de la sociedad secreta.

Por último, supongamos que Rodrigo forma parte de la sociedad. Entonces, por (7), ni Abraham ni Gianluca formarían parte, y ya sabemos que Mariano, Gabriel, Carlos, Ana y Víctor no forman parte tampoco. Por tanto, en esta suposición la sociedad estaría compuesta de, como mucho, dos personas (Rodrigo y Teo). Esto contradice a (1), asi que concluimos que:

Rodrigo no forma parte de la sociedad secreta.

Es decir, que las únicas personas que podrían forman parte de la sociedad son Abraham, Gianluca y Teo. Como la sociedad tiene que contar con al menos 3 miembros, podemos concluir que:

Lema 3:*No hay ninguna sociedad secreta posible excepto la compuesta por Abraham, Gianluca y Teo.*

Pero aún no hemos terminado. Nos queda demostrar que la sociedad secreta compuesta por Abraham, Gianluca y Teo satisface las 7 condiciones que hemos expuesto. Así que definamos el conjunto $A = \{Abraham, Gianluca, Teo\}$ y demostremos la siguiente proposición:

Proposición: $\{Abraham, Gianluca, Teo\}$ *es la* ***única*** *sociedad secreta que satisface las condiciones (1)-(7).*

- $|A| = 3$ (Cardinalidad de A es 3), por lo que A satisface (1).
- $Ana \notin A$, por lo que A satisface (2) y (4).
- $Mariano, Gabriel \notin A$, por lo que la hipótesis de (3) es falsa, así que A satisface (3).
- $Carlos \notin A$, por lo que A satisface (5).
- Por último, $Victor, Rodrigo \notin A$, asi que las conclusiones tanto de (6) como de (7) son ciertas, por lo que A satisface (6) y (7).

Por tanto, $\{Abraham, Gianluca, Teo\}$ satisface las condiciones (1)-(7). Antes (Lema 3) hemos demostrado que esta sociedad secreta es la única que lo hace. $\square$

Ejercicio 3

Traduzca las siguientes frases del español a lenguaje de lógica de predicados. El dominio sobre el que se trabaja es X, el conjunto de todas las personas. Puede utilizar las siguientes funciones:

- $F(x)$: indica que x ha sido estudiante de FM3.
- $S(x)$: indica que x ha sacado sobresaliente en FM3.

- $J(x)$: indica que x le ha regalado un jamón a Rodrigo.
- $E(x, y)$: indica que x e y son la misma persona.

Las frases a traducir son las que siguen:

1. Hay gente que ha sido estudiante de FM3 y ha sacado sobresaliente en FM3.
2. Todos los que han cursado FM3 y le han regalado un jamón a Rodrigo han sacado sobresaliente en FM3.
3. No hay nadie que le haya regalado un jamón a Rodrigo y que no haya sacado sobresaliente en FM3.
4. Hay al menos tres personas que le han regalado un jamón a Rodrigo y no han cursado FM3.

Solución

1. $\exists x \in X, (F(x) \wedge S(x))$
2. $\forall x \in X, (F(x) \wedge J(x)) \implies S(x)$
3. $\nexists x \in X, (J(x) \wedge \neg S(x))$
4. $\exists x, y, z \in X, (\neg E(x, y) \wedge \neg E(x, z) \wedge \neg E(y, z))$
   $\wedge (J(x) \wedge \neg F(x)) \wedge (J(y) \wedge \neg F(y)) \wedge (J(z) \wedge \neg F(z))$

Ejercicio 4

Use una tabla de verdad para demostrar si las siguientes proposicones son o no ciertas:

1. $\neg(P \vee (Q \wedge R)) = (\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
2. $\neg(P \wedge (Q \vee R)) = (\neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

Solución

1. Demostramos que el lado izquierdo:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$\neg(P \vee (Q \wedge R))$
T	T	T	T	F
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Y el lado derecho coinciden en todas las combinaciones posibles:

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg Q \vee \neg R$	$(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

2. Demostramos que el lado izquierdo:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$\neg(P \wedge (Q \vee R))$
T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	F	F	T

Y el lado derecho coinciden en todas las combinaciones posibles:

$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$\neg Q \wedge \neg R$	$(\neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg R)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

Ejercicio 5

Los conectores binarios $\wedge$ (*and*), $\vee$ (*or*) y $\implies$ (*implies*) aparecen multitud de veces en expresiones lógicas. Sin embargo, a la hora de diseñar chips y circuitos electronicos, suele ser mucho más económico construir la lógica del sistema utilizando únicamente otra operación: ***nand***, ya que ésta es más sencilla de representar en un circuito. Aquí tienes la tabla de verdad para la operación *nand*:

P	Q	P nand Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Vamos a trabajar con esta operación lógica. Para cada una de las expresiones que siguen, encuentre una expresión equivalente usando únicamente *nand* y $\neg$ (*not*), así como cualesquiera paréntesis crea necesarios para especificar el orden en el que se aplican las operaciones. Puedes utilizar A, B y los operadores tantas veces como desee:

1. $A \wedge B$
2. $A \vee B$
3. $A \implies B$

Por otra parte, como es posible expresar cualquier expresión lógica usando únicamente *nand* (sin necesidad de usar $\neg$), encuentre una expresión equivalente a $(\neg A)$ utilizando sólo *nand* y, de ser necesario, paréntesis.

Es más, incluso las constantes T y F pueden ser expresadas únicamente recurriendo a *nand*. Construya una expresión gracias a la cual, a partir de una proposición arbitraria A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre T, cualesquiera valores tome A. Construya también otra expresión que a partir de A y uno o más *nand*, dé como resultado siempre F, cualesquiera valores tome A.

Solución

Consideramos los tres casos planteados:

1. Este primer caso es automático, pues *nand* es lo opuesto a *and* ($\wedge$). Por tanto:

$$A \wedge B = \neg(A \, nand \, B)$$

2. Para este caso planteamos la tabla de verdad de $A \vee B$ frente a la de $A \, nand \, B$ y buscamos que combinación de entradas (A, B, $\neg A$ y $\neg B$) que la pueden construir:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \, nand \, B$	$(\neg A) \, nand \, (\neg B)$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F

Así que tenemos que:

$$A \vee B = (\neg A) \, nand \, (\neg B)$$

3. Para este caso, sabemos que podemos expresar la implicación de la siguiente manera:

$$A \implies B = (\neg A) \vee B$$

Y, dado que sabemos cómo expresar una unión ($\vee$) con *nand* por el punto 2, podemos expresar la implicación de la siguiente manera:

$$A \implies B = A\, nand\, (\neg B)$$

Para expresar la negación ($\neg$) planteamos una tabla de verdad únicamente con A y $\neg A$ que nos permita deducir cómo construir esta última a partir de *nand*. Pensemos en que *nand* es F si sus dos entradas son T, por lo que:

A	$\neg A$	$A\, nand\, A$
T	F	F
F	T	T

Asi que concluimos que:

$$\neg A = A\, nand\, A$$

Finalmente, para expresar las constantes T y F, recurrimos de nuevo a una tabla de verdad, esta vez mostrando A y $\neg A$, y buscando qué combinación de entradas a *nand* utilizándolas (pues ya sabemos que podemos expresar $\neg A$ como $A\, nand\, A$) nos da el resultado pedido.

Para T, buscamos que las dos entradadas a *nand* sean siempre distintas, pues eso hace el resultado siempre T:

A	$\neg A$	$(\neg A)\, nand\, A$
T	F	T
F	T	T

Con lo que:

$$T = (\neg A)\, nand\, A$$

Y, sustituyendo $\neg A$:

$$T = (A\, nand\, A)\, nand\, A$$

Para F, sabemos que la única forma de que *nand* de como resultado F es que las dos entradas sean T. Y como sabemos cómo expresar T a partir de *nand*, A y $\neg A$, concluimos que:

$$F = [(\neg A)\, nand\, A]\, nand\, [(\neg A)\, nand\, A]$$

Y, sustituyendo $\neg A$:

$$F = [(A\, nand\, A)\, nand\, A]\, nand\, [(A\, nand\, A)\, nand\, A]$$

Ejercicio 6

Dado un $x \in \mathbb{Z}$, demuestre que si $x^3 + x^2 + x$ es impar $\implies$ x es impar. £Qué tipo de demostración ha utilizado?

Solución

Utilizaremos el método del contrapositivo. Demostraremos que:

$$\text{Si } x \text{ es par} \implies x^3 + x^2 + x \text{ es par.}$$

Demostración: Si x es par, entonces $x = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

$$x^3 + x^2 + x = (2k)^3 + (2k)^2 + 2k = 8k^3 + 4k^2 + 2k = 2(4k^3 + 2k^2 + k)$$

Como $2(4k^3 + 2k^2 + k)$ es par, entonces $x^3 + x^2 + x$ es par. $\square$

Ejercicio 7

Considere las siguientes proposiciones:

- $P : (A \wedge B) \implies C$
- $Q : (\neg C \vee \neg A) \implies (\neg C \vee \neg B)$

£Cual de las siguientes opciones describe mejor la relación entre P y Q? Rodea con un círculo la respuesta correcta.

1. P y Q son equivalentes.
2. $P \implies Q$
3. $Q \implies P$
4. Ninguna de las anteriores.

Dibuje una o más tablas de verdad para ilustrar su razonamiento. Puede utilizar tantas columnas como crea conveniente.

- Si aseguramos que A va a ser siempre 1, £cuál es la nueva relación entre P y Q?
- £Y si aseguramos que B va a ser siempre 1?
- £Y si aseguramos que C va a ser siempre 1?

Solución

Dibujamos la tabla de verdad para P:

A	B	C	$A \wedge B$	P
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Dibujamos la tabla de verdad para Q:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$\neg C \wedge \neg A$	$\neg C \wedge \neg B$	Q
T	T	T	F	F	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

- Fijándonos en las dos tablas de verdad vemos que ni $P \implies Q$ ni $Q \implies P$ son ciertos. Por tanto, la respuesta correcta es la número 4.
- Para el caso en el que A sea siempre cierto observamos de nuevo las tablas de verdad de P y Q, pero ahora considerando sólo las filas en las que $A = T$. Es decir, ignorando el resto de filas. En este caso la relación es $P \implies Q$.
- Repetimos el proceso para el caso en que B sea siempre cierto, observando una vez más que la relación no es $P \implies Q$ ni $Q \implies P$.
- Finalmente, observamos las tablas para $C = T$, viendo que para este caso P y Q siguen la relación $Q \implies P$.

Ejercicio 8

Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
Stark &= \{Rob, Sansa, Arya, Bran, Rickon\} \\
Lannister &= \{Jaime, Cersei, Tyrion, Joffrey\} \\
Baratheon &= \{Robert, Stannis, Joffrey\} \\
Targaryen &= \{Daenerys\} \\
Casas &= \{Stark, Lannister, Baratheon, Targaryen\}
\end{aligned}$$

1. £Son $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ mutuamente disjuntos?
2. £Son $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ mutuamente disjuntos?
3. £Cuál es la cardinalidad de $Casas$?
4. £Cuál es el conjunto potencia de $Targaryen$?
5. Escriba el conjunto $Fanfic$, definido como $Baratheon \times Targaryen$.

Solución

1. $Stark$, $Lannister$ y $Casas$ son mutuamente disjuntos porque no tienen ningún elemento en común.
2. $Lannister$, $Baratheon$ y $Targaryen$ no son mutuamente disjuntos porque $Lannister$ y $Baratheon$ tienen en común el elemento $Joffrey$.
3. La cardinalidad de $Casas$ es 4, ya que tiene 4 elementos.
4. El conjunto potencia de $Targaryen$ es: $\mathcal{P}(Targaryen) = \{\emptyset, Daenerys\}$
5. $Fanfic = \{(Robert, Daenerys), (Stannis, Daenerys), (Joffrey, Daenerys)\}$

Tema 3: Inducción

Ejercicio 1

Considere la siguiente función:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Recurra a la inducción para demostrar que la fórmula es correcta $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como el hecho de que la siguiente ecuación sea cierta $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Caso base: $P(1)$ es cierto porque ambos lados de la ecuación valen 2.

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq 1$. Asumimos que $P(n)$ es cierto, dónde n denota cualquier entero positivo. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n+1)(n+2) \\
&= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)] + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

La primera igualdad surge de extraer el lado izquierdo $P(n)$ del lado izquierdo de $P(n+1)$. Después sustituimos el lado izquierdo de $P(n)$ por su lado derecho, y el resto de pasos son simplificaciones que acaban llevando al lado derecho de $P(n+1)$. Esto acaba con la demostración de que $P(n+1)$ es cierto, ya que tenemos como resultado la ecuación que se corresponde a $P(n+1)$. $\square$

Ejercicio 2

Considere la siguiente función, una serie geométrica:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Recurra a la inducción para demostrar que la fórmula es correcta $\forall r \in \mathbb{R}$ con $r \neq 1$.

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como el hecho de que la siguiente ecuación sea cierta $\forall r \neq 1$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base: $P(0)$ es cierto porque ambos lados de la ecuación valen 1.

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$. Asumimos que $P(n)$ es cierto, dónde n denota cualquier número natural. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}
\end{aligned}$$

La primera ecuación nace de la asunción de que $P(n)$ es cierto. Sumamos a ambos lados de la ecuación el término r^{n+1}, y el resto de pasos son simplificaciones sobre dicha ecuación. Esto acaba con la demostración de que $P(n+1)$ es cierto, ya que tenemos como resultado la ecuación que se corresponde a $P(n+1)$. $\square$

Ejercicio 3

Use la inducción para demostrar que, para todo entero positivo n, $6^n - 1$ es divisible por 5.

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como $(5|6^n - 1)\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Caso base: $P(1)$:

$$6^1 - 1 = 6 - 1 = 5$$

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq 1$. Asumimos que $P(n)$ es cierto. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$(5|6^{n+1} - 1)$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
6^{n+1} - 1 &= 6(6^n) - 1 \\
&= 6(6^n - 1) - 1 + 6 \\
&= 6(6^n - 1) + 5
\end{aligned}
$$

Por $P(n)$ sabemos que $6(6^n - 1)$ es divisible por 5, por lo que al sumarle 5 sigue siéndolo. Por tanto, $P(n+1)$ es cierto. $\square$

Ejercicio 4

Como parte de un nuevo *reality show*, un grupo de concursantes son abandonados en una isla remota. Los concursantes han estado de acuerdo en, antes de que empiece la emisión del programa, tatuarse en medio de la frente un pequeño dibujo en forma de ojo, de color rojo o morado. Ninguno de los concursantes sabe el color de su tercer ojo, ni cuántos ojos morados y rojos hay en total. En la isla no hay ningún espejo, y se prohíbe a los concursantes hablar sobre los tatuajes. Por tanto, todo el mundo sabe el color del tatuaje de todos los demás, pero no del suyo propio.

El primer día del concurso, para sorpresa de los ilusionados concursantes, el presentador se presenta ante ellos y les dice, con voz grave y misteriosa:

Contáis con provisiones para sobrevivir tantos días como personas sois.
No recibiréis más.
Al menos uno de vosotros posee un ojo púrpura.
Debéis obedecer las siguientes reglas:
1.- Los tatuados con un ojo púrpura sólo podrán abandonar la isla cuando puedan demostrar que ése es el color de su ojo.
2.- Los tatuados con un ojo rojo abandonarán la isla automáticamente cuando no quede nadie con un ojo púrpura.

El presentador, y la maligna cadena televisiva que le produce, esperan que, tras esta ominosa revelación, la convivencia entre los concursantes se vuelva imposible. Las tensiones internas deberían crear multitud de dramas personales y, en consecuencia, disparar los índices de audiencia.

