CEU
Universidad San Pablo

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Usted es matemático, ¿verdad?

Dr. D. Pablo Arés Gastesi
Coordinador Programa Internacional CEU Chicago

Universidad CEU San Pablo
Festividad de San Vicente Ferrer
Abril de 2016

CEU Ediciones

Usted es matemático, ¿verdad?

Dr. D. Pablo Arés Gastesi
Coordinador Programa Internacional CEU Chicago

Universidad CEU San Pablo
Festividad de San Vicente Ferrer
Abril de 2016

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad CEU San Pablo

Usted es matemático, ¿verdad?

CEU *Ediciones*
Julián Romea 18, 28003 Madrid
Teléfono: 91 514 05 73, fax: 91 514 04 30
Correo electrónico: ceuediciones@ceu.es
www.ceuediciones.es

Maquetación: Luzmar Estrada Seidel (CEU Ediciones)

Depósito legal: M-8919-2016

Índice

“*The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality*”.

David Hilbert

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar, a la profesora Mª del Carmen Calderón, Decana de la Facultad, y a su equipo decanal, la confianza depositada en mí para impartir esta Lección. Espero estar a la altura de sus esperanzas, o al menos lo suficientemente cerca para que no arrepientan de por vida. Así mismo me gustaría agradecer a aquellas personas que sabían sobre esto hace bastante tiempo y que, ante mis dudas, me animaron y confiaron en mí.

Y asimismo, quiero agradecer a todos mis compañeros de la facultad, profesores, personal de administración y servicios. Porque en el poco tiempo que llevo en el CEU me he sentido muy bien recibido, y eso me ha dado el valor necesario para atreverme a hablar en esta ocasión.

Para empezar

Aunque éste no es un artículo científico, sí quiero empezar con un resumen de lo que intento expresar, porque no estoy seguro de ser capaz de comunicarlo de una manera efectiva. Mi premisa principal: las Matemáticas no son una ciencia exacta, de resultados perfectos y normas evidentes. Las Matemáticas son una ciencia viva, que avanza por prueba, ensayo, error y descubrimiento, una ciencia hecha por hombres y mujeres de carne, que busca una belleza y una coherencia internas que la hagan cada día mejor, más bonita, y, de paso, más útil. Es más, estoy de acuerdo con Paul Lockhart [7]: las Matemáticas deberían considerarse más como un arte que como una ciencia. Porque las Matemáticas son una actividad creativa por excelencia.

Y como toda obra de arte, como toda actividad de creación, busca la belleza.

Y dicho esto, entramos en materia. Pero antes, una pequeña observación: después de haber escrito el texto me he dado cuenta que se puede leer como una serie de secciones independientes. Así que, estimado lector, puede saltar de una parte a otra sin ningún problema; lo importante es disfrutar.

Algunos pensamientos

Cuando la profesora Carmen Calderón me pidió impartir esta Lección, lo primero que le pregunté es "¿De qué hablo yo?", a lo cual ella me respondió "De lo tuyo". ¿Sencillo, verdad? Pero lo mío, las Matemáticas, es algo que la mayoría de la gente encuentra demasiado abstracto y difícil de entender, cuando no expresa un rechazo frontal a la materia.

Lo mío empezó con una tesis sobre "Los espacios de Teichmüller de b-grupos con torsión" [1], algo que, evidentemente, no se puede explicar en veinte minutos, ni siquiera a un matemático que no trabaje en mi área. Descartada la idea de dichos "*espacios de Teichmüller*", cuando pienso en lo mío me viene a la mente otro artículo (en colaboración con T. N. Venkataramana), en un tema relacionado (mi contribución a este artículo viene precisamente de mi conocimiento sobre esos misteriosos "*espacios de Teichmüller*"), quizás más fácil de entender para un matemático, "The big Picard theorem and other results on Riemann surfaces" [2]. Este artículo se publicó en la revista oficial de la *Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas*. Es un artículo de investigación, que demuestra un teorema muy conocido pero utilizando un punto de vista nuevo, basado en una técnica sencilla. Pero entender el artículo requiere un conocimiento básico en cierta área de las Matemáticas conocida como Variable Compleja. No es un artículo para cualquiera, ni siquiera para un matemático en general. Sin embargo, la revista donde está publicado es una revista de un organismo dedicado a la enseñanza de las Matemáticas. ¿Cómo se puede entender que un artículo de investigación se publique en una revista de enseñanza? ¿Será porque los matemáticos nos hemos encerrado en un mundo propio, y no sabemos comunicar nuestra materia?

Así pues, si lo que de verdad a mí me gusta, lo que he hecho desde un punto de vista profesional, no se puede explicar sencillamente, ¿de qué puedo hablar? O quizás la pregunta debería ser otra, más en la línea de ¿por qué los matemáticos no podemos comunicar nuestra materia de una manera que entienda un público en general, y al mismo tiempo, la consideramos una materia llena de una belleza increíble y absoluta?

Hablar de Economía, Física o Filosofía es una tarea más fácil. Quizás porque estas áreas de conocimiento utilizan un lenguaje menos abstracto que las Matemáticas. O quizás porque tratan de temas más fundamentales, o de aspectos más cercanos a la vida diaria. Casi todo el mundo tiene una opinión sobre la bolsa o la crisis bancaria, aunque la mayoría de estas opiniones no estén fundamentadas en un razonamiento económico, o en un análisis profundo de los mercados. Sin embargo, son asuntos que suelen ser discutido a menudo en una reunión de amigos o en una comida familiar. Pero raramente el tema de conversación en una cena gira en torno a las Matemáticas.

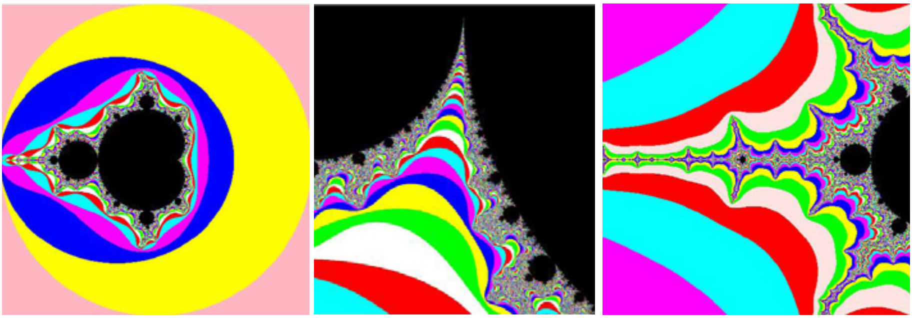
Podríamos pensar que este rechazo se debe al lenguaje matemático, que hace de la materia algo un tanto complicado. Pero otros asuntos bien difíciles de entender, como las ondas gravitacionales, atraen la atención de la prensa. (Debo decir que me encuentro entre la inmensa mayoría de la población que no tiene ni idea de lo que son dichas ondas). A pesar de ser un tema muy complejo, ha salido en las portadas de los periódicos y en programas de televisión.

Y me pregunto, ¿qué tienen las Matemáticas que no despiertan esa curiosidad, por no decir que son motivo de recelo y disgusto a la mayoría de la población?

Sin embargo, usamos las matemáticas todos los días, la mayoría de las veces sin saberlo. ¿Para qué valen los números primos (sean lo que sean dichos números)? Pues para garantizar que la compra por Internet sea segura, y no debemos temer miedo a que el empleado de la línea telefónica pinche el cable y nos robe los datos de la tarjeta de crédito. Y también garantizan que la lectura del correo de la universidad sea segura. Ese es el fundamento del famoso “https://” que aparece en muchas páginas web.

¿Y la transformada de Fourier? Suena complicado, y lo es. Pero permite comprimir música en formato MP3, y reducir un archivo a un tamaño aceptable para bajarlo desde Internet, y llevarlo en el teléfono móvil para escucharla en el metro. La transformada de Fourier ha eliminado del mercado a los CD portátiles. (Cabe preguntarse si no fue otra aplicación matemática la que hizo posible los CD portátiles).