Sin embargo, los creadores del programa no contaban con que todos los concursantes han cursado FM3 y son, por consiguiente, unos maestros en el uso de la lógica. Así que lo que al final sucede es que los concursantes pasan los días en alegre convivencia, hasta que un día (antes de que se acaben las provisiones), todos los que poseen un ojo púrpura demuestran esta circunstancia y abandonan la isla a la vez, terminando con el concurso.

Podemos representar esta situación con el siguiente teorema:

Teorema: Todos los concursantes con un ojo púrpura tatuado abandonan la isla el día p, dónde p es el número de concursantes con un ojo púrpura. $p \geq 1$

Demuestre, utilizando la inducción, que este teorema es cierto, al igual que hicieron los concursantes para salvar su vida. Como pista, sugerimos una hipótesis $P(n)$ que verifique que todos los siguientes casos son ciertos para el día n:

1. Si $p > n$, entonces ____
2. Si $p = n$, entonces ____
3. Si $p < n$, entonces ____

Para poder llevar a cabo la demostración deberá rellenar los espacios en blanco.

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como:

1. Si $p > n$, entonces ningún concursante con un ojo púrpura abandona aún la isla.
2. Si $p = n$, entonces todos los concursantes con un ojo púrpura abandonan la isla este día.
3. Si $p < n$, entonces ya no queda ningún concursante con un ojo púrpura en la isla.

Caso base: Tenemos que comprobar que las tres partes se dan en $P(1)$:

1. Supongamos $p > 1$: pongámonos en el lugar de un concursante con un ojo púrpura. Como el presentador ha dicho que hay al menos una persona con un ojo púrpura, y yo veo a al menos otro con un ojo púrpura (ya que $p > 1$), entonces yo no tengo por qué tener un ojo púrpura, bien podría tenerlo rojo. Así que no debo abandonar la isla.
2. Supongamos $p = 1$: pongámonos en el lugar de un concursante con un ojo púrpura. Como el presentador ha dicho que hay al menos una persona con un ojo púrpura, y yo no veo a nadie con un ojo púrpura, entonces el único con un ojo púrpura soy yo. Así que debo abandonar la isla.
3. Supongamos $p < 1$: siempre es cierto, ya que nunca se va a dar que $p < 1$ (siempre hay al menos un concursante con un ojo púrpura), y $P \implies Q$ es cierto si $P = F$.

Por tanto, $P(1)$ es cierto.

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Tenemos, sabiendo esto, que comprobar que las tres partes se dan en $P(n+1)$:

1. Supongamos $p > n+1$: como $p > n$, sabemos que nadie ha abandonado la isla aún (parte 1 de $P(n)$). Pongámonos en el lugar de todos los concursantes con un ojo púrpura. Como ven a al menos otros $n+1$ concursantes con un ojo púrpura, todos concluyen que ellos no tienen por qué tener un ojo púrpura, así que no abandonan la isla.
2. Supongamos $p = n+1$: como $p > n$, sabemos que nadie ha abandonado la isla aún (parte 1 de $P(n)$). Pongámonos en el lugar de todos los concursantes con un ojo púrpura. Como ven a exactamente otros n concursantes con un ojo púrpura, todos concluyen que ellos tienen un ojo púrpura (pues todos los demás concursantes con un ojo púrpura ven a su vez a n concursantes con el ojo púrpura), así que abandonan la isla.

3. Supongamos $p < n + 1$: aquí puede ser que $p = n$, en cuyo caso todos los concursantes con ojo púrpura habrán abandonado ya la isla (parte 2 de $P(n)$), o $p < n$, en cuyo caso no quedará ya ningún concursante con un ojo púrpura (parte 3 de $P(n)$).

Por tanto, hemos demostrado que si $P(n)$ es cierto, se cumple que $P(n) \implies P(n+1)$. $\square$

Si resulta complicado entender el razonamiento lógico que llevan a cabo los concursantes en $P(n)$, sería recomendable intentar traducirlo a $n = 2$, luego $n = 3$, y así sucesivamente, para así comprender el problema.

Por ejemplo, con $n = 2$, durante el segundo día los dos concursantes con un ojo púrpura ven exactamente a otro concursante con un ojo púrpura. En ese momento ambos saben que el total de ojos púrpura es dos, y ambos tienen un ojo púrpura. La explicación es la siguiente, desde el punto de vista de cada concursante con un ojo púrpura:

1. Si hubiera sólo un ojo púrpura, el concursante con un ojo púrpura al que veo habría abandonado la isla ayer, al no ver éste a ninguna otra persona con un ojo púrpura.

2. Si hubiera tres o más ojos púrpuras, vería a dos o más concursantes con un ojo púrpura, pero sólo veo a uno. Luego es imposible.

3. Por tanto, sólo puede haber dos ojos púrpuras, y yo soy uno de ellos.

Ejercicio 5

Use la inducción para demostrar que, para todo entero positivo n:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como el hecho de que se cumpla la igualdad del enunciado.

Caso base: $P(1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq 1$. Asumimos que $P(n)$ es cierto. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)}{(n+2)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto para todo $n \geq 1$. $\square$

Ejercicio 6

Use la inducción para demostrar que, para todo entero $n \geq 3$, $n^2 - 7n + 12$ no es negativo.

Solución

Demostración: Utilizamos inducción. Definimos $P(n)$ como $n^2-7n+12 > 0$ para todo entero $n \geq 3$.

Caso base: $P(3)$:

$$n^2 - 7n + 12 = 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$$

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq 3$. Asumimos que $P(n)$ es cierto. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$(n+1)^2 - 7(n+1) + 12 > 0$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2 - 7(n+1) + 12 &= n^2 + 2n + 1 - 7n - 7 + 12 \\
&= (n^2 - 7n + 12) + (2n - 6) \\
&\geq 2n - 6 \\
&\geq 2 \cdot 3 - 6 \leftarrow \text{Porque } n \geq 3. \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto para todo $n \geq 3$. $\square$

Ejercicio 7

Use la inducción para demostrar que, para todo entero no negativo n, tal que $n \neq 2$ y $n \neq 3$, se cumple que $n^2 \leq n!$ es cierto.

Solución

Demostración: Antes de nada, tengamos en cuenta lo siguiente:

- Si $n = 0$, entonces $0^2 = 0$ y $0! = 1$.
- Si $n = 1$, entonces $1^2 = 1$ y $1! = 1$.

Ahora utilizamos inducción para el resto de valores posibles de n. Definimos $P(n)$ como el hecho de que $n^2 \leq n!$ es cierto para todo $n \geq 4$.

Caso base: $P(4)$: $4^2 = 16$ y $4! = 24$. Por tanto: $16 < 24$

Paso inductivo: Debemos mostrar que $P(n) \implies P(n+1), \forall n \geq 4$. Asumimos que $P(n)$ es cierto. Buscamos, por tanto, demostrar que $P(n+1)$, que se puede ver a continuación, es cierto:

$$(n+1)^2 \leq (n+1)!$$

Razonamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1)n! \\
&\geq (n+1)n^2 \leftarrow \text{Por } P(n). \\
&= n^2 \cdot n + n^2 \\
&\geq 4^2 \cdot n + n^2 \leftarrow \text{Porque } n \geq 4. \\
&= 14n + 2n + n^2 \\
&= 14n + 2n + n^2 + 1 - 1 \\
&= 14n + (n+1)^2 - 1 \\
&\geq (n+1)^2
\end{aligned}$$

Por tanto, $P(n)$ es cierto para todo $n \geq 4$. □

Ejercicio 8

Cuentan las leyendas que, perdido en medio de un valle secreto en el Tíbet, yace un lugar de peregrinación y sabiduría conocido como el Templo de la Eternidad. A él acuden aquellos monjes que buscan obtener la iluminación, para así convertirse en *bodhisattvas*, seres iluminados que sienten una gran compasión por el universo. Pero para alcanzar tal estado no basta con penetrar en el Templo de la Eternidad, sino que también se deben superar las pruebas que se encuentran en su interior.

Cada vez que un monje entra en el Templo de la Eternidad se le entrega un cuenco con 15 cuentas rojas y 12 cuentas verdes. Los monjes deben entonces meditar frente al impresionante Gong del Tiempo y, cada vez que este taña, decidir entre hacer una de las siguientes dos cosas:

- **Intercambiar:** Si un monje tiene al menos 3 cuentas rojas, podrá cambiar 3 cuentas rojas por 2 cuentas verdes.
- **Permutar:** Un monje puede cambiar todas sus cuentas rojas por verdes y todas sus cuentas verdes por rojas. Es decir, que si tiene i cuentas rojas y j cuentas verdes, tras acabar de permutar tendrá j cuentas rojas e i cuentas verdes.

Un monje sólo podrá abandonar el Templo de la Eternidad cuando tenga exactamente 5 cuentas rojas y 5 cuentas verdes en su cuenco. Momento en que, suponemos, habrá alcanzado la iluminación. Represente la situación descrita mediante una máquina de estados, y más concretamente:

1. Indique cómo se pueden representar los estados de dicha máquina de estados.
2. Use la notación que ha desarrollado para representar las transiciones posibles.
3. Dibuje un diagrama que represente los primeros 3 o 4 niveles de esta máquina de estados. No olvide indicar de qué tipo es cada transición.

Pero, ąoh desgracia! La prueba a la que someten a los monjes en el Templo de la Eternidad no tiene solución, ya que el estado pedido (5 cuentas rojas y 5 verdes) viola un invariante de la máquina de estados presentada. Por tanto, deberá demostrar, utilizando la inducción, que se cumple el siguiente teorema.

Teorema 1: *Nadie abandona jamás el Templo de la Eternidad.*

Para demostrarlo, busque un invariante que se cumpla en el estado inicial y se mantenga tras cada transición, pero que no cumpla el estado que permite a los monjes salir del templo.

Aprovechando que estamos analizando la máquina de estados que representa el Templo de la Eternidad, demuestre también que se cumple el siguiente teorema:

Teorema 2: *El número de estados alcanzable en la máquina de estados del Templo de la Eternidad es finito.*

Para lograrlo, encuentre un invariante que sugiera un límite superior a la cantidad de estados alcanzables y demuestre que se cumple.

Y ahora volvamos nuestra atención de nuevo hacia los monjes. En el interior del Templo de la Eternidad el Gong del Tiempo sigue sonando, una y otra vez. Como cabría imaginar, los monjes empiezan a darse cuenta de que no importa cuántas veces intercambien o permuten sus cuentas, ąsiempre acaban repitiendo algún estado anterior!

Esto no es algo tan terrible como podría parecer, ya que esta súbita revelación hace que unos cuantos monjes alcancen la iluminación, su objetivo inicial cuando entraron en el templo. Sin embargo, para el resto las tribulaciones soportadas aún no son suficientes, y el conocimiento recién adquirido no hace sino minar su voluntad. Simplemente se deprimen. Dándose cuenta de esto, el abad del templo decide presentarse ante ellos y proponerles lo siguiente:

Si algún monje consigue visitar los 108 estados[1] *únicos en los que puede encontrarse su cuenco, entonces podrá abandonar el Templo de la Eternidad.*

£Tienen los monjes alguna oportunidad de abandonar el Templo de la Eternidad? La respuesta, desafortunadamente, es que no. Demuestre el siguiente teorema, buscando una contradicción:

Teorema 3: *No es posible visitar 108 estados distintos en la máquina de estados del Templo de la Eternidad.*

£Cuál es el máximo número de estados que se pueden alcanzar? £Cómo?

Solución

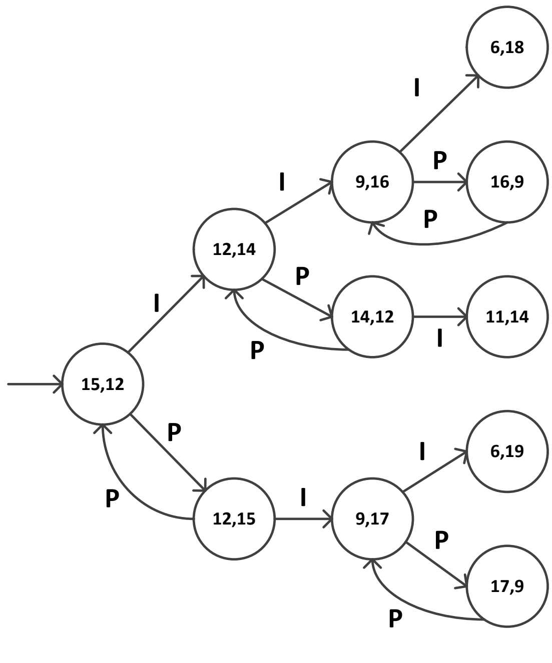
En primer lugar, veamos cómo representar la máquina de estados:

1. Podemos utilizar una variable r para representar el número de cuentas rojas, y una varible v para representar el número de cuentas verdes. Sabiendo esto, podemos representar los estados como parejas (r, v) para $r \geq 0$ y $v \geq 0$.

2. Existen dos tipos de transiciones posibles:

   - *Intercambiar*: $(x, y) \to (x - 3, y + 2), x \geq 3$
   - *Permutar:* $(x, y) \to (y, x)$

3. El diagrama de los primeros 4 niveles puede verse a continuación:



[1]108 es el número místico que representa la totalidad de la existencia, pues sus dígitos son 1, que representa una cosa; 0, que representa la nada; y 8, que representa la eternidad (el infinito). 108 fueron también las preguntas que hizo Buda, y además 108 = 42 + 24 + 42

La máquina de estados que representa el Templo de la Eternidad modela todas las formas en las que los monjes pueden cambiar sus cuentas respetando las reglas. Ahora queremos saber si dicha máquina puede alcanzar el estado $(5, 5)$. Si es así, decimos que dicho estado es *alcanzable*. Una forma bastante práctica de determinar si un estado es alcanzable o no es identificar los invariantes de la máquina de estados. En este caso el invariante es el siguiente:

En todos los estados alcanzables, el número de cuentas rojas menos el número de cuentas verdes en el cuenco de un monje sigue la fórmula $5k + 2$ o la fórmula $5k + 3$ siendo k un entero.

Este invariante lo hemos encontrado tras una observación cuidadosa del diagrama que se ha mostrado anteriormente. El siguiente paso es demostrar que dicho invariante se cumple para todos los estados alcanzables del sistema, así que recurrimos al método de la inducción.

Proposición: $P(n)$*: Tras n transiciones, en el estado (x, y), $x - y = 5k + 2$ o $x - y = 5k + 3$, siendo k un entero.*

Caso base: $P(0)$ es cierto porque para el estado $(15, 12)$, $15 - 12 = 5 \cdot 0 + 3$

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Analicemos los posible casos para el estado $P(n + 1)$, considerando que (x, y) es el estado para $P(n)$:

- Si $x \geq 3$, entonces el monje puede haber intercambiado 3 cuentas rojas por 2 cuentas verdes. Por tanto, el número de cuentas rojas menos el número de cuentas verdes es el siguiente: $(x - 3) - (y + 2) = (x - y) - 5$. Aquí tenemos dos posibilidades:

  1. Que, por $P(n)$, $x - y = 5k + 2$, en cuyo caso:
     $(x - y) - 5 = 5k + 2 - 5 = 5k - 3 = 5(k - 1) + 2 = 5k' + 2$
  2. Que, por $P(n)$, $x - y = 5k + 3$, en cuyo caso:
     $(x - y) - 5 = 5k + 3 - 5 = 5k - 2 = 5(k - 1) + 3 = 5k' + 3$

- La otra opción es que el monje haya permutado las cuentas rojas por las verdes. Si ha sucedido esto, el nuevo estado es (y, x). Aquí tenemos dos posibilidades:

  1. Que, por $P(n)$, $x - y = 5k + 2$, en cuyo caso:
     $(y - x) = -5k - 2 = 5(-k - 1) + 3 = 5k' + 3$
  2. Que, por $P(n)$, $x - y = 5k + 3$, en cuyo caso:
     $(y - x) = -5k - 3 = 5(-k - 1) + 2 = 5k' + 2$

Por tanto, en todos los casos posibles $P(n+1)$ es cierto. Por lo que $P(n) \implies P(n+1)$. Por inducción, hemos demostrado que el invariante se cumple, y como no se cumple que $0 = 5k + 2$ o que $0 = 5k + 3$, entonces el estado $(5, 5)$ no es alcanzable. Por tanto, nadie abandonará jamás el Templo de la Eternidad. Con ese nombre, deberían haberlo sospechado. $\square$

Ahora es el momento de demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2: *El número de estados alcanzable en la máquina de estados del Templo de la Eternidad es finito.*

Para demostrarlo utilizamos el siguiente invariante:

En todos los estados alcanzables, la suma de las cuentas rojas y las cuentas verdes en el cuenco de un monje ($r + v$) es como mucho 27.

Para encontrar este invariante nos hemos limitado a contar el número máximo de cuentas en el diagrama que aparecía antes. Recurrimos a la inducción para demostrar el invariante. $P(n)$ en este caso es que, tras n estados, $r+v \leq 27$.

Caso base: $P(0)$ es cierto porque para el estado $(15, 12)$, $15 + 12 = 27$

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Analicemos los posible casos para el estado $P(n+1)$, considerando que (x, y) es el estado para $P(n)$. Tenemos dos situaciones posibles:

- Si $x \geq 3$, entonces el monje puede haber intercambiado 3 cuentas rojas por 2 cuentas verdes. Por tanto, el número de cuentas rojas más el número de cuentas verdes es el siguiente: $(x - 3) + (y + 2) = (x + y) - 1$. Como por $P(n)$ sabemos que $x + y \leq 27$, entonces $(x + y) - 1 < 27$.
- La otra opción es que el monje haya permutado las cuentas rojas por las verdes. Si ha sucedido esto, el nuevo estado es (y, x). Por tanto, el número de cuentas rojas más el número de cuentas verdes es el siguiente: $y + x$. Como por $P(n)$ sabemos que $x + y \leq 27$, entonces $y + x \leq 27$.

Por tanto, en todos los casos posibles $P(n+1)$ es cierto. Por lo que $P(n) \implies P(n+1)$. Por inducción, hemos demostrado que el invariante se cumple, asi que nunca se pueden tener en total más de 27 cuentas.

Por fin estamos equipados para demostrar el teorema 2, que hay un límite superior al número de estados alcanzables en la máquina de estados. Lo demostramos por razonamiento directo. Sabemos que el máximo de cuentas es 27, y sólo hay 28 formas de que r y v sumen 27, 27 formas de que r y v sumen 26, y así sucesivamente. Por tanto, como:

$$28 + 27 + 26 + ... + 2 + 1 = \frac{29 \cdot 28}{2} = 406$$

Habrá como mucho 406 estados posibles: una cantidad finita. □

Como 406 es más que 108, los pobres monjes piensan que quizá puedan alcanzar los 108 estados pedidos. Pero no es así.

Teorema 3: *No es posible visitar 108 estados distintos en la máquina de estados del Templo de la Eternidad.*

Demostremos este teorema encontrando una contradicción. Supongamos que es posible visitar 108 estados únicos en una ejecución de la máquina de estados, y consideremos la secuencia de movimientos que sería necesario seguir para ello. Cada movimiento de la secuencia debe ser obligatoriamente un intercambio o una permutación. Al hacer una permutación la suma de cuentas rojas y verdes no cambia. Al hacer un intercambio la suma de cuentas rojas y verdes se reduce en 1:

$$(r - 3) + (v + 2) = (r + v) - 1$$

También sabemos que r tiene que ser al menos 3 para poder hacer un intercambio. Con todo esto concluimos que, como mucho, podemos hacer 25 intercambios $(27 - 2)$. Por contra, a partir de cada estado podemos hacer infinitas permutaciones, pero esto no es realmente cierto, ya que de ellas sólo una (la primera para cada estado) nos llevará a un estado no visitado. Es decir, que si en el estado k hacemos dos permutaciones consecutivas, el nuevo estado $k+2$ será el mismo que k.

Por tanto, el límite superior de estados alcanzables es $1 + 25 + 25 + 1 = 52$ (el estado inicial, 25 intercambios, 25 permutaciones, y el estado final). Como $52 < 108$, no es posible visitar 108 estados, así que ningún monje abandonará jamás el Templo de la Eternidad. $\square$

Para alcanzar estos 52 estados un monje debe empezar haciendo una permutación para alcanzar el estado $(12, 15)$, luego hacer otra permutación para volver al estado inicial, y después seguir con una serie de 25 parejas intercambio/permutación hasta llegar a $(0, 2)$, momento en el que hacer una última permutación para llegar hasta $(2, 0)$.

Ejercicio 9

Probablemente uno de los tipos de robots más populares ahora mismo en el mercado sean los robots-aspiradora. Su cometido es, como se puede deducir a partir del nombre, aspirar el polvo del suelo de una casa. Para este problema consideraremos uno de los primeros prototipos de este robot, para el cual se han programado una serie de movimientos que deberían permitirle cubrir todo el suelo de una habitación.

Desde el punto de vista del robot, la habitación es una rejilla bidimensional, siendo la posición inicial del robot $(0, 0)$, dónde el primer valor representa la coordenada x y el segundo la y. A partir de esta posición inicial, el robot puede moverse en cualquiera de las cuatro diagonales. Es decir, que puede aumentar o reducir su x en 1 y aumentar o reducir su y en 1. Es decir, que el robot no puede moverse simplemente a la derecha, izquierda, arriba o abajo, sino que tendrá que hacerlo en diagonal.

Demuestre, utilizando inducción, que éste es un mal programa para el robot, pues nunca podrá alcanzar la posición $(1, 0)$.

Solución

Representaremos el robot del problema como una máquina de estados con dos valores x, e y, que representan su posición en un momento dado. A partir de esta máquina de estados buscamos un invariante que todos los estados posibles cumplan pero que no sea posible en el estado $(1, 0)$. Para ello tenemos en cuenta algunos de los estados posibles: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$...

Vemos que, en todos ellos, la suma $x + y$ siempre es un número par, así que plantemos el siguiente invariante:

Teorema: *La suma de la coordenada x y la coordenada y del robot en un estado cualquiera siempre es par.*

En efecto, el estado $(1, 0)$ no cumple con esta condición, por lo que si podemos demostrar el invariante habremos resuelto el problema. Demostramos usando inducción.

Proposición: $P(n)$*: Tras* n *transiciones, en el estado* (x, y)*,* $x + y$ *es par.*

Caso base: $P(0)$ es cierto porque para el estado $(0,0)$, $0+0=0$, que es par.
Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Analicemos los posible casos para el estado $P(n+1)$, considerando que (x, y) es el estado para $P(n)$:

- Si el robot se mueve a $(x+1, y+1)$, la nueva suma de coordenadas es $x+y+2$, que es par, ya que $x+y$ es par.
- Si el robot se mueve a $(x+1, y-1)$, la nueva suma de coordenadas es $x+y$, que ya sabemos que es par.
- Si el robot se mueve a $(x-1, y+1)$, la nueva suma de coordenadas es $x+y$, que ya sabemos que es par.
- Si el robot se mueve a $(x-1, y-1)$, la nueva suma de coordenadas es $x+y-2$, que es par, ya que $x+y$ es par.

Por tanto, en todos los casos posibles $P(n+1)$ es cierto. Por lo que $P(n) \implies P(n+1)$.
Por inducción, hemos demostrado que el invariante se cumple. Como el estado $(1,0)$ no satisface la condición del invariante, eso hace a dicho estado inalcanzable. $\square$

Ejercicio 10

Demuestre que, para todo entero positivo n:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Solución

Demostramos usando inducción considerando como $P(n)$ la igualdad del enunciado.
Caso base: Demostramos $P(1)$:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1\cdot2\cdot3 = 6$$
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = 6$$

Paso inductivo: Asumimos que $P(n)$ es cierto. Demostramos que $P(n) \implies P(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1)(i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + (n+1)(n+2)(n+3)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$
$$= (n+1)(n+2)(n+3)(\frac{n}{4} + 1)$$
$$= (n+1)(n+2)(n+3)(\frac{n}{4} + \frac{4}{4})$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Por tanto, hemos demostrado que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Ejercicio 11

Guybrush Threepwood, Barbarrosa y Barbacoa son los tres piratas más temidos de todo el Caribe. Su base de operaciones es la isla Mêlée^{TM}. Desde ella parten a bordo de su navío que, con diez cañones por banda, viento en popa a toda vela, no corta el mar, sino vuela. Es un bajel que llaman por su bravura el "Temido", en todo el mar conocido del uno al otro confín.

Como repartir los tesoros saqueados siempre es problemático, y cada bucanero tiene sus manías, estos tres piratas han llegado a un acuerdo: Guybrush insiste en que su parte del botín tiene que ser un múltiplo de 5 doblones, Barbarrosa exige que su parte debe ser múltiplo de 7 doblones, y Barbacoa no aceptará una parte que no sea un múltiplo de 9 doblones. Para los piratas la idea de no repartir **todo** el tesoro es inconcecible. Por tanto, si tuvieran la desgracia de saquear un tesoro que no pudiera repartirse entre los 3 respetando las reglas antes nombradas, acabarían matándose entre ellos para ver quién se queda con los doblones que sobran.

Por ejemplo, si saquearan un tesoso de 12 doblones, Guybrush se quedaría 5, Barbarrosa 7 y Barbacoa 0. Sin embargo, si el tesoro fuera de 13 doblones, no habría manera de repartírselo y los piratas se matarían los unos a los otros.

Demuestre, utilizando inducción fuerte, que los piratas pueden repartirse cualquier tesoro que tenga el menos 20 doblones.

Solución

Queremos demostrar que, a partir de 20 doblones, éstos se pueden repartir de la forma indicada en el enunciado. Por tanto, para expresar esto de forma más matemática, definimos $P(n)$ como el hecho de que $\forall n \geq 20$, la siguiente función tiene soluciones con x, y y z números naturales:

$$n = 5x + 7y + 9z$$

Demostramos en primer lugar los casos base:

$$\begin{aligned}
20 &= 5 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + 9 \cdot 0 \\
21 &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \\
22 &= 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 0 \\
23 &= 5 \cdot 0 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \\
24 &= 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 0
\end{aligned}$$

Y ahora llevamos a cabo el paso inductivo para $n \geq 25$. Tenemos que demostrar que $P(n+1)$ es cierto asumiendo que $P(20), ..., P(n)$ es cierto. Como asumimos que $P(n-4)$ es cierto:

$$n - 4 = 5 \cdot x_{n-4} + 7 \cdot y_{n-4} + 9 \cdot z_{n-4}$$

Podemos demostrar que $P(n+1)$ es cierto también:

$$\begin{aligned}
n + 1 &= n - 4 + 5 \\
n + 1 &= 5 \cdot x_{n-4} + 7 \cdot y_{n-4} + 9 \cdot z_{n-4} + 5 \\
n + 1 &= 5 \cdot (x_{n-4} + 1) + 7 \cdot y_{n-4} + 9 \cdot z_{n-4}
\end{aligned}$$

Ya que si x_{n-4} es un número natural, entonces $(x_{n-4}+1)$ también lo es. $\square$

Ejercicio 12

En un valle secreto, perdido en lo más profundo de una selva sin identificar en el sudeste asiático, se libra un terrible combate a muerte entre el clan ninja Hattori y un dragón de 4 cabezas (un primo de la Hidra de Lerna). El combate se desarrolla de la siguiente forma, paso a paso:

- Las cabezas del dragón son muy educadas, y siempre esperan a que el número de ninjas sea tal que se pueda repartir de forma equitativa entre las 4. Es decir, que sólo procederán a devorar ninjas cuando el número de éstos sea múltiplo de 4. Sin embargo, una de las cabezas es vegetariana, por lo que, cuando el dragón decida devorar a los ninjas, sólo 3 cabezas se comerán a los ninjas que les corresponden. Es decir, que una cuarta parte de los ninjas no serán devorados.
- Si hay un número par de ninjas pero las cabezas no se los comen (es decir, si no son un múltiplo de 4), entonces uno de los ninjas hará sonar un silbato y aparecerán dos ninjas más.
- Si hay un número impar de ninjas, éstos considerarán que ha llegado el momento de preparar el ataque final, así que llamarán a aún más compañeros. Cada ninja actualmente en combate lanzará una bengala hacia el cielo, y dos ninjas más acudirán por cada una de estas bengalas. Desgraciadamente, siempre que se llama a ninjas utilizando bengalas uno de ellos se perderá intentando llegar. Nótese que sólo se pierde un ninja, no uno de cada dos.

Este combate puede ser representado mediante la siguiente función, que aplicamos repetidamente. El resultado de $f(n)$ es el número de ninjas en la siguiente fase del combate, siendo n el número de ninjas luchando en un momento dado:

$$f(n) = \begin{cases} n/4 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ (n+2) & \text{si } n \text{ es par pero no divisible por } 4 \\ 3n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El principio de conservación del Ninjutsu [2] dicta que los ninjas sólo podrán matar al dragón cuando quede un único ninja, que será capaz de cortar las 4 cabezas de un solo golpe (la única forma de matar al dragón, ya que las cabezas vuelven a crecer si queda alguna viva). Por lo tanto, si en algún momento queda sólo un ninja en combate, el dragón será exterminado.

Demuestre, utilizando inducción fuerte, que no importa cuántos ninjas comiencen a luchar contra el dragón, al final siempre quedará uno, que será quién derrote a la terrible criatura.

Solución

Queremos demostrar que el número de ninjas va descendiendo hasta quedar siempre uno, por tanto, definimos $P(n)$, siendo n el número de ninjas inicial, como el hecho de que sucesivas aplicaciones de $f(n)$ acaban dando como resultado 1. Demostramos utilizando inducción fuerte:

- **Caso base:** Si $n = 1$ inicialmente ya hay sólo 1 ninja, por lo que se cumple el caso base.

- **Paso inductivo:** Asumimos que para $1 \leq k \leq n$, $P(n)$ es cierto. Buscamos demostrar $P(n+1)$. Consideramos las 3 situaciones posibles para $n+1$ ninjas:

  1. $n+1$ **es divisible por 4:** En este caso $f(n+1) = (n+1)/4$, y como $(n+1)/4 < n+1$, el número total de ninjas disminuye, y como sabemos que $P(k)$ es cierto para $1 \leq k \leq n$, en este caso $P(n+1)$ es cierto.
  2. $n+1$ **es par pero no es divisible por 4:** En este caso $f(n+1) = n+3$, y en el siguiente paso tendremos que $f(n+3) = (n+3)/4$. Como $(n+3)/4 < n+1$, el número total de ninjas disminuye, y como sabemos que $P(k)$ es cierto para $1 \leq k \leq n$, en este caso $P(n+1)$ es cierto.
  3. $n+1$ **es impar:** En este caso $f(n+1) = 3(n+1) - 1 = 3n+2$, y como n es par sabemos que $3n+2$ también lo es. El siguiente paso lo podemos dividir a su vez en otros dos subcasos, por lo que tendremos que:

     a) **O** $3n+2$ **es divisible por 4:** En este caso $f(3n+2) = (3n+2)/4$, y como $(3n+2)/4 < n+1$, el número total de ninjas disminuye, y como sabemos que $P(k)$ es cierto para $1 \leq k \leq n$, en este caso $P(n+1)$ es cierto.