Además de útiles, las Matemáticas son bonitas. Basta pensar en las famosas imágenes de la Alhambra de Granada, detrás de las cuales un matemático puede encontrar mucha geometría y álgebra de grupos. O podemos admirar con curiosidad la belleza del conjunto de Mandrelbrot, o similares, como los incluidos más abajo[1]. Aunque me gustaría decir aquí que, para mí, y seguramente para muchos matemáticos, la belleza de estos conjuntos radica en cómo se construyen, en el hecho de que cada color tiene un sentido matemático.



Nos encontramos, pues, en que no podemos negar la utilidad de las Matemáticas (aunque no conozcamos los resultados utilizados), y uno puede fácilmente admitir que las Matemáticas (o al menos algunos de los dibujos creados con Matemáticas "serias") tienen belleza visual. Pero la materia, el tema del que estamos hablando, es la gran asignatura pendiente de la Humanidad, el tópico prohibido en la mayoría de las conversaciones, que casi siempre se rechaza con una simple frase como "Es que yo nunca fui bueno en matemáticas".

Pero, ¿es ese rechazo a las Matemáticas algo natural, provocado por la dificultad y abstracción de la materia? ¿O ha surgido ese rechazo como consecuencia de otras cosas?

Y eso de no ser bueno en matemáticas, ¿a qué se refiere?

Quizás el lector haya observado que, cuando escribo sobre no ser bueno en matemáticas, he utilizado letras minúsculas, mientras que he hablado de las Matemáticas con mayúsculas. Y he hecho esa distinción para expresar

1 Estas figuras han sido realizadas con un pequeño programa escrito en Linux en C, muy simple una vez que se entienden la parte matemática.

lo que creo que puede ser una de las razones principales de este rechazo: **lo que nos han enseñado como Matemáticas no es tal**; nos han instruido en cuentas y fórmulas, y nos han dicho que eso es Matemáticas. Cuando no es nada más que precisamente eso, calcular y, si acaso, matemáticas con minúscula.

Ken Robinson, un famoso conferencista británico, muy influyente en el mundo de la educación, dice[2]:

> "[…] Hoy en día, la creatividad es un elemento crucial en el proceso educativo, tanto como leer y escribir. Por este motivo, debemos mimar la creatividad tanto como cuidamos la lectura y escritura".

El problema es que, para dar ejemplos de actividades poco creativas, Robinson cita las Matemáticas. Su problema es confundir las cuentas y las fórmulas con la belleza de la actividad creativa matemática. Desafortunadamente, su charla en la conferencia TED 2006 es la más vista de dichas conferencias TED. Una pena que una mala interpretación de la actividad matemática sea tan popular; quizás Sir Robinson debería haber asistido a más clases de Matemáticas y menos de cuentas. Confundir las cuentas con las Matemáticas es como creer que el Premio Nobel de Literatura se otorga por no cometer faltas de ortografía.

Porque la Matemática, con mayúscula, es una actividad sumamente creativa, que busca la belleza de la simplicidad en sus resultados. Ciertamente es una actividad abstracta, pero precisamente por eso es creativa, porque separándonos del mundo físico es cómo podemos crear un mundo intelectual donde el límite a la creación sea nuestra propia imaginación. El físico debe explicar el comportamiento del mundo que nos rodea. Cuando, según la historia, Newton vio caer la manzana, explicó por qué ocurre. Newton no dijo, "quiero que las manzanas salgan disparadas hacia arriba". Su gran descubrimiento estaba basado, y por lo tanto limitado, por el mundo exterior. En Matemáticas no tenemos esos límites, lo cual nos da alas para crear como artistas, buscando la belleza de los resultados sin limitaciones físicas.

Las Matemáticas no se han enseñado así[3]. La Física se ha motivado como una búsqueda de las leyes que gobiernan el universo, e incluso se explican

2 Ken Robinson, "Do schools kill creativity?", TED 2006.

3 Mis comentarios que siguen no se refieren a los profesores de Matemáticas, sino al diseño de los planes de estudios por una serie de personas, quizás con buenas intenciones, pero ciertamente equivocadas en sus planteamientos hacia la materia.

aquellos razonamientos físicos (como el éter) que no fueron ciertos pero que ayudaron al progreso de esta ciencia. Las prácticas de laboratorio de Química despiertan la curiosidad de los alumnos. En ambas materias se muestra un progreso, una trayectoria de error, experimentos, búsqueda activa. Pero las Matemáticas, o mejor dicho, los planes de estudios de las matemáticas, se han diseñado de una manera diferente, quitando esa componente de búsqueda, eliminando cualquier método de ensayo y error, y sustituyendo todo eso por una serie de fórmulas cerradas, que siempre están bien, que no dan lugar al error, y cuya motivación e historia se han eliminado. Es más, la enseñanza de las Matemáticas ha hecho demasiado hincapié en mostrar la materia "de arriba abajo": se empieza con el enunciado del resultado, si hay tiempo se demuestra[4], y se utiliza dicho resultado en la resolución de problemas, con mucho énfasis en la correcta aplicación de las fórmulas. Se ha separado el resultado de su aplicación práctica al enseñarlo en el orden contrario. Y muchos de los problemas que hemos estudiado son construcciones artificiales para aplicar una fórmula o un método: "Un niño tiene cien melones…" ¿qué niño en el mundo tiene cien melones?

Las Matemáticas no se han construido de esta manera. Un matemático empieza a pensar por la demostración, en cierto sentido. Un matemático se acerca a un resultado a base de probar una idea, ver que no funciona, probar otra, imaginar lo que ocurriría en ciertas condiciones, resolver un caso sencillo, y otro montón de actividades. Si bien estas actividades son abstractas y requieren solamente papel y lápiz la mayoría de las veces (y hoy en día, ordenadores en ciertas áreas de las Matemáticas), no dejan de ser actividades que muestran que el conocimiento matemático es algo activo, lejos de ser una serie de resultados enunciados con una lógica fría y un montón de fórmulas.

Las Matemáticas son un arte. De la misma manera que un artista concibe sus obras primero de una manera general, tiene una idea genial y una visión especial, y luego, poco a poco, las transmite al medio elegido, un matemático tiene ideas geniales y las demuestra poco a poco. Un músico corrige sus partituras varias veces (quizás la excepción sea Mozart, de quien se dice que escribía su música una sola vez); de la misma manera, un matemático llena muchas páginas antes de llegar a completar una demostración.

---

4 Este paso se suele "evitar", quizás por el miedo que provoca, lo cual es un grave error pues las demostraciones ayudan a situar los resultados en un contexto, y proporcionan técnicas útiles.

Este aspecto creador se ha eliminado de los planes de estudios, y generación tras generación, los estudiantes han aprendido a odiar las fórmulas y los resultados, porque no se les ha enseñado que las Matemáticas son un arte. Y sin embargo se pierde una enorme oportunidad porque el aspecto creador de las Matemáticas, como dije anteriormente, requiere muy poco, un poco de papel y lápiz, siendo así algo que se puede llevar a cabo por poco dinero, en cualquier parte del mundo. La Humanidad está perdiendo una oportunidad fantástica de enseñar creatividad y arte con apenas requerimientos materiales.

La consecuencia de esta manera de enseñar las Matemáticas está muy bien expresada, de manera humorística, en una viñeta que circula por internet, donde se puede ver a una bibliotecaria perpleja, mirando hacía una estantería mientras dice "¿Quién ha estado poniendo todos los libros de matemáticas en la sección de horror?" Porque, tal como lo ve el público en general, las Matemáticas pertenecen a la sección de horror y, peor todavía, a la de religión [7]. Para mucha gente, una inmensa mayoría, los recuerdos del colegio sobre esta asignatura consisten en un montón de reglas sin explicación, que hay que creer como si fuera un culto raro y oscuro, y que no permiten el menor error. Las Matemáticas se recuerdan como las Ciencias Exactas, cuando deberían aprenderse como un Arte.

Sin embargo, para mí, y para todo matemático "profesional", las Matemáticas son una actividad humana enormemente bella y creativa, cuyo desarrollo incluye acercarse poco a poco al resultado final. Los teoremas no aparecen de golpe, hay que trabajarlos, y quizás hay que trabajar más la demostración que el enunciado, que es lo último que los matemáticos escribimos. Y los matemáticos buscamos la belleza. Como dijo Lipman Bers,

> ...las matemáticas se parecen mucho a la poesía... lo que hace un buen poema –un gran poema– es el hecho de que contiene una enorme cantidad de pensamiento expresado en pocas palabras. En este sentido, fórmulas como $e^{\pi i} + 1 = 0$ ó $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ son poemas.