[2] Este principio dice que en una pelea de artes marciales existe sólo cierta cantidad de "Ninjutsu" disponible. £A qué se traduce esto? A que **un ninja** es una amenaza, pero **un ejército** de ellos son carne de cañón. Es decir, que la fuerza de cada ninja es igual a $(1/n)$ donde n es el número de ninjas que combaten.

b) **O $3n + 2$ es par pero no es divisible por 4:** En este caso $f(3n+2) = 3n+4$, y en el siguiente paso tendremos que $f(3n+4) = (3n+4)/4$. Como $(3n+4)/4 < n+1$, el número total de ninjas disminuye, y como sabemos que $P(k)$ es cierto para $1 \leq k \leq n$, en este caso $P(n+1)$ es cierto.

Hemos demostrado que $P(n+1)$ es cierto en todas las situaciones posibles. $\square$

Ejercicio 13

La función de distancia de Hamming cumple una función muy importante en la detección de errores de transmisión de información. Sirve para calcular la "distancia" o diferencia entre dos secuencias de bits de igual longitud. La función de distancia de Hamming ($H(s,t) = n$) acepta a la entrada dos secuencias (s y t) de 0s y 1s de igual longitud, y produce a la salida un número (n) que indica cuántas posiciones difieren en las dos secuencias de entrada. Por ejemplo:

- $H(11111, 00000) = 5$
- $H(11001, 00000) = 3$
- $H(01101, 01001) = 1$

1. £Cuáles son el dominio y el codominio de la función de Hamming?
2. £Es esta función inyectiva y/o sobreyectiva?
3. £Puede existir la función inversa a la función distancia de Hamming? De ser así, defina dicha función inversa.

Solución

1. El dominio de la función de Hamming es (B, B), siendo B una secuencia de bits (cuyos posibles valores son los del conjunto $b = \{0, 1\}$) de tamaño $n \in \mathbb{N}$. El codominio es $\mathbb{N}$
2. La función no es inyectiva, ya que hay más de un elemento en el dominio que lleva al mismo elemento en el codominio. Sin embargo, sí que es sobreyectiva, ya que pueden cubrirse todos los valores del codominio.
3. No existe una función inversa a la distancia de Hamming, ya que al no ser una función inyectiva tampoco es biyectiva.

Tema 4: Teoría de números

Ejercicio 1

Encuentre el $mcd(10933, 832)$.

Solución

$$
\begin{aligned}
mcd(10933, 832) &= mcd(832, res(10933, 832)) \\
10933 &= 832 \cdot 13 + 117 \rightarrow mcd(832, 117) \\
mcd(832, 117) &= mcd(117, res(832, 117)) \\
832 &= 117 \cdot 7 + 13 \rightarrow mcd(117, 13) \\
mcd(117, 13) &= mcd(13, res(117, 13)) \\
117 &= 13 \cdot 9 + 0 \rightarrow mcd(13, 0) \\
mcd(13, 0) &= 13
\end{aligned}
$$

Por tanto: $mcd(10933, 832) = 13$

Ejercicio 2

Considere la siguiente ecuación:

$$13x = 60y + 1.$$

Utilizando el algoritmo del Pulverizador, encuentre la pareja de valores x e y solución de la ecuación con la x positiva más pequeña posible. La variable y puede ser negativa. Tanto x como y deben ser enteros.

Solución

Podemos escribir $13x = 60y + 1$ como $13x - 60y = 1$, dándonos así cuenta de que x e y son una combinación lineal de 1. Planteamos el Pulverizador con $a = 60$ y $b = 13$:

a	b	res	$= a - q \cdot y$
60	13	8	$= 60 - 4 \cdot 13$
13	8	5	$= 13 - 1 \cdot 8 = 13 - 60 + 4 \cdot 13 = -60 + 5 \cdot 13$
8	5	3	$= 8 - 1 \cdot 5 = 60 - 4 \cdot 13 - 5 \cdot 13 + 60 = 2 \cdot 60 - 9 \cdot 13$
5	3	2	$= 5 - 1 \cdot 3 = 5 \cdot 13 - 60 - 2 \cdot 60 + 9 \cdot 13 = -3 \cdot 60 + 14 \cdot 13$
3	2	1	$= 3 - 1 \cdot 2 = 2 \cdot 60 - 9 \cdot 13 + 3 \cdot 60 - 14 \cdot 13 = 5 \cdot 60 - 23 \cdot 13$

Por tanto, tenemos que $x = -23$ e $y = -5$. Como queremos que $x \geq 1$, hacemos la siguiente operación:

$$1 = -23 \cdot 13 + 5 \cdot 60 = -23 \cdot 13 + 5 \cdot 60 + 60 \cdot 13 - 13 \cdot 60 = 37 \cdot 13 - 8 \cdot 60$$

Asi que la pareja buscada es $x = 37$ e $y = 8$.

Ejercicio 3

Calcule el residuo de $12^{43} \pmod{713}$.

Solución

En primer lugar, descomponemos el exponente (43) en potencias de dos:

$$43 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 32 + 8 + 2 + 1$$

Por tanto:

$$12^{43} = 12^{32} \cdot 12^8 \cdot 12^2 \cdot 12$$

Recurriendo a ellas, calculamos por fin el residuo de $12^{43} \pmod{713}$.

$$\begin{aligned}
12^2 &= 12^2 = 144 \pmod{713}\\
12^4 &= (12^2)^2 = 144^2 = 20736 \equiv 59 \pmod{713}\\
12^8 &= (12^4)^2 \equiv 59^2 = 3481 \equiv 629 \pmod{713}\\
12^{16} &= (12^8)^2 \equiv 629^2 = 395641 \equiv 639 \pmod{713}\\
12^{32} &= (12^{16})^2 \equiv 639^2 = 408321 \equiv 485 \pmod{713}\\
12^{43} &= 12^{32} \cdot 12^8 \cdot 12^2 \cdot 12 \equiv 485 \cdot 629 \cdot 144 \cdot 12 = 527152320 \equiv 48 \pmod{713}
\end{aligned}$$

Por tanto: $12^{43} \equiv 48 \pmod{713}$

Ejercicio 4

Recurriendo a la aritmética modular, demuestre que $100|(11^{10} - 1)$.

Solución

Operamos utilizando aritmética modular con módulo 100. Podemos resolver el problema de varias formas. Podemos, por ejemplo, calcular el residuo de $11^{10} \pmod{100}$ de forma directa:

$$\begin{aligned}
11^2 &= 11 \cdot 11 = 121 \equiv 21 \pmod{100}\\
11^3 &= 11^2 \cdot 11 \equiv 21 \cdot 11 = 231 \equiv 31 \pmod{100}\\
11^4 &= 11^3 \cdot 11 \equiv 31 \cdot 11 = 341 \equiv 41 \pmod{100}\\
11^5 &= 11^4 \cdot 11 \equiv 41 \cdot 11 = 451 \equiv 51 \pmod{100}\\
11^6 &= 11^5 \cdot 11 \equiv 51 \cdot 11 = 561 \equiv 61 \pmod{100}\\
11^7 &= 11^6 \cdot 11 \equiv 61 \cdot 11 = 671 \equiv 71 \pmod{100}\\
11^8 &= 11^7 \cdot 11 \equiv 71 \cdot 11 = 781 \equiv 81 \pmod{100}\\
11^9 &= 11^8 \cdot 11 \equiv 81 \cdot 11 = 891 \equiv 91 \pmod{100}\\
11^{10} &= 11^9 \cdot 11 \equiv 91 \cdot 11 = 1001 \equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}$$

También podemos recurrir a las potencias de 2. Pues sabemos que $10 = 8+2$ y, por tanto: $11^{10} = 11^8 \cdot 11^2$. Sabiendo esto, podemos calcular el residuo de 11^{10} (mód 100) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 11^2 = 11 \cdot 11 = 121 &\equiv 21 \pmod{100} \\ 11^4 = (11^2)^2 \equiv 21^2 = 441 &\equiv 41 \pmod{100} \\ 11^8 = (11^4)^2 \equiv 41^2 = 1681 &\equiv 81 \pmod{100} \\ 11^{10} = 11^8 \cdot 11^2 \equiv 81 \cdot 21 = 1701 &\equiv 1 \pmod{100} \end{aligned}$$

Para ambos casos, como $11^{10} \equiv 1 \pmod{100}$, entonces $(11^{10} - 1) \equiv 0 \pmod{100}$. Es decir, que $100|(11^{10} - 1)$. □

Ejercicio 5

Recurriendo a la aritmética modular, demuestre que $7|(2222^{5555} + 5555^{2222})$.

Solución

Operamos utilizando aritmética modular con módulo 7. En primer lugar, simplificamos las bases de las potencias a su residuo módulo 7:

$$\begin{aligned} 2222 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 5555 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 2222^{5555} + 5555^{2222} &\equiv 3^{5555} + 4^{2222} \pmod{7} \end{aligned}$$

Por el pequeño teorema de Fermat sabemos que, dado un primo p y un k que no sea múltiplo de p, se cumple que $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Por tanto, y dado que 7 es un número primo y $k_1 = 3$ y $k_2 = 4$ no son múltiplos de p, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} 3^6 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 4^6 &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

Y como:

$$\begin{aligned} 5555 &= 925 \cdot 6 + 5 \\ 2222 &= 370 \cdot 6 + 2 \end{aligned}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} 3^{5555} + 4^{2222} &\equiv (3^6)^{925} \cdot 3^5 + (4^6)^{370} \cdot 4^2 \pmod{7} \\ (3^6)^{925} \cdot 3^5 + (4^6)^{370} \cdot 4^2 &\equiv 3^5 + 4^2 \pmod{7} \\ 3^5 + 4^2 \equiv 243 + 16 \equiv 5 + 2 = 7 &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Como $3^{5555} + 4^{2222} \equiv 0 \pmod{7}$, eso implica que $7|(2222^{5555} + 5555^{2222})$. □

Ejercicio 6

Demuestre que $7^{11}|(3^{6\cdot 7^{10}} - 1)$.

Solución

Pensamos en el teorema de Euler, que dice que, dados unos k y n primos relativos: $k^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Esto mismo, escrito de otra forma:

$$n|(k^{\phi(n)} - 1)$$

Nos fijamos en que el divisor es 7^{11}, y aplicamos sobre él la función indicatriz de Euler:

$$\phi(7^{11}) = 7^{11}(1 - \frac{1}{7}) = 6 \cdot 7^{10}$$

Por tanto:

$$3^{6\cdot 7^{10}} = 3^{\phi(7^{11})}$$

Así que comprobamos que $n = 7^{11}$ y $k = 3$ son primos relativos:

$$mcd(7, 3) = 1$$
$$mcd(7^{11}, 3) = 1$$

Por tanto, hemos demostrado que podemos aplicar el teorema de Euler sobre $n =$ y $k = 3$, por lo que:

$$3^{\phi(7^{11})} \equiv 1 \pmod{7^{11}}$$
$$7^{11}|(3^{\phi(7^{11})} - 1)$$
$$7^{11}|(3^{6\cdot 7^{10}} - 1)\ \square$$

Ejercicio 7

Tenemos una hoja de papel, y se nos permite cortarla en 7 trozos distintos. Podemos repetir este proceso tantas veces deseemos. Es decir, podemos cortar uno de los 7 trozos obtenidos en otros 7, y así sucesivamente. Demuestre, utilizando artimética modular, que no se pueden lograr dividir la hoja en 1997 trozos mediante este proceso.

Solución

Cada vez que cortamos un trozo de papel en 7 estamos añadiendo 6 al total de trozos. Por tanto, todos los posibles números de trozos que puedo conseguir son congruentes entre sí módulo 6. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 7 &\equiv 1 \pmod 6 \\ 13 \equiv 7 &\equiv 1 \pmod 6 \\ 19 \equiv 13 \equiv 715 \equiv 7 &\equiv 1 \pmod 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Buscamos el residuo de 1997 (los trozos pedidos) módulo 6:

$$1997 \equiv 5 \pmod 6$$

Como el residuo es distinto a 1, eso quiere decir que es imposible conseguir 1997 trozos usando el método indicado. □

Ejercicio 8

Considere la siguiente ecuación:

$$113x = 1 - 11y.$$

Utilizando el algoritmo del Pulverizador, encuentre la pareja de valores x e y solución de la ecuación con la y positiva más pequeña posible. La variable x puede ser negativa. Tanto x como y deben ser enteros.

Solución

Podemos escribir $113x = 1 - 11y$ como $113x + 11y = 1$, dándonos así cuenta de que x e y son una combinación lineal de 1. Planteamos el Pulverizador con $a = 113$ y $b = 11$:

a	b	res	$= a - q \cdot b$
113	11	3	$= 113 - 10 \cdot 11$
11	3	2	$= 11 - 3 \cdot 3 = 11 - 3(113 - 10 \cdot 11) = -3 \cdot 113 + 31 \cdot 11$
3	2	1	$= 3 - 1 \cdot 2 = (113 - 10 \cdot 11) - (-3 \cdot 113 + 31 \cdot 11) = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11$

Por tanto, tenemos que $x = 4$ e $y = -41$. Como queremos que $y \geq 1$, hacemos la siguiente operación:

$$1 = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11 = 4 \cdot 113 - 41 \cdot 11 + 113 \cdot 11 - 11 \cdot 113 = -7 \cdot 113 + 72 \cdot 11$$

Asi que la pareja buscada es $x = -7$ e $y = 72$.

Ejercicio 9

Encuentre el inverso multiplicativo de 6 más pequeño en módulo 25.

Solución

Como el $mcd(6, 25) = 1$, sabemos que 6 y 25 son primos relativos, por lo que podemos aplicar el Teorema de Euler para hallar el inverso multiplicativo. En primer lugar calculamos la función indicatriz de Euler de 25:

$$\phi(25) = \phi(5^2) = 25\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$$

Por tanto, como $6^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$, sabemos que el inverso multiplicativo de 6 en módulo 25 es:

$$6^{\phi(25)-1} = 6^{19}$$

Para encontrar el inverso multiplicativo más pequeño, calculamos el residuo módulo 72 de 6^{19}. Descomponemos 6^{19} en potencias de 2 y operamos:

$$\begin{aligned}
6^{19} &= 6^{16} \cdot 6^2 \cdot 6 \\
6^2 &= 36 \equiv 11 \pmod{25} \\
6^4 = (6^2)^2 &\equiv 11^2 = 121 \equiv 21 \pmod{25} \\
6^8 = (6^4)^2 &\equiv 21^2 = 441 \equiv 16 \pmod{25} \\
6^{16} = (6^8)^2 &\equiv 16^2 = 256 \equiv 6 \pmod{25} \\
6^{19} &\equiv 6 \cdot 11 \cdot 6 = 396 \equiv 21 \pmod{25}
\end{aligned}$$

Por tanto, el inverso multiplicativo de 6 módulo 25 es 21.

Ejercicio 10

Encuentre el inverso multiplicativo de 13 más pequeño en módulo 56.

Solución

Como el $mcd(13, 56) = 1$, sabemos que 13 y 56 son primos relativos, por lo que podemos aplicar el Teorema de Euler para hallar el inversio multiplicativo. En primer lugar calculamos la función indicatriz de Euler de 56:

$$\phi(56) = \phi(2^3 \cdot 7) = 56\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 56\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{7}\right) = 24$$

Por tanto, como $13^{\phi(56)} \equiv 1 \pmod{56}$, sabemos que el inverso multiplicativo de 13 en módulo 56 es:

$$13^{\phi(56)-1} = 17^{23}$$

Para encontrar el inverso multiplicativo más pequeño, calculamos el residuo módulo 56 de 13^{35}. Descomponemos 13^{35} en potencias de 2 y operamos:

$$\begin{aligned}
13^{23} &= 13^{16} \cdot 13^{4} \cdot 13^{2} \cdot 13 \\
13^{2} &= 169 \equiv 1 \pmod{56} \\
13^{4} = (13^{2})^{2} &\equiv 1^{2} = 1 \pmod{56} \\
13^{8} = (13^{4})^{2} &\equiv 1^{2} = 1 \pmod{56} \\
13^{16} = (13^{8})^{2} &\equiv 1^{2} = 1 \pmod{56} \\
13^{23} &\equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 13 = 13 \pmod{56}
\end{aligned}$$

Por tanto, el inverso multiplicativo de 13 módulo 56 es el propio 13.

Ejercicio 11

Indique si la relación aCb, definida como "las personas a y b cumplen años el mismo día" es una relación de equivalencia, razonando por qué. En caso de que la respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa, indique también el número de clases de equivalencia que posee dicha relación.

Solución

Es una relación de equivalencia, ya que cumple las propiedades:

- **Reflexiva:** a cumple años el mismo día que a.
- **Simétrica:** Si a cumple años el mismo día que b, entonces b cumple años el mismo día que a.
- **Transitiva:** Si a cumple años el mismo día que b, y b cumple años el mismo día que c, entonces a cumple años el mismo día que c.

La relación tiene 365 clases de equivalencia, una para cada día del año. O, si se quieren considerar los años bisiestos, 366 clases de equivalencia.

Temas 5, 6 y 7: Teoría de grafos

Ejercicio 1

Ha llegado el tan temido momento de planear su boda. Una de las partes más conflictivas y complejas de una boda (de hecho, se trata de un problema NP completo), consiste en decidir quién se sentará en cada mesa en el banquete. En contra de lo que se podría pensar, la dificultad de este problema no reside en el tamaño de las mesas, que puede ser tan grande como se desee, sino en las "incompatibilidades" que se producen entre varios comensales.

Tras pensarlo detenidamente, ha tomado papel y lápiz y ha elaborado la siguiente lista de incompatibilidades, de tal forma que debajo de cada uno de los invitados se muestra con quién **bajo ningún concepto** dicho invitado podrá compartir mesa. Por ejemplo, la "tía Juana" jamás se sentará con "tu ex" ni con "la Charito", pues de hacerlo las consecuencias serían terribles.

A continuación se muestra la tabla completa.

Tía Juana	**Mi ex**	**La Charito**	**El jefe**
Mi ex	Tía Juana	Tía Juana	Mi ex
La Charito	El jefe	Mamá	Mamá
	Mamá	La prima moderna	Ella

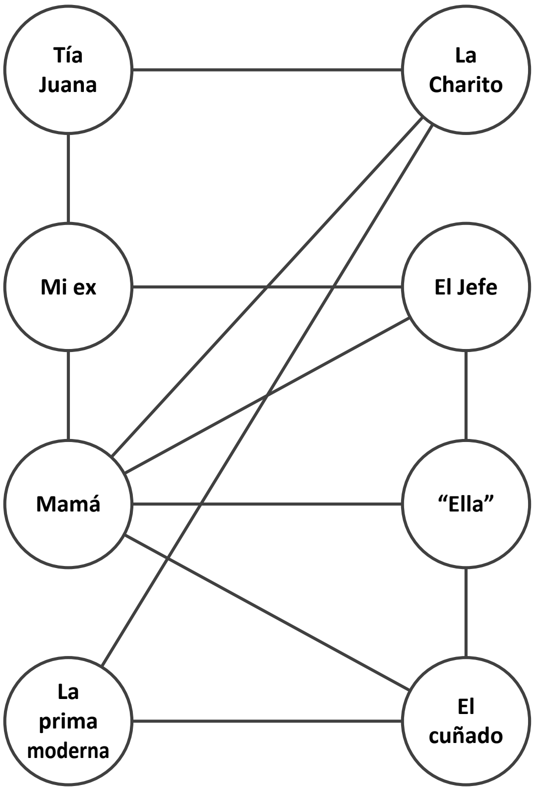
Mamá	**La prima moderna**	**"Ella"**	**El cuñado**
Mi ex	La Charito	El jefe	Mamá
La Charito	El cuñado	Mamá	La prima moderna
El jefe		El cuñado	"Ella"
"Ella"			
El cuñado			

Utilizando lo que ha aprendido de teoría de grafos, indiqué quién se sentará con quién para evitar conflictos y que la boda se desarrolle con éxito. Recurra el menor número de mesas posible, pues estamos en crisis y la empresa de cátering cobra por mesa en lugar de por cubierto.

Utilizando el algoritmo más sencillo existente, el presentado en clase. £Cuál será, en el caso peor, la cantidad máxima de mesas que tendrá que utilizar?

Solución

Podemos utilizar teoría de grafos para resolver este problema considerando a cada convidado como un vértice de un grafo, y a cada incompatibilidad como una arista de ese mismo grafo, pues une dos vértices. Sabiendo esto, podemos construir el siguiente grafo:

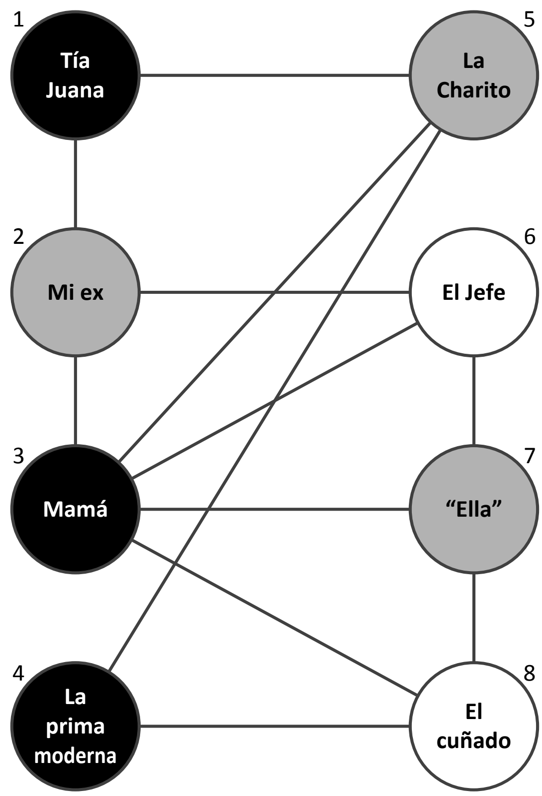


Para resolver el problema planteado (encontrar el número mínimo de mesas) podemos recurrir al coloreado de grafos, de tal manera que cada mesa de la boda sea un color. Esto es posible porque los conceptos de "color" y "mesa" son fácilmente identificables: dos vértices adyacentes no pueden compartir color, de la misma forma que dos convidados incompatibles no pueden compartir mesa.

Sabiendo esto, vamos a utilizar el algoritmo de coloreado voraz presentado en clase. La clave del éxito de este algoritmo consiste en elegir bien el orden de los vértices. Como ejemplo, nosotros impondremos el siguiente orden:

1. Tía Juana
2. Mi ex
3. Mamá
4. La prima moderna
5. La Charito
6. El Jefe
7. "Ella"
8. El cuñado

Ejecutando el algoritmo voraz sobre esta ordenación obtenemos el siguiente resultado:



Tal y como se puede ver, hemos conseguido utilizar sólo 3 colores. Y, la verdad sea dicha, 3 mesas es un banquete bastante humilde. Papá y mamá pueden estar contentos con nosotros y todos los convidados serán felices durante la cena.

Sin embargo, podríamos haber elegido otra ordenación que diera lugar al uso de más mesas, pero no debemos preocuparnos, ya que en el caso peor el algoritmo voraz usará tantos colores como el grado del vértice con el mayor grado más uno. Es decir, que en nuestro caso el máximo de colores (mesas) a utilizar sería 6, ya que el grado máximo del grafo es el de Mamá, que es 5.

Ejercicio 2

Su empresa ha sido subcontratada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, como parte de la enésima renovación del sistema educativo, para diseñar un sistema que permita asignar a alumnos a universidades. Puesto que se considera que la prueba de acceso a la universidad y la nota de corte son conceptos caducos, en su lugar se utilizarán varias listas de precedencias.

En el nuevo sistema se cuenta con N alumnos $a_1, a_2, ..., a_N$ y M universidades $u_1, u_2, ..., u_M$. Cada universidad tiene capacidad para un número concreto de alumnos n_i. Se garantiza que el número total de plazas ofrecidas por todas las universidades sigue la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N$$

De tal manera que todos los alumnos tendrán plaza en alguna universidad. Nadie podrá quedarse sin acceso a educación superior.

Cada alumno ha confeccionado una lista de preferencias por orden que contiene todas las universidades y cada universidad ha publicado una lista de preferencias por orden que contiene todos los alumnos. Los criterios utilizados para la confección de estas listas son, en el caso de los alumnos, sus deseos para el mañana (o el azar) y, en el caso de las universidades, desconocidos. En ambas listas no puede haber empates.

Su tarea será diseñar un algoritmo que asigne alumnos a universidades que cumpla con las siguientes propiedades.

1. Cada alumno es asignado a una universidad.
2. $\forall i, u_i$ tendrá asignados n_i alumnos.
3. No pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i.
4. El algoritmo es óptimo para los alumnos. Esto quiere decir que, entre todas las posibles asignaciones que cumplen con las 3 propiedades anteriores, el algoritmo elige aquella en la que el alumno acaba en la mejor universidad **posible** acorde a sus preferencias.

El algoritmo pedido debería consistir en una ligera modificación del algoritmo de cortejo que se ha visto en clase. Por facilidad de consulta, se incluye dicho algoritmo a continuación.

Algoritmo de cortejo

Condición inicial:

- N chicos.
- N chicas.
- Cada uno de los chicos tiene una lista de todas las chicas ordenada acorde a sus preferencias, y viceversa. No se permiten empates.

Cada día:

1. Cada chica espera en su balcón.
2. Cada chico va al balcón de la chica más alta en su lista que no esté tachada y se declara. Si no le quedan chicas sin tachar se va a casa a hacer deberes de matemáticas.

3. Cada chica le dice a su pretendiente favorito: "Quizá me case contigo, vuelve mañana." A los demás pretendientes les dice: "No vuelvas, nunca me casaré contigo."

4. Los pretendientes rechazados tachan a la chica de su lista.

Condición de terminación: Si durante un día cada chica tiene como mucho un pretendiente, entonces se casa con él y el algoritmo termina.

Una vez haya creado su algoritmo, demuestre sin lugar a dudas que es adecuado para las propiedades pedidas. Por tanto, debe:

- Demostrar que el algoritmo termina.
- Demostrar que cada alumno acaba asignado a una universidad.
- Demostrar que, para todo i, la universidad u_i acepta n_i alumnos.
- Demostrar que no pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i. Fíjese en que esto es equivalente al concepto de "pareja peligrosa" presentado en clase.
- Demostrar que el algoritmo es óptimo para los alumnos. Esto quiere decir que, entre todas las posibles asignaciones que cumplen con las propiedades anteriores, el algoritmo elige aquella en la que el alumno acaba en la mejor universidad **posible** acorde a sus preferencias. Para ello, pruebe a definir el concepto de "abanico de posibilidades" del alumno.

Solución

El algoritmo pedido es el siguiente:

Algoritmo de acceso a la universidad

Condición inicial:

- N alumnos.
- M universidades. Cada una de las cuales acepta a, como mucho, n_i alumnos.
- Cada uno de los alumnos tiene una lista de todas las universidades ordenada acorde a sus preferencias, y viceversa. No se permiten empates.

Cada día:

1. Cada universidad abre el proceso de admisión.

2. Cada alumno echa una solicitud en la universidad más alta en su lista que no esté tachada. Si no le quedan universidades sin tachar el alumno se va a casa a meditar sobre la vida, el futuro y el pasado que nunca volverá.
3. Cada universidad u_i le dice a sus n_i solicitantes favoritos: "Por favor, vuelva mañana, estamos procesando su solicitud." A los demás solcitantes les dice: "Lo sentimos, pero su solicitud ha sido denegada. Gracias por interesarse en nuestra universidad."
4. Los alumnos rechazados tachan a la universidad de su lista.

Condición de terminación: Si durante un día cada universidad u_i tiene como mucho n_i solicitantes, entonces les admite y el algoritmo termina.

Con el algoritmo definido, pasemos a demostrar cada una de las propiedades pedidas:

- **Demostrar que el algoritmo termina:** Vamos a demostrar que el algoritmo termina en $NM + 1$ días.

  Demostración: Si en un día concreto el algoritmo no ha terminado, eso quiere decir que alguna universidad u_i tiene más de n_i solicitantes. Eso significa que ese día al menos un alumno será rechazado y, por tanto, tachará a la universidad u_i de su lista. Como el algoritmo trabaja con N alumnos y M universidades, eso quiere decir que el algoritmo debe terminar en, como mucho, $NM + 1$ días, pues de tardar más no quedaría ningún alumno con universidades que tachar de su lista. $\square$

- **Demostrar que cada alumno acaba asignado a una universidad:** Para demostrar esta propiedad primero buscamos demostrar lo siguiente: Si durante cualquier día la universidad u_i tiene al menos n_i solicitantes, entonces cuando el algoritmo termine esa universidad aceptará a exactamente n_i alumnos.

  Demostración: En el día especificado, todos los alumnos que han echado la solicitud a la universidad u_i tienen a u_i como su universidad favorita aún sin tachar. Por tanto, si la universidad le dice a un alumno que vuelva mañana, éste lo va a hacer. Dado que la universidad u_i tiene al menos n_i solicitantes, esta universidad dirá a exactamente n_i alumnos que vuelvan mañana. Por tanto, de este día en adelante la universidad u_i siempre tendrá como mínimo n_i solicitantes, de los cuales elegirá a n_i cuando el algoritmo termine. $\square$

  Ahora ya estamos equipados para demostrar que cada alumno acaba asignado a una universidad.

  Demostración: Los alumnos no pueden echar solicitudes a más de una universidad a la vez al mismo tiempo, por lo que cada alumno acabará asignado a, como mucho, una universidad. Así que queda demostrar que cada alumno acabará asignado a, como poco, una universidad. Buscamos una contradicción.

Supongamos que el alumno a_j no ha sido admitido en ninguna universidad. Entonces, dado que el algoritmo termina cada universidad u_i aceptará a, como mucho, n_i alumnos. Para que se cumpla nuestra suposición al menos una universidad tendría que aceptar menos de n_i alumnos. La demostración inmediatamente anterior nos ha mostrado que dicha universidad u_i nunca habrá tenido n_i o más alumnos durante la ejecución del algoritmo. Pero si eso hubiera ocurrido, al echar a_j su solicitud a u_i ésta debería haber dicho al alumno que volviera otro día, y así una y otra vez hasta acabar el algoritmo. Por tanto, a_j debería haber sido asignado a u_i. Esto es una contradicción. $\square$

- **Demostrar que, para todo i, la universidad u_i acepta n_i alumnos:**

  Demostración: Dado que el algoritmo termina, tiene que existir algún día en que cada universidad u_i tenga asignados n_i alumnos. Si alguna universidad u_i tuviera asignados menos de n_i alumnos, y observando la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N$$

  Concluiríamos que algún alumno se ha quedado sin asignar a ninguna universidad, lo que contradeciría la anterior demostración. $\square$

- **Demostrar que no pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i:**

  Para poder llevar a cabo esta demostración primero tenemos que establecer una nueva propiedad. Supongamos que un día concreto la universidad u_i tiene al menos n_i solicitantes. Definimos la *posición* de un solicitante a_j con respecto a la universidad u_i como la ubicación de a_j en la lista de preferencias de u_i. Si, por ejemplo, a_j fuera el alumno favorito de la universidad su posición sería 1. Debemos demostrar que la posición del alumno menos preferido de u_i al que se le dice que vuelva al día siguiente no puede disminuir (pasando, por ejemplo, de 1000 a 1005) en ningún día futuro. Esta propiedad es análoga a la del problema del cortejo que indica que la situación para las chicas nunca puede empeorar. Hay que tener en cuenta que el alumno menos preferido de u_i puede variar de un día para otro.