Así pues, tras esta quizás demasiado larga introducción, quiero explicar un poco el resto del contenido de esta lección, para aquél lector que todavía tenga curiosidad por leer más. Lo que sigue son unas reflexiones sobre algunos aspectos de las Matemáticas, que en cierto sentido reflejan mi trayectoria temporal de entendimiento y amor a esta materia. En primer lugar, hablaré sobre los números, pues es lo que todo el mundo recuerda de las matemáticas (esta vez con minúscula). Seguiré con alguna reflexión sobre la lógica, para continuar hablando de lo que hacemos los matemáticos, teoremas. Finalmente, acabaré con algunos pensamientos sobre la búsqueda de la simetría y las conexiones entre distintas ramas de las Matemáticas. Espero poder mostrar una cara de las Matemáticas diferente de las cuentas que aprendemos en el colegio, una mirada a esta actividad humana que ni está completa, ni hay esperanzas de acabar de completar, pero que es eso precisamente lo que la hace tan interesante.

Los números

El primer encuentro que tienen los niños con las matemáticas consiste en el aprendizaje de operaciones aritméticas. Pero las Matemáticas no son cuentas. Es como si la poesía se redujera a saber que un soneto consiste de catorce versos, divididos en dos grupos de cuatro y dos de tres… Si eso fuera así nadie sería poeta, y a nadie le gustaría la poesía. De la misma manera, sumar y multiplicar no es hacer Matemáticas. Mientras entendamos esto podemos aventurarnos en el mundo de los números sin miedo. Porque los números son, desde mi punto de vista, una gran abstracción de la realidad: pasamos de contar tres piedras o tres vacas al concepto de "tres", que incluye todos los conjuntos con un determinado número de elementos (la cardinalidad de un conjunto es algo complicado, que trajo sus problemas, y graves, cuando los matemáticos se pusieron a explorar el tamaño del infinito). El número es el comienzo de la abstracción matemática, si damos un paso adelante y nos olvidamos de las cuentas por sí mismas para empezar a estudiar propiedades de números.

En la imagen 1 se puede ver la tablilla Plimpton-322, una tablilla de arcilla de los tiempos babilonios. Los símbolos que se pueden ver son números. Pero no es la serie de números "naturales", 1, 2, 3… Ni tampoco números arbitrarios. Son ternas de números del tipo (3, 4, 5), (5, 12, 13) o (20, 21, 29). Se preguntará el lector qué hace diferente estos números de otra serie de ternas arbitrarias. Si nos paramos un momento a calcular podemos descubrir una propiedad. Tomemos, por ejemplo, los tres primeros números, 3, 4, y 5, que además son los menores y por lo tanto más fáciles de usar en cálculos. Tenemos que $3^2 = 9$, y $4^2 = 16$, y si sumamos estos dos números obtenemos $9 + 16 = 25$. Y no por casualidad, elevando el tercer número al cuadrado también obtenemos veinticinco, $5^2 = 25$. Y así pasa con todas las ternas, por ejemplo $5^2 + 12^2 = 13^2$, y $20^2 + 21^2 = 29^2$. Los babilonios nos han dejado ejemplos de ternas pitagóricas: la suma de los cuadrados de los dos números menores es igual al cuadrado del mayor de los números. No puede ser casualidad que estos números se escribieran juntos, es evidente que en las calles de Babilonia ya se hablaba del teorema de Pitágoras.

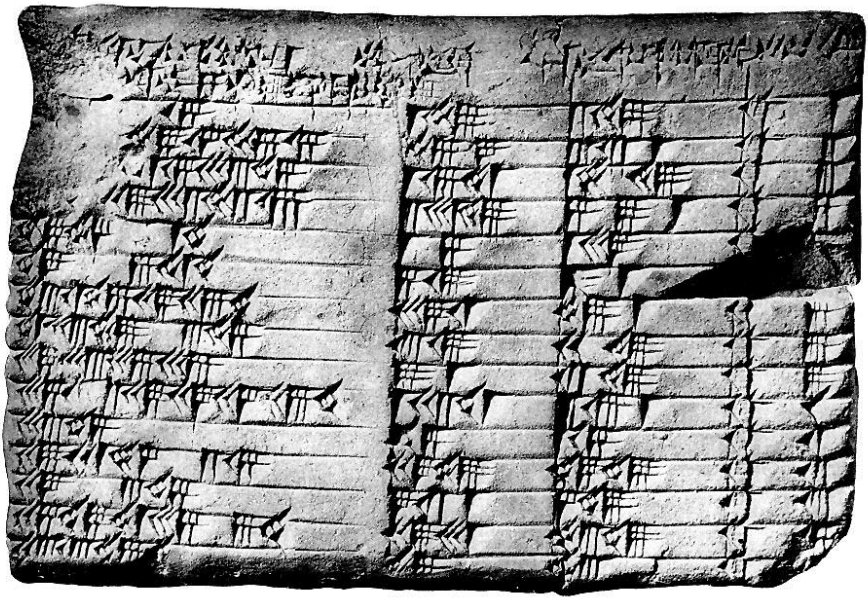


Figura 1. Tablilla Plimpton-322.

Los babilonios usaban un sistema numérico con base 60 que, aunque nos parezca raro, lo seguimos usando hoy en día: sesenta segundos hacen un minuto, y sesenta minutos completan una hora. Si nos paramos a pensar un poco sobre dicho sistema vemos que tiene sus inconvenientes, empezando por la necesidad de tener sesenta (o mejor dicho cincuenta y nueve) símbolos diferentes. Para entender eso basta comparar con nuestro sistema decimal, donde tenemos nueve símbolos, 1, 2,…, 9. Bueno, usamos otro símbolo, el cero, 0, pero eso es adelantar acontecimientos.

El segundo inconveniente del sistema babilónico es indicar cuando un número "vale más de lo que aparenta". ¿Cómo sabemos que el símbolo para el número uno pasa de indicar uno a indicar sesenta y uno? Este pequeño problema lo resolvieron con espacios: cuanto más a la izquierda se encontraba un número más valía.

Cualquiera que haya intentado trabajar con un sistema numérico no posicional puede entender la dificultad de las operaciones aritméticas más básicas: sumar con números romanos no es una tarea fácil, y al final lo que hacemos es sumar "de cabeza" y trasladarlo a numerales romanos. Porque nuestro sistema es tan fácil de usar… Un 1 quiere decir uno, y un 10 quiere decir una unidad "de los siguiente", es decir diez. Y 100 es "una unidad de lo siguiente a lo siguiente", cien.

Figura 2. Detalle de la Puerta de Alcalá (Madrid). *Drow male*

Nadie puede negar que la fecha 1778 que aparece en la Puerta de Alcalá, es más fácil de entender con nuestra numeración que con la romana. Para entender la parte de setecientos, por ejemplo, tenemos que sumar quinientos (D) con doscientos (CC), obligándonos a hacer aritmética mental. Y lo mismo con setenta (L + XX) y con el ocho (V + III).

¿Pero dónde surgió el sistema numeral que usamos hoy en día? La historia del cero [3] nos lleva a las llanuras centrales de la India, donde el termómetro alcanza fácilmente los 48 grados en verano. En Gwalior, una pequeña ciudad del estado de Madhya Pradesh, hay un fuerte, más como una pequeña ciudad dentro de la ciudad. En dicho fuerte se encuentra un templo, excavado en la roca, que data de antes de la construcción del fuerte. En ese templo se puede leer un relato sobre la donación de un campo del pueblo al templo.

Figura 3. Gwalior fort. *Geek 007*

En esa descripción sobre el cambio de dueños de la tierra vemos claramente el número 270: el cero entra en la civilización. Y de dos maneras: como un símbolo para indicar "nada", y como una ayuda para que los demás símbolos adquieran mayor valor. El cero en la posición derecha quiere decir que el número a su izquierda vale diez veces más: así el uno (1) pasa a valer diez (10). Y esto es lo que ha hecho del sistema de numeración hindú el más exitoso: las cuentas (dentro de la complicación que tienen) se pueden hacer más fácilmente que con números romanos o babilonios. Los comerciantes árabes llevaron el cero desde la India a sus tierras, y de allí a España, donde los traductores los introdujeron mucho después en la cultura europea.

Figura 4. El cero.

Es importante destacar que esta inscripción con el cero es moderna, data del año 876 d. C., la separan cientos de años de la tablilla Plimpton-322: las Matemáticas se desarrollaron antes de tener un sistema numérico que permitiera hacer cuentas con facilidad.

Los matemáticos estudiamos números, no tanto las operaciones como las propiedades de los números. Esos "genios matemáticos" que aparecen de vez en cuando, gente capaz de multiplicar números grandes sin calculadora, u otro tipo de operaciones, no son tal, es decir, son buenos en lo que hacen, cuentas, pero no son necesariamente buenos en matemáticas. Lo interesante de los números, como acabo de mencionar, son sus propiedades. Por ejemplo, preguntarse cuántos divisores tiene un número dado. En particular los matemáticos han estado siempre fascinados por los números sin divisores (excepto el número mismo y el 1, por supuesto), como el 2, 3, 5, 7… Se llaman números primos, y son los bloques que construyen el resto de los números. El **Teorema Fundamental de la Aritmética** nos dice precisamente que todo número entero positivo es primo o se puede escribir como producto de primos. El 5 es primo, mientras que el 6 se puede expresar como 6 = 3 x 2. Este teorema (mejor dicho, Teorema, porque es muy importante) es el tipo de resultado que buscamos los matemáticos: sencillo de enunciar, y a la vez poderoso, puesto que establece una propiedad de **todos** los números. No hace falta saber multiplicar bien "de cabeza" para entender lo que dice este resultado. Saber que 3 x 2 = 6 es saber cuentas; entender que 6 se descompone en producto de números menores es entender Matemáticas.

Los números primos han fascinado a los matemáticos desde la antigüedad, y preguntarse sobre los números primos es intentar descubrir propiedades generales y fundamentales de las Matemáticas. Las cuentas son importantes en abstracto: los matemáticos sabemos que todo número se descompone como producto de primos, pero no nos pasamos todo el día dividiendo números para ver si son primos o no. Una pregunta más fundamental ya fue resuelta por los griegos: ¿cuántos primos existen? La respuesta es infinitos. Eratóstenes inventó un ingenioso método para encontrar primos que parece indicar que dichos números no se acaban. Euclides demostró precisamente la existencia de infinitos primos.

Y el hecho de que es fácil multiplicar dos números dados (primos, o no), pero es muy difícil descomponen un número es sus "componentes" primos es lo que está detrás de la criptografía. Por ejemplo, ¿es el número 62615533 primo? Con la ayuda de una calculadora, y una tabla de números primos, uno puede averiguar, tras unas cuantas cuentas fallidas, sin lugar a dudas, que 62615533 = 7919 x 7907. Pero si consideramos números más grandes, no con ocho cifras sino con muchísimas más, la descomposición se vuelve prácticamente imposible. Y en eso se basan muchos algoritmos criptográficos modernos.

Esta aplicación de las Matemáticas a la criptografía, tuvo lugar cientos de años después del "descubrimiento" de los números primos; pero los matemáticos no tenemos prisa. Una pregunta que mucha gente hace continuamente sobre las matemáticas es sobre su aplicación, ¿esto de los primos para qué sirve? Si la Humanidad no hubiera permitido el estudio de los números primos, porque no puede ver las aplicaciones prácticas de un modo inmediato, quizás la economía del mundo digital no existiría. Las Matemáticas construyen un mundo (bonito), muchas veces sin preocuparse de las aplicaciones. Son una rama más del conocimiento humano, y como tal, uno no debe estar preocupado sólo por su carácter práctico. ¿Para qué sirve la poesía?

Ciertamente es útil saber sumar y multiplicar para actividades diarias, aunque no imprescindible. Para algo existen las calculadores, y ahora, con las aplicaciones de los móviles no hace falta llevar una calculadora encima. Pero si hablamos de otras operaciones más complicadas no está nada claro la necesidad de saber hacerlas sin ayuda electrónica. Yo recuerdo con cierta gratificación cuando aprendí a calcular raíces cuadradas con papel y lápiz, pero entiendo que no es un plato de buen gusto para la mayoría de los estudiantes. Y no hace falta aprenderlo, al menos no en una asignatura llamada Matemáticas. Quizás se podría enseñar en una asignatura sobre algoritmos y programación, pues es un buen ejemplo para hacer un programa simple. Y en Matemáticas se podría enseñar cómo calcular el orden de magnitud de una raíz cuadrada, es decir, entender que la raíz de 100 es 10, un orden de magnitud menor. La mayoría de las veces esto nos basta.

Y eso no quiere decir que los matemáticos no consideremos las raíces. La "aparición" de las raíces cuadradas en la antigüedad causó problemas en la comunidad matemática. Cuenta la leyenda, que los pitagóricos, al descubrir la raíz de dos, $\sqrt{2}$, entraron en modo de pánico y lo mantuvieron en secreto por muchos años. ¿Pero qué es exactamente lo que no contaron? ¿Qué hace de $\sqrt{2}$ algo tan especial? Pues que no se puede expresar como el cociente de dos números (enteros). Parece una tontería, pero no lo es, pues la división, lo opuesto a la multiplicación, es una operación fundamental. Y descubrir un número que no forma parte de la división, por decirlo de alguna manera[5], fue un acontecimiento muy importante en la historia de las Matemáticas. De nuevo estamos tratando con una propiedad fundamental de los números. Al matemático no le importa el valor de la raíz de dos (que, por cierto, no se puede calcular exacto precisamente por no ser una fracción). Pero al matemático sí que le importa entender que la raíz de dos se sale del conjunto de las fracciones. ¿Y no es esto más bonito que aprender a calcular la raíz de dos con lápiz y papel?

---

5 En lenguaje moderno decimos que $\sqrt{2}$ es un número irracional, mientras que los números enteros y las fracciones son números racionales.

La lógica

Otra idea que tiene la gente sobre las matemáticas, muy extendida desafortunadamente, es que son una ciencia abstracta, cuyos resultados consisten en líneas y líneas de frases incomprensibles. Y peor todavía, líneas que son consecuencias cada una de la anterior, como si se tratara de rellenar un formulario para el gobierno. A nadie le sorprende que la figura 5 abajo sea de un libro de matemáticas [10].

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{*54{\cdot}43.} & \vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\, \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\, \equiv \,.\, \alpha \cup \beta \in 2 & \\
\quad \mathit{Dem.} & & \\
\quad\quad \vdash \,.\, *54{\cdot}26 \,.\, \supset \vdash :. \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\, \supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\, \equiv \,.\, x \neq y \,. & & \\
\quad\quad [*51{\cdot}231] & \equiv \,.\, \iota`x \cap \iota`y = \Lambda \,. & \\
\quad\quad [*13{\cdot}12] & \equiv \,.\, \alpha \cap \beta = \Lambda & (1) \\
\quad\quad \vdash \,.\, (1) \,.\, *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\, \supset & & \\
\quad\quad\quad \vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\, \supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\, \equiv \,.\, \alpha \cap \beta = \Lambda & & (2) \\
\quad\quad \vdash \,.\, (2) \,.\, *11{\cdot}54 \,.\, *52{\cdot}1 \,.\, \supset \vdash \,.\, \mathrm{Prop} & &
\end{array}
$$

Figura 5. *Principia Mathematica.* *Bertrand Russell*

El libro, *Principia Mathematica*, fue un intento de los matemáticos Alfred Whitehead y Bertrand Russell, de formalizar las Matemáticas para que no hubiera dudas sobre su consistencia interna, causadas por la introducción de la teoría de conjuntos, los distintos niveles de infinito, y otras cosas a las que nos dedicamos los matemáticos. Pero Russell no solo se dedicó a las matemáticas, fue también un activo pacifista, filósofo y escritor, galardonado con el Premio Nobel de Literatura (evidentemente no por los *Principia Mathematica*). A pesar de que el texto arriba mostrado parece salido de una persona un tanto rara, Russell era capaz de observar belleza en las matemáticas. Dijo cosas como [8]:

> Las matemáticas, entendidas correctamente, tienen no solamente verdad sino también una belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de una escultura […] capaz de una perfección que solamente el mejor arte puede mostrar.