  Demostración: Al avanzar al día siguiente pueden pasar una de las dos siguientes cosas:

  - u_i dice a su alumno menos favorito a_j del día anterior que vuelva al día siguiente. Esto quiere decir que a todos los $n_i - 1$ alumnos más preferidos por u_i también les dice que vuelvan al día siguiente, por lo que a_j sigue siendo el menos favorito. Por tanto, la posición del alumno menos favorito no disminuye.
  - u_i dice a su alumno menos favorito a_j del día anterior que no vuelva más. Esto quiere decir que existen al menos n_i alumnos a los que la universidad prefiere antes que a a_j, y todos ellos tienen una posición

superior a la de a_j, por lo que la posición del alumnos menos preferido no disminuye (de hecho, aumenta, aunque el alumno menos preferido haya cambiado).

Al demostrar todas las posibilidades hemos demostrado que la posición del alumno menos preferido de u_i al que se le dice que vuelva al día siguiente no puede disminuir en ningún día futuro. $\square$

Ahora ya estamos equipados para demostrar que no pueden existir dos parejas de alumnos y universidades $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ en las que a_j prefiera a u_k frente a u_l y que u_k prefiera a a_j frente a a_i.

Demostración: Buscaremos una contradicción, asumiendo que existen los $a_i - u_k$ y $a_j - u_l$ indicados. Como a_j prefiere a u_k frente a u_l pero está asignado a u_l, eso quiere decir que u_k tuvo que rechazar a a_j. En el día en el que sucedió esto tuvo que haber más de n_k solicitantes en u_k. Si a_i también era un solicitante a u_k aquel día entonces a_i habría sido rechazado también, ya que u_k prefiere a a_j frente a a_i y, por tanto, a_i no podría haber sido asignado a u_k. Por otro lado, si en cualquier día posterior a_i hubiera echado su solicitud a u_k entonces hubiera sido rechazado, ya que la posición con respecto a u_k de a_i es menor que la de a_j. Como acabamos de demostrar, la posición del solicitante menos favorito de una universidad no puede disminuir al pasar los días, por lo que es imposible que a_i fuera asignado a u_k, y tenemos una contradicción. $\square$

- **Demostrar que el algoritmo es óptimo para los alumnos:**

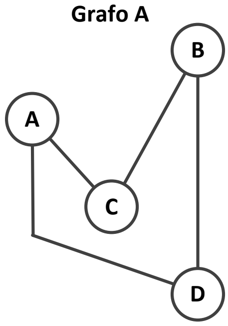
  De forma análoga a como hicimos en clase, definimos el abanico de posibilidades de un alumno como el conjunto de todas las universidades en las que, en alguno de los emparejamientos que satisfacen las propiedades antes presentadas, el alumno puede acabar asignado. Definimos la universidad óptima como la más preferida por el alumno dentro de su abanico de posibilidades.

  Demostración: Buscamos una contradicción. Definimos a_i como el primer alumno en no ser asignado a su universidad óptima, que será u_k. Eso quiere decir que, en la fecha en la que a_i fue rechazado por u_k, había otro alumno a_j al que u_k preferia antes que a a_i. Como u_k está dentro del abanico de posibilidades de a_i, entonces existe un emparejamiento de M universidades a alumnos que empareja a_i con u_k que cumple con las propiedades antes nombradas. Supongamos que M asigna a a_j a u_l, y supongamos que u_{opt} es la universidad óptima de a_j. En ese caso, dado que a_i fue el primer alumno en no ser asignado a su universidad óptima, eso quiere decir que a_j prefiere a u_k frente a u_{opt}. Al mismo tiempo, s_j prefiere a u_{opt} frente a u_l, ya que u_{opt} es su universidad favorita dentro de su abanico de posibilidades, y u_l también está en dicho abanido. Por tanto, a_j prefiere a u_k antes que a u_l. Pero en el emparejamiento M hemos encontrado unos a_i, a_j, u_k y u_l tales que a_i está asignado a u_k, a_j asignado a u_l, a_j prefiere a u_k frente a u_l y u_k prefiere a a_j frente a a_i. Esto contradice la última de las propiedades de M anteriormente demostradas. $\square$

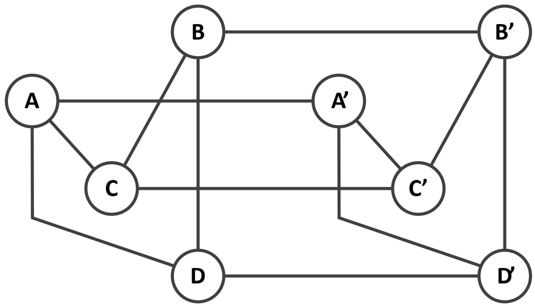
Ejercicio 3

Definimos el *doble* de un grafo como dos copias de dicho grafo con aristas adicionales uniendo los vértices correspondientes. La mejor forma de verlo es con un ejemplo. En la siguiente figura se puede ver un grafo A y su doble, el grafo B.

Grafo A



Grafo B



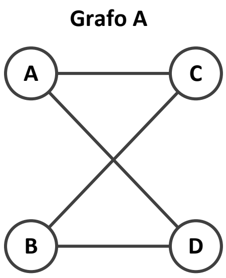
Responda a las siguientes preguntas.

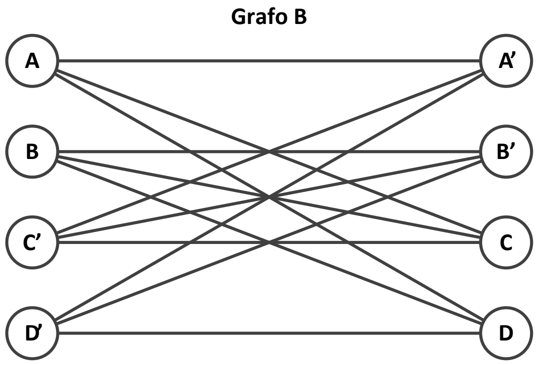
1. £Es el grafo A bipartito? De serlo, díbujelo indicando claramente qué vértices corresponden a cada parte.
2. £Es el grafo B bipartito? De serlo, dibújelo indicando claramente qué vertices corresponden a cada parte.

Solución

Para saber si un grafo es bipartito lo primero que tenemos que hacer es buscar si hay ciclos con longitud impar. De no tenerlos el grafo será bipartito. Dado que ninguno de los dos grafos A y B tienen ciclos de longitud impar, vamos a dibujarlos poniendo especial cuidado en separar bien las dos mitades. Para ello, la mejor estrategia a seguir es empezar colocando en uno de los dos lados un vértice cualquier, poner en el otro todos los vértices que sean adyacentes a él, y a partir de estos ir alternando de lado sucesivamente.

Puede verse esta aproximación para los grafos A y B en las siguientes figuras:

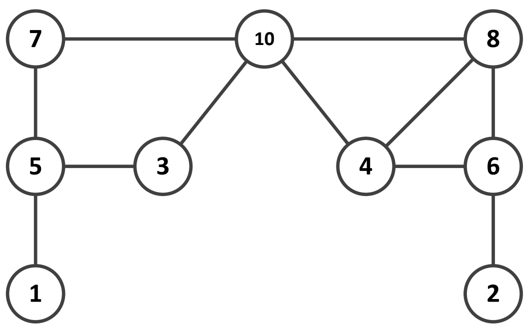




Una propiedad interesante que se deriva de este problema es que, si un grafo es bipartito, su grafo doble también lo será, pues al *doblarlo* no se crean ciclos de longitud impar.

Ejercicio 4

Observe el siguiente grafo, que representa una serie de edificios y unos puentes que los conectan.



Responda a las siguientes preguntas.

1. £Es el grafo bipartito? Justifique su respuesta.
2. £Tiene el grafo un circuito de Euler? Justifique su respuesta.

Solución

1. No puede ser un grafo bipartito, ya que tiene un ciclo de longitud impar.
2. El grafo no tiene un circuito de Euler, ya que contiene vértices de grado impar.

Ejercicio 5

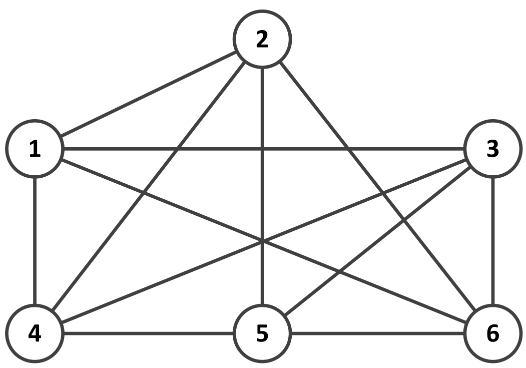
A continuación se muestra la matriz de adyacencia de un grafo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dibuje el grafo correspondiente a la matriz ilustrada. Etiquete los vértices con los números del 1 al 6 de tal forma que el vértice i se corresponda a la fila y columnas i de la matriz.
2. Definimos la *distancia* entre dos vértices como la longitud del camino más corto entre ellos. Definimos el *diámetro* de un grafo como la distancia más larga en dicho grafo £Cuál es el diámetro de este grafo? £Cómo lo ha calculado?
3. Encuentre en el grafo el ciclo de longitud más larga posible y explique por qué sabe que dicha longitud es máxima.

Solución

1. El dibujo pedido puede verse en la siguiente figura:



2. Para calcular el camino más largo tenemos que ir calculando potencias sucesivas de la matriz de adyacencia. El camino más corto entre dos vértices i y j será la potencia de la matriz en la que la celda correspondiente sea por primera vez un número distinto de cero. Es decir, que el camino más corto entre i y j tendrá longitud k si el primer x para el que $a_{ij}^{(x)}$ es distinto de 0 es k.

   Por tanto, calculamos el cuadrado de la matriz de adyacencia dada:

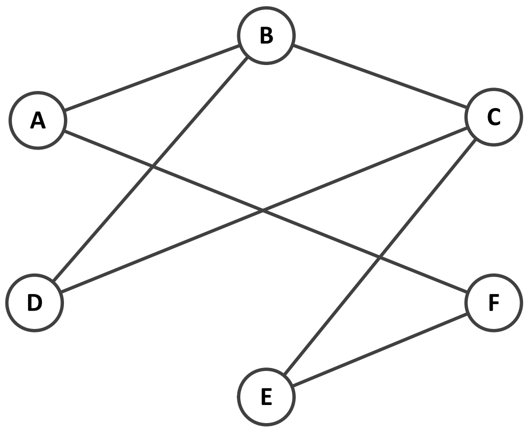
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Puesto que en esta matriz todas las celdas son distintas de 0, podemos concluir que el más largo de los caminos más cortos entre dos vértices es de longitud 2. Por tanto, el diámetro del grafo es 2.

3. El ciclo de longitud máxima en un grafo es siempre un ciclo Hamiltoniano (ya que pasa por todos los vértices). Un ejemplo de ciclo Hamiltoniano en este grafo sería $(2, 1, 3, 4, 5, 6, 2)$, cuya longitud es 6 (el número de vértices), aunque hay más caminos Hamiltonianos en el grafo dado.

Ejercicio 6

Observe el grafo simple que se muestra a continuación.



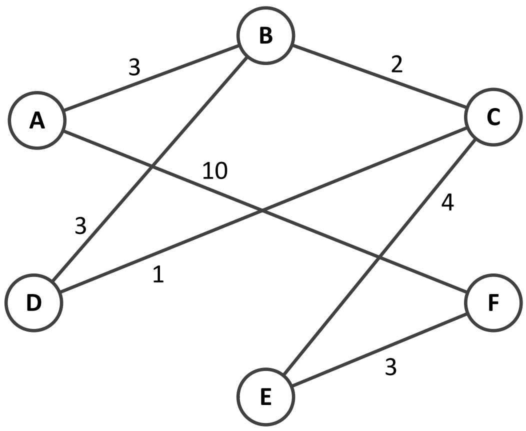
1. £Cuál es el diámetro del grafo? Recuerde, de la definición del ejercicio anterior, que el diámetro es el más largo de los caminos más cortos entre todas las parejas de vértices del grafo.

2. Encuentre un ciclo Hamiltoniano en el grafo.

3. Coloree el grafo con la menor cantidad de colores posible e indique por qué es ésa cantidad.

4. £Tiene el grafo un ciclo Euleriano?

5. Ahora considere la siguiente versión del grafo, con pesos añadidos en sus aristas:



Usando el algoritmo que se presentó en clase indique qué aristas serían elegidas para formar un MST (*Minimum Spanning Tree*). Indique también el orden en que serían elegidas.

Solución

1. El camino más corto entre D y F tiene longitud 3, y el resto de vértices que no son adyacentes tienen un vértice adyacente en común, por lo que estos caminos tendrán longitud 2. Así, el diámetro del grafo es 3.

2. Una solución posible es (A, F, E, C, D, B, A).

3. Es posible colorear el grafo con 3 colores de la siguiente manera:

   - Rojo: $\{A, D, E\}$
   - Verde: $\{B, F\}$
   - Azul: $\{C\}$

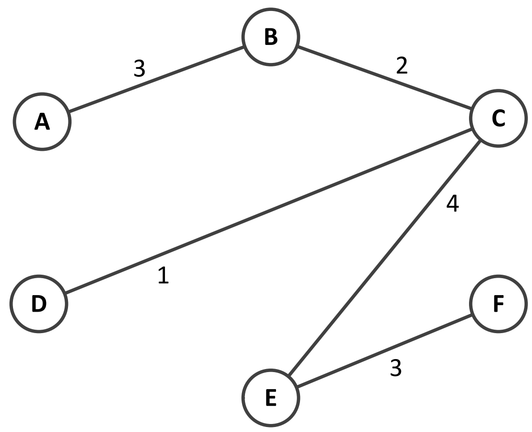
   Dado que existe un ciclo de longitud impar (B, D, C) es imposible colorear con sólo 2 colores. Por tanto, la solución dada utiliza el mínimo número de colores posible.

4. No, ya que el grafo posee vértices con grado impar: B y C.

5. Siguiendo el algoritmo presentado en clase (algoritmo de Kruskal), intentaríamos tomar siempre la arista de menor peso que haga el grafo construido siga siendo acíclico. Es decir:

   a) Tomamos la arista $C - D$.
   b) Tomamos la arista $B - C$.
   c) Tomamos la arista $A - B$ (no tomamos $B - D$ porque haría un ciclo).
   d) Tomamos la arista $E - F$.
   e) Tomamos la arista $C - E$. Aquí finaliza el algoritmo porque ya tenemos todos los vértices en el MST creado.

   El MST puede verse en la siguiente imagen:



Ejercicio 7

A continuación se muestra la matriz de adyacencia de un grafo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dibuje el grafo correspondiente a la matriz ilustrada. Etiquete los vértices con los números del 1 al 5 de tal forma que el vértice i se corresponda a la fila y columnas i de la matriz.

2. £Es el grafo dibujado dirigido? Justifique su respuesta.