Podemos estar seguros que la belleza que encontró Russell en las matemáticas no surge de los símbolos abstractos de *Principia Mathematica*, sino que es fruto de otra belleza, aquella de ver cómo los resultado encajan unos con otros y construyen un edificio.

Porque las Matemáticas no son un conjunto de símbolos, ni el producto de una lógica infalible que fluye naturalmente de una frase a la siguiente. Ciertamente las Matemáticas necesitan de la lógica como herramienta para probar los diversos resultados, pero ningún matemático piensa con la frialdad que nos trasmiten las páginas de *Principia Mathematica*. Citando a Lockhart de nuevo,

> Una demostración debe ser una revelación de los dioses, no un mensaje codificado del Pentágono.

Incluso aunque la expresión final de un teorema tenga mucha jerga lógica, el proceso de alcanzar dicha demostración es un viaje de descubrimiento que, la mayoría de las veces, se comunica con palabras ordinarias. Un pequeño inciso en Matemáticas para explicar este último pensamiento: en el área de la variable compleja se utiliza el concepto de "Derivada Schwarziana", que es una generalización de la derivada, y que ahora mismo no nos interesa exactamente lo que es, excepto que la fórmula que describe esta derivada es bastante complicada. Casi todos los artículos que hablan sobre la derivada Schwarziana dan la impresión de ser más complicados que lo que son, simplemente porque la fórmula es complicada. Sin embargo, hay un bello artículo escrito por William Thurston [9] donde explica de una manera muy clara lo que es esta derivada Schwarziana *sin escribir la fórmula ni una sola vez*. Las Matemáticas se apoyan en la lógica, pero van más allá del formulismo, y un buen autor es capaz de transmitir una idea matemática con la mínima cantidad de fórmulas y en frases sencillas, escritas en un lenguaje normal[6].

Para hacer las cosas más difíciles, a principios del siglo XX otro matemático, Kurt Gödel, demostró que la tarea de Russell es imposible, que siempre habrá problemas matemáticos que no se pueden probar si son ciertos o falso. Con Gödel se abrió una puerta de esperanza a la belleza del descubrimiento. O mejor dicho, se confirmó dicha belleza, pues cualquier matemático puede asegurar que la demostración de teoremas y resultados es una búsqueda apasionante de la verdad (matemática), que tiene su método de acierto y error, sus experimentos que van más allá de la lógica fría.

Una nota aparte: el texto de Russell de la figura 6 demuestra que… 1 + 1 = 2 Aunque como matemático eso parece claro en el enunciado del resultado, lo

6 Algo que seguramente no estoy consiguiendo yo en este artículo y por lo cual debo disculparme al paciente lector que haya llegado hasta aquí.

curioso es que dice más: que 1+1 = 2 *una vez que se defina la suma de números.* Ni siquiera se tiene la suma.

Las matemáticas no son ni las cuentas ni la lógica. Ambas, cuentas y lógica, son necesarias y son producto y base de las Matemáticas. Pero el arte de las Matemáticas va más allá de estas dos herramientas. Las Matemáticas buscan demostraciones de resultados que sean sencillos, generales y que establezcan conexiones entre distintas áreas.

El teorema de Pitágoras, un resultado para siempre

> "*I have tried to avoid long numerical computations, thereby following Riemann's postulate that proofs should be given through ideas and not voluminous computations.* David Hilbert.

Las ternas de números de los babilonios no serían interesantes si no fuera porque forman parte de algo más general. Al fin y al cabo, a nadie le parece atractiva una colección de números que cumplen ciertas propiedades. Una pregunta surge inmediatamente: ¿hay más números que cumplan estas propiedades que los que se pueden encontrar en el documento babilónico? ¿Hay un número finito de dichas ternas, o podemos continuar calculando dichos número por toda la eternidad? O más importante todavía, ¿de dónde vienen dicho números?

Una de las cosas que todo estudiante recuerda de sus años de colegio es el teorema de Pitágoras: *la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.* Y las ternas de números que encontramos en Plimpton-322 cumplen el teorema de Pitágoras. Desde mi punto de vista, quizás un tanto atrevido pues no soy historiador de las matemáticas, esto muestra dos cosas: en primer lugar, que hay una verdad matemática que la humanidad encuentra en diversos lugares y tiempos, las Matemáticas son universales en geografía y en historia. Y en segundo lugar, que las matemáticas **se hacen** probando, intentando algo que no sale, pero luego se mejora. Yo se lo digo muchas veces a los alumnos cuando no se les ocurre cómo responder a una pregunta matemática: ¡prueba! Prueba lo que se te ocurra, un caso, otro, mira a ver qué pasa. Porque, con tanta regla ya dada y tanta exactitud hemos matado la aventura del descubrimiento. Los números de la tabilla nos muestran que para entender un resultado hace falta probar.

El teorema de Pitágoras nos viene de los griegos, quizás no de Pitágoras mismo, pero de su escuela matemática. Antes, mucho antes de que se usara el cero en la representación de números. Pero, curiosamente, este teorema también se encuentra en la India:

दीर्घचतुरस्रस्याक्ष्णयारज्जुः पार्श्वमानी तिर्यङ्मानी च
यत्पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति ॥

"La diagonal de un rectángulo produce, por sí misma, el área total que producen los dos lados separadamente".

A miles de kilómetros de Grecia, a cientos de años de distancia temporal, dos comunidades matemáticas llegaron a la misma conclusión, sin que exista prueba histórica de que en la India se conocieran los resultados matemáticos de Grecia.

Pero, ¿qué es lo bello del teorema de Pitágoras? Al fin y al cabo, todo lo que dice es que "*La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa*". Lo importante es que no dice que se cumpla para un triángulo en concreto, el que está representado en el libro de geometría de la ESO. Ni que se cumpla sólo en Grecia, y no en España. O que se cumpliera para nuestros padres pero no se cumplirá para nuestros hijos. No, la belleza del teorema de Pitágoras, en palabras de Eduardo Sáenz de Cabezón[7] es que "*allá donde se encuentren dos catetos y una buena hipotenusa, se cumple el teorema de Pitágoras*". No importa dónde ni cuando, el resultado tiene una demostración, y por lo tanto se cumple en todo lugar.

Y en la demostración, o mejor dicho, en la existencia de su demostración, se encuentra la belleza y la maldición del Teorema de Pitágoras. O de cualquier teorema. Belleza porque lo hace eterno y porque, como yo sé que existe una demostración, si no quiero no la leo, pero sé que es verdad y que cuando quiera, yo, como matemático, puedo leer la demostración. Mientras tanto, me lo creo sin ningún problema, porque miles de matemáticos antes de mí han comprobado dicha demostración. (El Teorema de Pitágoras es quizás el resultado matemático con más demostraciones diferentes; Albert Einstein mismo dio una prueba cuando tenía doce años).

Y en la demostración se encuentra su maldición, porque nos hemos empeñado en enseñarlo así a numerosas generaciones de estudiantes: ya resuelto, el enunciado con su demostración, juntos y en ese orden. Les hemos quitado la ilusión de descubrir propiedades de los números y su relación con los triángulos. La ilusión de ver que, tras muchos intentos, uno entiende porqué

7 Eduardo Sáenz de Cabezón, charla TEDx, Río de la Plata.

el resultado es verdad. Estoy convencido, sin ninguna duda que, como dije anteriormente, el teorema de Pitágoras se descubrió a base de probar con unos números, y ver que cierto modelo se repetía. No es que a Pitágoras se le ocurriera el teorema sin más; el teorema se maduró durante muchos años, hasta que se demostró.

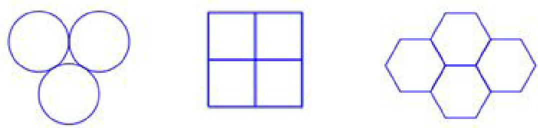
Quizás a mucha gente no le hace ilusión descubrir porqué un teorema es verdad, pero lo que sí creo que es cierto es que enseñar un resultado como si saliera de la nada lo hace poco interesante. Yo recuerdo mis clases de Filosofía o Física más interesantes que las de Matemáticas (al menos hasta aquél antiguo "segundo de BUP", cuando todo empezó a encajar). Eso no quita que a mí me gustaran más las Matemáticas que la Filosofía o la Física. Pero en las Matemáticas no intentábamos encontrar, se nos decía "la verdad" y, quizás, se nos daba alguna demostración para creer en "la verdad". Poca motivación, mucha regla. Y, por lo que uno puede leer, las generaciones de burocracia educativa han seguido con esta tradición: las Matemáticas son exactas, ya están hechas, sólo queda aprenderlas. Y como dije antes, esta manera de ver la enseñanza de las Matemáticas las ha hecho una especie de religión extraña para millones de escolares de todos los lugares y tiempos. Debemos dejar que los niños prueben, bajo la guía del experto que puede dirigirlos. Pero como en otras disciplinas, los niños deben intentar diversas maneras de descubrir la verdad matemática, sin miedo a que esos errores les hagan olvidar los teoremas.

Los matemáticos nos dedicamos a hacer teoremas. Un teorema es una verdad universal (en el tiempo y el espacio), que viene acompañada de una demostración, es decir, de una justificación, siguiendo las reglas del juego matemático, de porqué dicho teorema es cierto. Sin demostración un teorema es una mera conjetura.

Como, por ejemplo[8], la cuestión de cuál es la mejor forma geométrica para rellenar una superficie plana (infinita). O en otras palabras, si tenemos que poner baldosas en un suelo de la cocina (infinita), con la condición de que las baldosas sean iguales en forma y tamaño, ¿qué figura es la más adecuada, para que quede el menor espacio posible entre las baldosas? El círculo no funciona, evidentemente, porque deja mucho espacio que debemos rellenar con cemento. Un cuadrado sí que vale, así como un triángulo con los tres ángulos iguales (aquello que en el colegio llamaban triángulo equilátero,

8 "La idea de poner estos dos resultados seguidos es de Sáenz de Cabezón, en su charla TED".

porque se llama así). Pero, ¿hay otra figura? Esto ya se lo preguntaban también los griegos, los que no sabían el uso del cero pero sí sabían pensar en Matemáticas. Y la respuesta las dieron… las abejas. Estos insectos necesitan construir panales con el menor espacio posible entre las celdas, puesto que dicho espacio se debe rellenar con cera (el equivalente del cemento que une las baldosas del suelo), y a una abeja le cuesta mucho hacer cera. Les sale más rentable hacer, y guardar, miel. Las abejas construyen sus panales con hexágonos.



En el año 36 a. C. Marcus Terentius Varro dio una explicación, la verdad poco matemática, de porqué las abejas construyen en hexágonos (porque tienen seis patas). Sin embargo, la conjetura de que el hexágono es el polígono con menos perímetro que se puede utilizar, se suele atribuir a Pappus de Alejandría, 290-350 d. C. Pero se quedó en eso, en una conjetura. Porque aunque parece interesante y bonita, sencilla de entender, sin demostración no deja de ser una mera suposición para un matemático. Sin demostración no hay teorema. Fue en al año 1999, más de mil quinientos años después de Pappus, cuando el matemático Thomas C. Hales [5] demostró dicha conjetura. Y ahora es un teorema, que se puede enunciar con grafos localmente finitos, componentes conexas y límites superiores. O con palabras más sencillas: después de todos estos años sabemos que las abejas tienen razón. (Aunque claro, a las abejas no les importan para nada estas elucubraciones humanas).

Así pues, tenemos una importante propiedad de las matemáticas, los resultados deben venir acompañados de demostraciones. Todo matemático que se precie busca lo mismo: demostrar resultados. Lo demás, son conjeturas (o axiomas). Es más, la demostración es lo que caracteriza a las Matemáticas en cierto sentido, y las hace diferentes de otras actividades, les da un carácter universal. Una vez de acuerdo en ciertos principios básico (lo que los matemáticos llaman axiomas), el resto de los resultados se demuestra y, por lo tanto, son válidos en Madrid, Helsinki y Bombay; el año pasado, este y el siglo que viene. Es difícil pensar en otra actividad que tenga hoy exactamente la misma validez que la que tuvo en el tiempo de los griegos. Incluso el lenguaje ha cambiado mucho, y para comprobarlo basta leer cualquier escrito hace unos siglos, aunque sea en nuestro idioma.

Pero aunque el resultado final de las Matemáticas son los teoremas, con sus demostraciones, este punto de vista nos da una visión un poco seca de las Matemáticas. ¿Cómo se hace un teorema? ¿Nos sentamos los matemáticos, mirando al cielo y, de repente, como quien no quiera la cosa, se nos ocurre un teorema? Ciertamente no. Henri Poincaré, un gran matemático que vivió en los siglos XIX y XX, cuenta cómo la demostración del Teorema de Uniformización (uno de los grandes teoremas de la teoría de variable compleja) se le ocurrió cuando se subía a un autobús en París. No porque fuera una inspiración de la diosa de las matemáticas. Más bien porque Poincaré pasó mucho tiempo, meses, sino años, dándole vueltas en la cabeza al teorema. Y no tanto a su enunciado tal y como lo conocemos hoy, sino más bien a la demostración. Por raro que parezca, muchos resultados matemáticos se hacen a base de aproximaciones. Un poco aquí, una línea de la demostración que nos da un resultado pequeño; días después otra línea, que nos mejora el resultado. El enunciado es, quizás, lo último que se escribe. Porque siempre se puede mejorar. Siempre se puede ampliar. Y uno se acerca poco a poco, ahora la demostración, luego el enunciado, de vuelta a la demostración. Crear un teorema matemático no es una labor árida que se hace sentado en una mesa, pensando en el resultado y luego la prueba. Como con Poincaré, las matemáticas son un arte vivo, que se trabaja poco a poco.

Sin embargo, creo que hay algunas pautas que caracterizan a lo que los matemáticos llamamos un resultado elegante: la generalización, encajar en la teoría existente, y la simplicidad del enunciado. Lo cual me lleva a la siguiente historia de esta charla.

Fermat, una generalización que tardó 357 años

Una de las obsesiones (sanas) de un matemático es obtener un resultado lo más general posible. A nadie le gusta la solución de un problema “por casos”: primero resolvemos un caso, luego otro un poco más difícil, etc., etc., hasta que, finalmente, tenemos el resultado completo. Aunque las Matemáticas se hacen poco a poco, los matemáticos buscamos una “verdad universal y general”.

Consideremos de nuevo el teorema de Pitágoras: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si llamamos a los catetos a y b, y a la hipotenusa c, tenemos que el teorema se puede escribir como $a^2 + b^2 = c^2$. Como vimos antes, existen muchos ejemplos de números que satisfacen esta ecuación, siendo (3, 4, 5) uno de ellos. Pero, ¿qué pasa si hacemos la ecuación un poco más difícil, por ejemplo si cambiamos del cuadrado al cubo, la tercera potencia? Es decir, podemos preguntarnos por soluciones de la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$. ¿Por donde empezamos? Lo más sencillo es considerar ternas pitagóricas, digamos (3, 4, 5), que cumple la ecuación de los cuadrados, y ver si también cumple la ecuación de los cubos (aunque sería muy raro que los mismos números valieran para el cuadrado y el cubo a la vez). Calculamos y vemos que $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$; $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$; $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; Pero $27 + 64 = 91$, no es igual a 125. Es más, si tenemos una calculadora a mano podemos comprobar 91 no es un cubo, con lo cual 3 y 4 no forman parte de una terna "cúbica". Quizás deberíamos empezar con algo más sencillo, digamos 1 y 1. Tenemos $1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$, y no es difícil probar que 2 tampoco es un cubo. Tras intentar otras combinaciones, y ver que ninguna funciona, empezamos a pensar que quizás deberíamos hacernos la pregunta opuesta, es decir, probar que la suma de dos cubos no es nunca igual a otro cubo (nuestra ecuación no tiene soluciones).