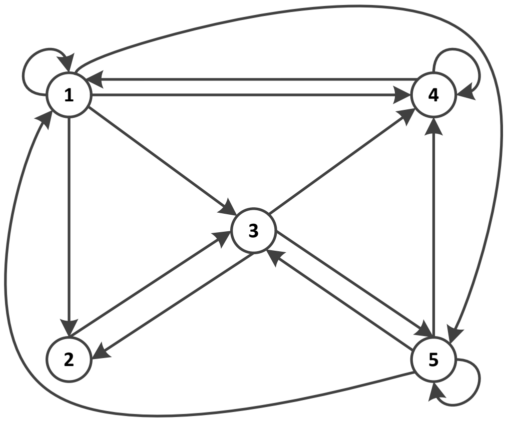
3. £Es el grafo dibujado conexo? £Y fuertemente conexo? £Por qué lo sabe?

4. £Es el grafo dibujado acíclico? Justifique su respuesta. Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, £contiene el grafo un ciclo Hamiltoniano?

5. £Es el grafo dibujado un grafo de torneo? En caso de que no lo sea, indique qué cambios habría que hacer en el grafo para que sí lo fuera.

Solución

1. El grafo pedido puede verse a continuación:



2. El grafo es dirigido, dado que la matriz no es simétrica.

3. Es conexo, ya que puede trazarse un camino simple desde cualquier vértice hasta cualquier otro. También es fuertemente conexo, pues puede trazarse un camino dirigido simple desde cualquier vértice hasta cualquier otro.

4. No, dado que contiene ciclos. El grafo contiene varios ciclos Hamiltonianos. Por ejemplo: $A - B - C - E - D - A$

5. No lo es, dado que sobran las siguientes aristas.

   - $A - A$
   - $A - D$ o $D - A$
   - $A - E$ o $E - A$
   - $B - C$ o $C - B$
   - $C - E$ o $E - C$
   - $D - D$
   - $E - E$

   Además, faltan las siguientes aristas

   - $B - D$ o $D - B$
   - $B - E$ o $E - B$

Ejercicio 8

A continuación tiene una lista de asignaturas de cierto grado de Ingeniería Biomédica, así como una serie de prerrequisitos a la hora de cursarlas. Es decir, que para poder cursar IB.A.042 es necesario haber aprobado antes IB.C.001.

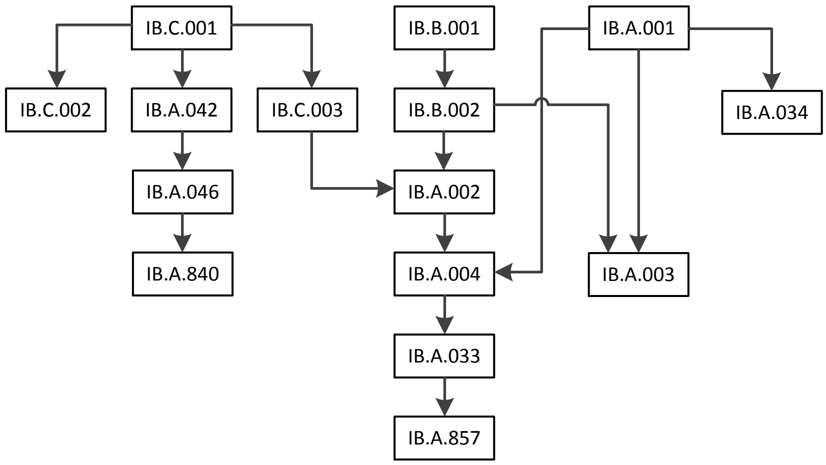
$$
\begin{array}{rr}
IB.C.001 \to IB.A.042 & IB.C.001 \to IB.C.002 \\
IB.C.001 \to IB.C.003 & IB.A.046 \to IB.A.840 \\
IB.B.001 \to IB.B.002 & IB.A.001 \to IB.A.034 \\
IB.A.042 \to IB.A.046 & IB.C.003, IB.B.002 \to IB.A.002 \\
IB.A.001, IB.A.002 \to IB.A.003 & IB.A.001, IB.A.002 \to IB.A.004 \\
IB.A.004 \to IB.A.033 & IB.A.033 \to IB.A.857
\end{array}
$$

Teniendo en cuenta las restricciones presentadas:

1. Dibuje un diagrama de Hasse para el *poset* correspondiente a las restricciones. Sea cuidadoso, ya que va a tener que usar este diagrama en los siguientes puntos.
2. Indique la cadena más larga.
3. Imagine que ha decidido convertirse en el mejor estudiante de Ingenieria Biomédica que habrá jamás y, para lograrlo, decide cursar todas las asignaturas que existen. Sabiendo que todas las asignaturas están disponibles tanto en el primer como en el segundo cuatrimestre. £Cuál es el número mínimo de cuatrimestres que tendrá que estar estudiando para conseguir su objetivo, sabiendo que en un cuatrimestre puede cursar tantas asignaturas como quiera? Asuma que es capaz de aprobar todas a la primera, que para eso va a convertirse en el mejor estudiante de Ingeniería Biomédica de la historia.
4. Indique la anticadena más larga.
5. £Cuántas asignaturas podrá cursar al mismo tiempo como máximo?
6. Identifique una ordenación topológica de las asignaturas.
7. Suponga que quiere cursar todas las asignaturas, pero que su apretada agenda sólo le permite cursar (ąy aprobar!) dos por cuatrimestre. £Cuántos años tardará en graduarse?
8. £Y si, haciendo un esfuerzo, puediera aprobar tres en cada cuatrimestre?

Solución

1. El grafo pedido puede verse a continuación:



2. Dos cadenas son las más largas:

$$IB.B.001 \preceq IB.B.002 \preceq IB.A.002 \preceq IB.A.004 \preceq IB.A.033 \preceq IB.A.857$$
$$IB.C.001 \preceq IB.C.003 \preceq IB.A.002 \preceq IB.A.004 \preceq IB.A.033 \preceq IB.A.857$$

3. Como mínimo se necesitarán 6 cuatrimestres, ya que en cada uno puede cursarse como mucho una asignatura de la cadena más larga.

4. Hay varias anticadenas de 5 elementos. Una de ellas es:

$$\{IB.C.002, IB.A.042, IB.C.003, IB.B.001, IB.A.001\}$$

5. Las asignaturas que podemos cursar al mismo tiempo forman una anticadena, por lo que, como mucho, podrán cursarse 5 asignaturas a la vez.

6. Hay muchas soluciones posibles. Una de ellas es:

$$\{IB.C.001, IB.B.001, IB.A.001, IB.C.002, IB.A.042,$$
$$IB.C.003, IB.B.002, IB.A.034, IB.A.046, IB.A.002,$$
$$IB.A.840, IB.A.004, IB.A.003, IB.A.033, IB.A.857\}$$

7. Hay 15 asignaturas, por lo que tardaremos como mínimo 8 cuatrimestres, es decir, 4 años, en graduarnos. La siguiente planificación muestra que es posible una ordenación de 8 cuatrimestres:

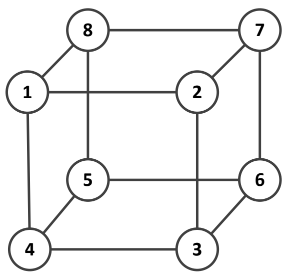
$$
\begin{array}{ll}
1: IB.C.001 & IB.B.001 \\
2: IB.A.001 & IB.C.002 \\
3: IB.A.042 & IB.C.003 \\
4: IB.B.002 & IB.A.034 \\
5: IB.A.046 & IB.A.002 \\
6: IB.A.840 & IB.A.004 \\
7: IB.A.003 & IB.A.033 \\
8: IB.A.857 &
\end{array}
$$

8. Ya hemos visto que el tiempo mínimo que se puede tardar en cursar todas las asignaturas es 6 cuatrimestres, es decir, 3 años. La siguiente planificación muestra que es posible una ordenación de 6 cuatrimestres:

$$
\begin{array}{lll}
1: IB.C.001 & IB.B.001 & IB.A.001 \\
2: IB.A.042 & IB.C.003 & IB.B.002 \\
3: IB.C.002 & IB.A.046 & IB.A.002 \\
4: IB.A.004 & IB.A.004 & IB.A.034 \\
5: IB.A.840 & IB.A.033 & \\
6: IB.A.857 & &
\end{array}
$$

Ejercicio 9

Considere el siguiente dibujo de un grafo:



Responda a las siguientes preguntas, justificando su respuesta:

1. £Tiene el grafo un Ciclo Hamiltoniano?
2. £Tiene el grafo un Circuito de Euler?

3. £Es el grafo bipartito?

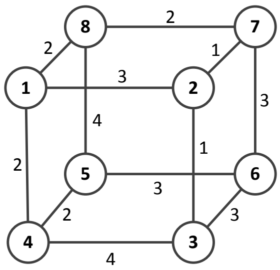
4. £Cuál es el número mínimo de colores con los que puede colorearse el grafo?

5. Dibuje el grafo para demostrar que es planar.

6. Dibuje la matriz de adyacencia del grafo.

7. Definimos la *distancia* entre dos vértices como la longitud del camino más corto entre ellos. Definimos el *diámetro* de un grafo como la distancia más larga en dicho grafo £Cuál es el diámetro de este grafo? Recurra a la matriz de adyacencia para calcularlo.

8. Asignamos los siguientes pesos a las aristas del grafo:



Dibuje, usando el algoritmo presentado en clase, un *Minimum Spanning Tree* del grafo.

Solución

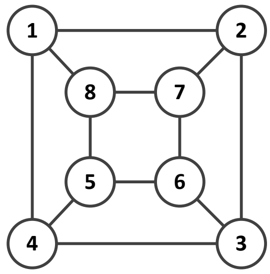
1. Sí tiene un Ciclo Hamiltoniano: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1)$.

2. No tiene un Circuito de Euler, ya que tiene vértices con grado impar.

3. Sí es bipartito, ya que no tiene ciclos de longitud impar.

4. Puede colorearse con tan sólo dos colores, ya que es un grafo bipartito.

5. El grafo es planar, una representación que lo deja claro puede verse a continuación:



6. La matriz de adyacencia del grafo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Calculamos la matriz de adyacencia al cuadrado:

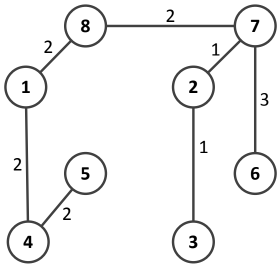
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Como quedan 0s sin "limpiar", calculamos la matriz de adyacencia al cubo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como ya hemos "limpiado" todos los 0s, concluimos que el diámetro del grafo es 3, la potencia a la que hemos elevado la matriz de adyancencia.

8. El *Minimum Spanning Tree* pedido se puede ver a continuación:



Ejercicio 10

Antes de que los ordenadores binarios se impusieran como el estándar en computación, se consideraron otras alternativas, una de las cuales fue el sistema ternario, en el cual la información se codifica en forma de *trits*, que pueden almacenar uno de los siguientes tres valores: 0, +1 y -1. El sistema ternario se mostró muy útil para realizar ciertas operaciones matemáticas, debido a que el cambio de signo era tan sencillo como cambiar todos los trits con un -1 por un +1, y viceversa. De esta forma, el manejo de enteros con signo no requería de una codificación especial, y además hacer una resta era tan sencillo como efectuar un cambio de signo y luego llevar a cabo una suma. Los defensores de este sistema argumentan que esta estructura hace los cálculos con un ordenador de este tipo muy intuitivos, además de presentar una tercera alternativa a la lógica tradicional de verdadero/falso, una especie de "quizás" que facilita en gran medida la representación de la lógica borrosa.

Por diversas razones, la más importante el menor precio de los componentes electrónicos binarios, los ordenadores ternarios no son más que un pie de página en los libros de historia. Pero, en su recuerdo, les dedicamos este problema.

Definimos el conjunto T como todos los estados posibles en los que se encuentra un trit: 0, +1 y -1.

Responda a las siguientes preguntas:

1. £Cuál es la cardinalidad del conjunto T? £Y la del conjunto potencia de T? Definimos Y como el conjunto de todas las posibles secuencias de 8 trits, es decir, un tryte. £Cuál es la cardinalidad de Y? £Y la del conjunto potencia de Y?

2. £Cuántos valores distintos se pueden almacenar en un tryte? £Cuántos bits serían necesarios para almacenar al menos la misma información que un trit (tenga en cuenta que no puede usar fracciones de bit)? £Y para almacenar al menos la misma información que un tryte?

3. Deseamos diseñar un conversor que transforme un trit en un bit, para ello lo que hacemos es convertir un trit de valor 0 en un bit de valor 0, y un trit de valor +1 o -1 en un bit de valor 1. Si consideramos esta transformación como una función, £cuáles son su domino y su codominio? £Es esta función inyectiva? £Es sobreyectiva? £Es biyectiva? £Puede existir la función inversa a ésta?

4. Definimos la relación $\leq$ (menor o igual) para comparar trits, de tal manera que:

$$
\begin{array}{ll}
-1 \leq 0 & 0 \not\leq -1 \\
0 \leq +1 & +1 \not\leq 0 \\
-1 \leq +1 & +1 \not\leq -1 \\
-1 \leq -1 & \\
0 \leq 0 & \\
+1 \leq +1 &
\end{array}
$$

La relación dada ($\leq$), £es antisimétrica? £Es reflexiva? £Es irreflexiva? £Es transitiva? £Es una relación de orden parcial?

Solución

1. La cardinalidad de T es 3, ya que tiene 3 elementos. La del conjunto potencia de T es $2^3 = 8$. La cardinalidad de Y es $3^8 = 6561$, ya que éste es su número de elementos. La cardinalidad de su conjunto potencia es, por tanto, 2^{6561}.

2. En un tryte se pueden almacenar tantos valores como la cardinalidad de Y, es decir, 6561. Para almacenar la información equivalente a un trit (3 valores) se necesitan 2 bits, que pueden almacenar hasta 4 valores. Para almacenar la información equivalente a un tryte (6561 valores) se necesitan 13 bits, que pueden almacenar hasta 8192 valores.

3. El domino es el conjunto $Q = \{0, +1, -1\}$, y el codominio el conjunto $B = \{0, 1\}$. La función no es inyectiva, ya que los elementos +1 y -1 del dominio se corresponden con el elemento 1 del codominio. Sí que es sobreyectiva, pues todos los elementos del codominio son cubiertos por la función. Al no ser inyectiva no es biyectiva y, por tanto, tampoco existe la función inversa.

4. Analizamos las propiedades pedidas:

   - **Antisimétrica:** Sí, dado que $\forall x, y \in Q$:, si $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$.
   - **Reflexiva:** Sí, ya que $\forall x \in Q \implies x \leq x$:
   - **Irreflexiva:** No, ya que es reflexiva.
   - **Transitiva:** Sí, ya que $\forall x, y, z \in Q$:, si $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$.

   La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, por lo que es una relación de orden parcial débil.

Tema 8: Combinatoria

Ejercicio 1

En este problema utilizará lo que ha aprendido sobre combinatoria para meditar sobre la peculiar palabra inglesa $BOOKKEEPER$.

Responda a las siguientes preguntas:

1. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $POKE$?

2. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra BO_1O_2K? Fíjese en que hemos puesto un subíndice en las Os para indicar que las consideramos letras distintas.

3. Vamos a hacer un mapeo de las ordenaciones de las letras de BO_1O_2K a las ordenaciones de las letras de $BOOK$ (sin subíndices). Indique utilizando flechas este mapeo en los ejemplos que se encuentran a continuación. La columna de la izquierda contiene ordenaciones de BO_1O_2K y la de la derecha de $BOOK$.