Pero no encontrar tres números que cumplan nuestra ecuación no es una respuesta matemática. Podría ser que la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$ sí tenga solución, pero los números que la cumplen son demasiado grandes para encontrarlos con nuestra calculadora. Una respuesta matemática tiene que ser definitiva: puede ser una demostración de la no existencia de dicho números, o un ejemplo de tres números que sí cumplan la ecuación. El resto, pensar que se cumple o no, son intuiciones y conjeturas, que ayudan al progreso de las Matemáticas, pero que no quedarán escritas en el "libro de los resultados para siempre".

En 1637 Pierre de Fermat, un jurista francés que se dedicaba, con buen gusto, a las Matemáticas en su tiempo libre, dijo que no era posible. Leyendo un libro de matemáticas anotó algo como lo siguiente:

> He encontrado una prueba maravillosa de este hecho, pero el margen de este libro es pequeño para escribirla.

Fermat se preguntó lo mismo que hemos estado indagando más arriba, excepto que lo hizo de una manera general. Su observación es muy importante porque Fermat dijo que el teorema de Pitágoras **solo es válido para cuadrados**. Ni para cubos, ni para cuartas potencias, ni para ninguna potencia, sólo para cuadrados. Es un hecho general, soluciona de golpe todos los casos que se nos puedan ocurrir.

Pero Fermat no lo demostró. Quizás encontró que le hacía falta mucho más espacio que lo que él inicialmente pensó, porque la demostración nunca se encontró.

El resultado pasó a ser conocido en la comunidad matemática como el Último Teorema de Fermat. Un teorema un tanto particular, porque no tenía prueba. Así que mucha gente decidió cambiarle el nombre a la Última Conjetura de Fermat (que no suene tan bien como teorema, hay que reconocerlo). Esto sí que tenía sentido, sin demostración nos quedamos en buenas intenciones (matemáticas), pero no en resultados.

Puede que fuera por la manera en que el teorema (perdón, de momento conjetura) fue enunciado, en el margen de un libro, o porque es una generalización de algo bien conocido (el Teorema de Pitágoras, y éste sí es un teorema), simple de enunciar, no sabemos la razón pero sí sabemos que la última conjetura de Fermat se convirtió en un auténtico éxito. Matemáticos de todos los tiempos, genios y aficionados, de todos los países, pusieron sus esfuerzos en intentar encontrar una demostración. Gauss, Euler, Legendre, Dirichlet, Lebesgue, Sophie Germain, la lista de nombres de matemáticos asociados a la conjetura de Fermat contiene los nombres de muchos de los mejores matemáticos de siglos pasado. Algunos casos (cubos, cuartas potencias) se demostraron, pero el enunciado general se resistió. Y durante muchos años.

Porque debemos saltar en el tiempo hasta la segunda mitad del siglo XX para ver avances serios hacia la demostración. Y finalmente, en 1993, el matemático británico Andrew Wiles anunció una demostración del teorema. Una demostración que tardó 356 años en completarse, pero finalmente los matemáticos tenían una prueba de un resultado atractivo… o no. Porque el anuncio de una demostración no es la demostración misma, que necesita ser comprobada por árbitros independientes. Y los árbitros encontraron un error, la prueba no era totalmente correcta, y el último teorema de Fermat volvió de nuevo a ser degradado a conjetura, afortunadamente no por mucho tiempo. Al año siguiente, Wiles, con la ayuda de un antiguo alumno de doctorado suyo, Richard Taylor, corrigió los errores de la demostración (cuando, según cuenta el mismo Wiles, estaba a punto de tirar la toalla). En

1994 uno de los más famosos teoremas de la comunidad matemática recibió el visto bueno [11].

La demostración del último Teorema de Fermat es complicada, y requiere mucho conocimiento de diversas partes de las Matemáticas. Pero el resultado es algo muy bello, porque generaliza algo conocido, y su enunciado es muy simple. Nos dice que Pitágoras probó el único caso posible. Como dijo Russell, "la belleza de las matemáticas es austera", breve y simple. Y bello.

Una pequeña nota histórica para acabar esta parte: la demostración del Teorema de Fermat llegó un año tarde para Wiles, pues ya había cumplido los cuarenta y un años cuando la completó. La Medalla Fields, el equivalente matemático del Premio Nobel, viene con una restricción de edad (menor de 40 años); porque es un premio a la creatividad, y los matemáticos consideran que ésta tiene lugar cuando uno es joven.

Curiosamente todavía hay aficionados a las Matemáticas que buscan una demostración del teorema de Fermat que quepa en el margen de un libro. Hasta hace poco tiempo yo solía recibir, varias veces al año, un correo con una "demostración", pidiendo mi opinión. Algunas usan trucos un tanto complejos, cuesta encontrar el error, aunque la mayoría son escritos que desvarían en el terreno filosófico, con la creación de nuevos tipos de números y medidas pseudo-estadísticas, sin ningún sentido matemático.

Las conexiones de Galois

Me gustaría acabar esta charla con un último ejemplo de pasión y belleza de las matemáticas: la historia de Galois, como se le conoce en el mundo matemático. Évariste Galois vivió en Francia en el siglo XIX. Joven de carácter impulsivo e ideas revolucionarias, pasó tiempo en la cárcel, donde se enamoró de la hija del médico de la prisión. Para la desgracia de Galois, su amada ya estaba comprometida, aunque parece que ella correspondía, dentro de lo posible, al amor de Galois. El carácter impulsivo de nuestro héroe le llevó la tarde del 29 de mayo de 1832 a retarse en duelo con el prometido de su amor. Cuando Galois volvió a casa quizás se dio cuenta del enorme error que suponía haber retado en duelo a un capitán del ejército, y se pasó la noche escribiendo cartas de despedida a sus amigos y familiares. Y ordenando sus ideas matemáticas. Porque Galois había intentado publicar sus resultados, pero dado que los escribía como lo que vemos en la figura 6, no había tenido mucho éxito en dicha publicación.

A la mañana siguiente Galois perdió el duelo, y el 31 de mayo de 1832 moría de peritonitis en un hospital de París. A los 20 años de edad.

¿Qué es lo que escribió Galois aquella noche? Seguramente no fue tanto una demostración como poner en orden diversas ideas que ya se le habían ocurrido. El resultado principal de Galois dice que: “los cuerpos intermedios de una extensión separable y finita están en correspondencia biyectiva con los subgrupos del grupo que fija el cuerpo base” [6] y [4]. Vamos, algo tan complicado que uno no puede pensar que sea bello.

Figura 6. Apuntes matemáticos de Galois.

Pero lo es. De una belleza increíble, porque relaciona dos cosas aparentemente sin conexión: las ecuaciones algebraicas y los grupos de movimientos y simetrías.

Para entender un poco el trabajo de Galois, desde una perspectiva de búsqueda y sorpresa, debemos considerar la ecuación de segundo grado (de nuevo un poco de matemáticas, pero muy poco):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La solución de esta ecuación, o mejor dicho las soluciones, porque la mayoría de los casos son dos soluciones, vienen dadas por aquella fórmula “menos b más menos…”:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una nota personal: ésta es una de las fórmulas cuya demostración me acuerdo muy bien de haberla visto en el colegio, y se basa en una idea matemática muy utilizada, reducir un problema a un caso conocido. Entender esta demostración fue algo muy satisfactorio en mi vida, y quizás me hizo decantarme por las Matemáticas más adelante. Porque me dio dos certezas: que no hacía falta recordar la fórmula, pues podía demostrarla cuando quisiera. Y que la solución era cierta siempre, porque yo sabía un algoritmo (una demostración) que probaba su certeza.

Volviendo a la ecuación de segundo grado, uno se puede preguntar, como en el caso del teorema de Pitágoras, si es posible solucionar una ecuación de tercer grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

La respuesta es que sí es posible, aunque las fórmulas son bastante más complicadas, y no tan fáciles de recordar. Y la de cuarto grado también se puede resolver con raíces. ¿Cuándo paramos?