O_2BO_1K	
KO_2BO_1	BOOK
O_1BO_2K	OBOK
KO_1BO_2	KOBO
BO_1O_2K	
BO_2O_1K	

4. £Qué clase de función de mapeo es ésta, atendiendo a la regla de la división? £Es una función biyectiva?

5. Usando la regla de la división, calcule de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOK$.

6. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $KE_1E_2PE_3R$?

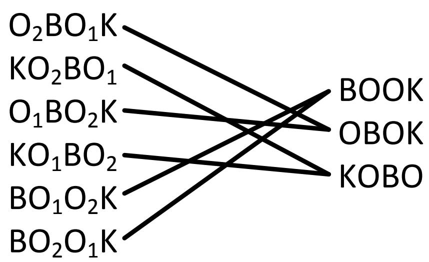
7. Suponga que, de forma análoga a como hemos trabajado con $BOOK$, definimos un mapeo de las ordenaciones de las letras de $KE_1E_2PE_3R$ a las ordenaciones de las letras de $KEEPER$ (sin subíndices). Enumere todas las ordenaciones de $KE_1E_2PE_3R$ posibles que se corresponden con $REPEEK$ en este mapeo.

8. £Qué clase de función de mapeo es ésta, atendiendo a la regla de la división?

9. Sabiendo esto, £de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $KEEPER$?
10. Por fin está preparado para enfrentarse a $BOOKKEEPER$. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BO_1O_2K_1K_2E_1E_2PE_3R$?
11. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOK_1K_2E_1E_2PE_3R$?
12. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOKKE_1E_2PE_3R$?
13. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $BOOKKEEPER$?
14. £De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra $VOODOODOLL$?

Solución

1. Hay 4! formas de ordenar las letras, que se corresponden con las 4! permutaciones del conjunto $\{P, O, K, E\}$.
2. Exactamente igual que antes, hay 4! formas de ordenar las letras, que se corresponden con las 4! permutaciones del conjunto $\{B, O_1, O_2, K\}$.
3. El mapeo quedaria de la siguiente forma:



4. Es una función $2 - a - 1$, por lo que no es biyectiva.
5. Usando la regla de la división y sabiendo las formas de ordenar las letras de BO_1O_2K, deducimos que la solución es: $4!/2$
6. Hay 6! formas de ordenar las letras, que se corresponden con las 6! permutaciones del conjunto $\{K, E_1, E_2, P, E_3, R\}$.
7. Las ordenaciones son: $RE_1PE_2E_3K$, $RE_1PE_3E_2K$, $RE_2PE_1E_3K$, $RE_2PE_3E_1K$, $RE_3PE_1E_2K$ y $RE_3PE_2E_1K$.
8. Es una función $3! - a - 1$, ya que 3! son las permutaciones de $\{E_1, E_2, E_3\}$

9. Como hay 6! formas de ordenar $\{K, E_1, E_2, P, E_3, R\}$ y el mapeo es $3! - a - 1$, utilizando la regla de la división sabemos que la cantidad pedida es: $6!/3!$

10. Hay 10! formas de ordenar las letras.

11. Usando la regla de la división y utilizando el primero de los mapeos que hemos desarrollado antes (el de las Os), sabemos que la solución es: $10!/2$

12. Usando la regla de la división, el primero de los mapeos desarrollados antes y uno análogo con las Ks, sabemos que la solución es: $10!/(2 \cdot 2)$

13. Usando la regla de la división y utilizando los dos mapeos anteriores, así como el desarrollado para las Es, la solución es: $10!/(2 \cdot 2 \cdot 3!)$

14. Análogamente al apartado anterior, la solución es: $10!/(2 \cdot 2 \cdot 5!)$

Fíjese en que las soluciones a los últimos apartados son eequivalentes a usar el coeficiente multinomial: n_1 copias del elemento l_1, n_2 copias del elemento l_2, ..., n_k copias del elemento l_k. Es decir:

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k}$$

Ejercicio 2

Solucione los siguientes problemas utilizando el principio del palomar. Para cada problema identifique las *palomas*, los *palomares* y la *regla* o *mapeo* que asigna a cada paloma a su palomar.

1. Demuestre que si en una habitación hay 500 personas, entonces al menos 2 cumplen años el mismo día.

2. Sabiendo que en ingeniería en el CEU hay matriculados 115 alumnos y que los DNIs tienen 8 cifras, si sumamos los dígitos del DNI de cada alumno, £habrá dos con la misma suma?

3. En todos los conjuntos de 100 enteros tienen que existir al menos dos cuya diferencia sea un múltiplo de 37.

Solución

1. Las palomas son las personas. Los palomares son los 366 posibles días del año (ąno nos olvidemos de los años bisiestos!). Mapeamos a cada persona con el día de su cumpleaños. Como hay 500 personas y 366 días, según el principio del palomar al menos dos personas tienen que cumplir años el mismo día. □

2. Sí, habrá al menos dos estudiantes con la misma suma. Las palomas son los estudiantes, y las posibles sumas de 8 números entre 0 y 9 los palomares. Mapeamos a cada estudiante con la suma de las 8 cifras de su DNI. Cada suma puede oscilar entre 0 y $8 \cdot 9 = 72$, lo que quiere decir que tenemos 72 palomares. Dado que hay más palomas que palomares. deberá haber al menos dos estudiantes con la misma suma.

3. Las palomas son los 100 enteros. Los palomares son los números entre el 0 y el 36. Vamos a mapear cada entero k al residuo de $k \pmod{37}$. Como hay 100 palomas y sólo 37 palomares, al menos 3 palomas tendrán que acabar en el mismo palomar. Por tanto, existirán dos números k_1 y k_2 cuyos residuos módulo 37 sean iguales, por lo que $k_1 \equiv k_2 \pmod{37}$, lo que implica que $k_1 - k_2$ es un múltiplo de 37.

Ejercicio 3

Volvamos, como no podría ser de otra manera, a hablar de donuts. £Cuántas combinaciones de 12 donuts podemos elegir si tenemos a nuestra disposición 4 variedades distintas? Las variedades son "azucarado", "chocolate", "limón", y "crema". Defina un mapeo $1 - a - 1$ (una función biyectiva).

Solución

Utilizaremos un mapeo muy similar al que vimos en clase, en el que el número de 0s indica cuántos donuts de una variedad escogemos y el 1 sirve de separador entre variedades. El orden que imponemos a las variedades es el mismo que se indica en el enunciado, es decir: azucarado, chocolate, limón, y crema. Así que tenemos:

$$(0s\ azucarado)1(0s\ chocolate)1(0s\ limon)1(0s\ crema)$$

Por tanto, las posibles elecciones son equivalentes a una secuencia de 15 bits con exactamente tres 1s:

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!}$$

Ejercicio 4

En el Colegio Mayor Universitario de San Pablo CEU en Madrid es costumbre asignar a los novatos las tareas menos agradecidas, para que así los recién llegados se curtan y, de paso, acumulen inquina para a su vez torturar a las generaciones venideras.

En un momento dado en el colegio mayor hay 8 novatos, a los que el resto de estudiantes se refieren cariñosamente como $N_1, N_2, ...N_8$. A cada novato se le asigna una tarea: 2 deben lavar los platos, 2 deben limpiar la cocina, 1 debe limpiar los baños (ąpobre!), 1 debe limpiar las zonas comunes y 2 deben servir la cena. £De cuántas formas distintas pueden distribuirse los trabajos entre los novatos?

Solución

Asignamos a cada tarea una letra:

- **P:** limpiar los platos. 2 novatos.
- **C:** limpiar la cocina. 2 novatos.
- **B:** limpiar los baños. 1 novato.

- **Z:** limpiar las zonas comunes. 1 novato.
- **S:** servir la cena. 2 novatos.

Utilizando esta nomenclatura, resolvemos el siguiente coeficiente multinomial, siendo n el número de novatos, y n_X el número de novatos asignados a la tarea X:

$$\binom{n}{n_P, n_C, n_B, n_Z, n_S} = \binom{8}{2, 2, 1, 1, 2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$$

Ejercicio 5

Vamos a mezclar dos barajas de 52 cartas completamente indistinguibles una de la otra. £De cuántas formas pueden ordenarse las cartas de esta nueva baraja compuesta de las dos anteriores?

Solución

Tras unir las dos barajas tenemos 104 cartas, con dos copias de cada carta. Es decir, que tenemos 2 copias de los elementos c_1, c_1, ..., c_{52}. Definimos n_X como el número de copias de la carta X, siendo n_X en este caso siempre 2.

Sabiendo todo esto resolveremos el siguiente coeficiente multinomial:

$$\binom{104}{n_1, n_2, ..., n_{52}} = \frac{104!}{(2!)^{52}}$$

Ejercicio 6

El idioma Hawaiano ('olelo Hawai'i) es una lengua muy particular, ya que cuenta con tan sólo 8 consonantes, pero al mismo tiempo tiene 25 vocales (incluyendo vocales largas y diptongos). Además, en Hawaiano todas las palabras deben acabar en una vocal y no deben tener dos o más consonantes seguidas. Vamos a suponer que todas las palabras que cumplen con estas condiciones son válidas.

Nos gustaría saber cuántas palabras de n fonemas hay en Hawaiano. A efectos de este problema definiremos fonema como una única vocal o consonante, no pudiendo un fonema ser una vocal y una consonante a la vez. Para hacer las cosas más sencillas asumiremos que n es par.

1. En primer lugar averigüe cuántas palabras podemos crear con exactamente 4 fonemas. Tenga en cuenta las distribuciones de vocales y consonantes posibles.

2. Ahora consideramos el caso general. Definimos A como el conjunto de todas las palabras de n fonemas, y A_k como el conjunto de todas las palabras de n fonemas con exactamente k consonantes. Exprese $|A|$ en términos de $|A_k|$ para todos los k posibles.

3. Suponga, hasta que se le indique lo contario, que el Hawaiano sólo tiene un tipo de consonante y un tipo de vocal. Ahora debemos encontrar $|A_k|$ para una k cualquiera. Encuentre una función biyectiva entre A_k (recuerde, por ahora con sólo un tipo de vocal y un tipo de consonante) y conjunto de secuencias de 0s y 1s de longitud p.

4. Usando esta función biyectiva, calcule $|A_k|$.
5. Dejemos a un lado nuestro Hawaiano simplificado y volvamos al real. £Cómo cambiaría la expresión para calcular $|A_k|$ que ya ha obtenido para permitir 8 consonantes y 25 vocales, y no sólo un tipo de cada?
6. Finalmente, ya puede calcular el número de palabras con n fonemas que existen en Hawaiano. £Cuál es?

Solución

1. Como una consonantes no puede aparecer al final de una palabra y dos consonantes no pueden ir seguidas (o, dicho de otra forma, toda consonante debe ir seguida de una vocal), tenemos las siguientes combinaciones de vocales y consonantes:

   $$VVVV,\ VVCV,\ VCVV,\ CVVV,\ CVCV$$

   Como estas configuraciones son mutuamente excluyentes, podemos encontrar el número de palabras de cada una de las 5 configuraciones y sumarlas. Usando la regla del producto para cada configuración vemos que el total de palabras de 4 fonemas es:

   $$25^4+25^2\cdot 8\cdot 25+25\cdot 8\cdot 25^2+8\cdot 25^3+8\cdot 25\cdot 8\cdot 25 = 25^4+3\cdot 25^3\cdot 8+8^2\cdot 25^2 = 805625$$

2. Sabemos que k puede variar entre 0 y $n/2$, ya que cada consonante debe ir seguida de una vocal. Como el conjunto de palabras con k consonantes y el conjunto de palabras con j consonantes son disjuntos, podemos usar la regla de la suma para calcular $|A|$:

   $$|A| = \sum_{k=0}^{n/2} |A_k|$$

3. Como cada consonante debe ir seguida de una vocal, podemos agrupar cada consonante y la vocal que la sigue en una única agrupación. Si en una palabra hay k consonantes, entonces también habrá k agrupaciones. Como no hay ninguna otra restricción en la forma en la que se distribuyen estas agrupaciones, podemos mapear cada agrupación a un 0 y cada vocal suelta (que no está en una agrupación) a 1. Al haber hecho esta agrupación ya hay k vocales de las que no tenemos que preocuparnos, dado que el número de consonantes es igual al de agrupaciones. Por tanto, la secuencia de 0s y 1s resultante tiene longitud $n-k=p$.
4. El número de secuencias de k 0s y $n-2k$ 1s es:

   $$\binom{n-k}{k} = \binom{n-k}{n-2k}$$

5. Cada palabra en A_k es una secuencia de Vs y Cs en la que cada V indica una vocal y cada C una consonante. La cantidad de estas secuencias que existe, como acabamos de calcular, es $\binom{n-k}{k}$.

   Como cada una de estas secuencias tiene k Cs y $n-k$ Vs, habrá $8^k \cdot 25^{n-k}$ palabras distintas que podamos mapear a la misma secuencia de Vs y Cs. Es decir, que tenemos un mapeo de $(8^k \cdot 25^{n-k}) - a - 1$, por lo que aplicando la regla de la división:

$$|A_k| = \binom{n-k}{k} \cdot 8^k \cdot 25^{n-k}$$

6. A partir de:

$$|A| = \sum_{k=0}^{n/2} |A_k|$$

   Y:

$$|A_k| = \binom{n-k}{k} \cdot 8^k \cdot 25^{n-k}$$

   Tenemos que:

$$|A| = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n-k}{k} \cdot 8^k \cdot 25^{n-k}$$

Ejercicio 7

Supongamos que queremos ir del punto (0,0,0) en el plano tridimensional al punto (10,20,30). Podemos movernos dando pasos discretos en los que avanzamos 1 en una de las tres coordenadas, sin modificar las otras dos. £Cuántos caminos diferentes podemos recorrer?

Solución

Para llegar a nuestro destino tendremos que haces siempre 10 movimientos en el eje X, 20 en el Y y 30 en el Z. Por tanto, podemos definir una función biyectiva entre el conjunto de todos los caminos posibles y el de todas las cadenas de texto compuestas por exactamente 10 Xs, 20 Ys y 30 Zs. En este mapeo el camino será el equivalente a leer la cadena de texto de izquierda a derecha.

Como el número de cadenas de texto que cumplen estas condiciones es:

$$\binom{60}{10, 20, 30} = \frac{60!}{10! \cdot 20! \cdot 30!}$$

Ésa será también la cantidad de caminos posibles.

Ejercicio 8

Se diseña un robot capaz de moverse por un plano tridimensional, y éste debe ir del punto (0,0,0) al punto (30,30,30). Dicho robot puede llevar a cabo los siguientes movimientos:

1. Moverse en el eje x: moverse de (x,y,z) a (x+1,y,z)
2. Moverse en diagonal en los ejes x e y: moverse de (x,y,z) a (x+1,y+2,z)
3. Moverse en diagonal en los ejes y y z: moverse de (x,y,z) a (x,y-1,z+3)

£Cuántos caminos diferentes puede recorrer el robot hasta llegar a su destino?

Solución

Para llegar a nuestro destino tendremos que haces siempre 10 movimientos de tipo 1, 20 movimientos de tipo 2, y 10 movimientos de tipo 3. Por tanto, podemos definir una función biyectiva entre el conjunto de todos los caminos posibles y el de todas las cadenas de texto compuestas por exactamente 10 As, 20 Bs y 10 Cs. En este mapeo el camino será el equivalente a leer la cadena de texto de izquierda a derecha.

Como el número de cadenas de texto que cumplen estas condiciones es:

$$\binom{40}{10, 20, 10} = \frac{40!}{10! \cdot 20! \cdot 10!}$$

Ésa será también la cantidad de caminos posibles.