Un joven noruego, Niels Abel, demostró que la ecuación de quinto grado no tiene fórmula general que nos de las soluciones. Cada caso, de quinto grado, se debe resolver como un mundo aparte. Abel también murió joven, a los 25 años de edad, pobre, con tuberculosis. Para hacer su historia más triste, un par de días después de morir recibió una carta ofreciéndole un puesto de profesor en la Universidad de Berlín.

¿Pero dónde entra Galois en toda esta historia? Galois demostró, para alegría de todos los escolares del mundo, que a partir del quinto grado no existe solución por fórmula. No debemos temer que mañana se encuentre una solución a la ecuación de sexto grado que tengan que estudiar todos los niños del mundo.

Y lo más bello del resultado de Galois es que relaciona la existencia de soluciones con grupos de movimientos de figuras. Por ejemplo, consideremos por un momento la figura 7 que podemos ver más abajo. Aunque parezca algo muy complicado, es sencilla de hacer una vez que se entienden las Matemáticas que la justifican. Esta figura está relacionada con las permutaciones de cinco letras, es decir, con las 120 maneras diferentes en las que se pueden ordenar las letras A, B, C, D y E. No se puede negar que esta figura no tenga un cierto atractivo visual, y es natural entender que alguien, por curiosidad, se dedique a explorar los "giros" de dicha figura, es decir, de cuantas maneras podemos mover la figura pero que al final vuelva a su posición inicial.

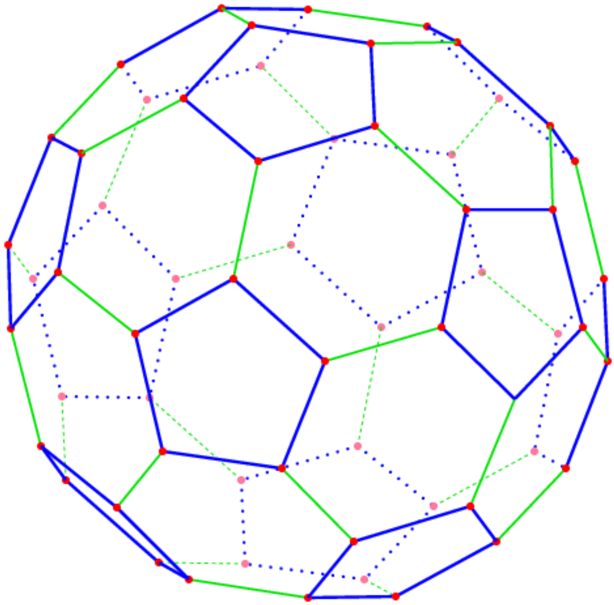


Figura 7. Elgrafo de Cayley del grupo alternativo de 5 letras.

Dicho ejercicio de curiosidad es, en cierto modo, algo natural y que uno podría encontrar en una revista de curiosidades geométricas (aunque no es un problema tan fácil). El resultado de Galois se relaciona con el conjunto de giros de esta figura, y de muchas otras. Aunque parezca increíble, el estudio de esta figura nos demuestra que la ecuación algebraica de quinto grado, no tiene solución. Precisamente en esto radica la belleza de la teoría de Galois, en que uno puede resolver un árido problema algebraico desde un punto de vista geométrico. Pero no fue un resultado que surgiera de golpe en la historia de las Matemáticas. Llevó muchos años de trabajo con ecuaciones de menor grado que ayudaron, sin lugar a dudas, a entender la estructura de las ecuaciones en general. Este es un resultado al que aspiraría tener asociado su nombre cualquier matemático, incluso sin saber (como sabemos ahora a posterior) la cantidad enorme de resultados que han surgido como consecuencia de esta teoría. Como digo, sin saber lo extremadamente importante que el resultado es, a un matemático le atrae la conexión que realiza entre el Álgebra y la Geometría, en un enunciado simple.

El resultado de Galois, la importancia de la geometría en la resolución de ecuaciones algebraicas, también se puede entender desde el punto de vista contrario: la teoría de Galois resuelve problemas de geometría plana que se plantearon los griegos. Por ejemplo, un problema del que todo el mundo ha oído hablar es “la cuadratura del círculo”. Esto, en contra de la idea popular, no consiste en hacer el círculo cuadrado, porque no se puede, evidentemente, y no tiene sentido. El problema consiste en, dado un círculo, construir un cuadrado con la misma área, utilizando solo las herramientas de los griegos: la regla y el compás. La regla y el compás de los griegos: la regla no tiene marcas de longitud, sirve solo para trazar rectas, y el compás se cierra si lo levantamos del papel, solo nos vale para hacer círculos y transportar distancias en el papel. El resultado de Galois demuestra que la cuadratura del círculo (o la trisección del triángulo) no es posible con regla y compás.

Conclusión

> “*If I were to awaken after having slept for a thousand years, my first question would be: Has the Riemann hypothesis been proven?*” David Hilbert.

Empezaba esta charla comentando cómo de difícil puede ser “lo mío”. Pero, tras estas palabras, quizás algún lector considere mirar las Matemáticas avanzadas desde un punto de vista diferente, y con esa esperanza me atrevo a, en unas breves líneas, explicar “lo mío”. Esto empezó con Euclides, que formuló los axiomas de la geometría plana. Euclides vino a decir algo así como lo siguiente: “Si queremos estudiar la geometría de las figuras del plano debemos admitir cinco propiedades que no se pueden demostrar. Admitimos éstas, y demostramos el resto”. Estas propiedades son los cinco postulados de Euclides. Los cuatro primeros son fáciles; por ejemplo, dados dos puntos existe un segmento que los une. Sin embargo, el quinto tiene una formulación extremadamente diferente de los otros cuatro, haciendo de dicha proposición algo que podemos fácilmente clasificar como feo. La formulación original es muy complicada, y matemáticos de todas las épocas intentaron reducirlo a algo más simple. Lo más sencillo a lo que se llegó es algo que no es difícil de entender, pero no es simple: “Dada una recta y un punto no situado en ella, existe una sola línea paralela a la dada que pasa por el punto dado”. Aunque no es muy difícil, no es tan bonito como “por dos puntos pasa una sola recta”.

Por eso los matemáticos se obsesionaron en intentar demostrar este postulado como consecuencia de los otros, con lo cual, lo podrían quitar de la lista de "verdades que hay que creer". Porque las verdades deben ser bonitas.

Así pues, durante muchos siglos se intentó eliminar el quinto postulado. Hasta que en 1830, un matemático llamado Lobachevsky demostró que existen geometrías que no cumplen el postulado de las paralelas, pero sí el resto de los postulados de Euclides. Y son geometrías consistentes con las reglas de la lógica matemática. Simplemente tienen otras propiedades. Por ejemplo, es bien sabido que en la geometría tradicional los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados. En la geometría de Lobachevsky, los ángulos suman menos de 180 grados. Y no solo eso, la suma de los ángulos está relacionada con el área del triángulo.

Siguiendo los pasos de Lobachevsky uno puede construir figuras como la de más abajo, que muestra una serie de "baldosas" triangulares cubriendo un espacio con geometría diferente de la nuestra. Hacia esa época, un gigante de las Matemáticas, Georg Riemann estudió propiedades de superficies. Y resulta que dichas superficies están relacionadas de una manera natural con los triángulos de la geometría de Lobachevsky. Es más, si uno quiere estudiar con más detalle la relación entre los triángulos de Lobachevsky y las superficies de Riemann se encontrará con los *espacios de Teichmüller* de los que hablaba al principio.

Y así resulta que algo complicado, los *espacios de Teichmüller*, surgen de la búsqueda matemática de la belleza: el quinto postulado de Euclides es feo. Nunca se sabe hasta dónde nos puede llevar la investigación matemática: desde Euclides hasta nuestros siglos, una línea común de pensamiento.

Espero, aunque no sé si lo habré conseguido, haber convencido a alguien que, detrás de las demostraciones áridas y los teoremas, existe una belleza que hace del edificio de las Matemáticas algo interesante. Y que las Matemáticas son una ciencia viva, descubierta por gente viva que busca la belleza.

Muchas gracias.

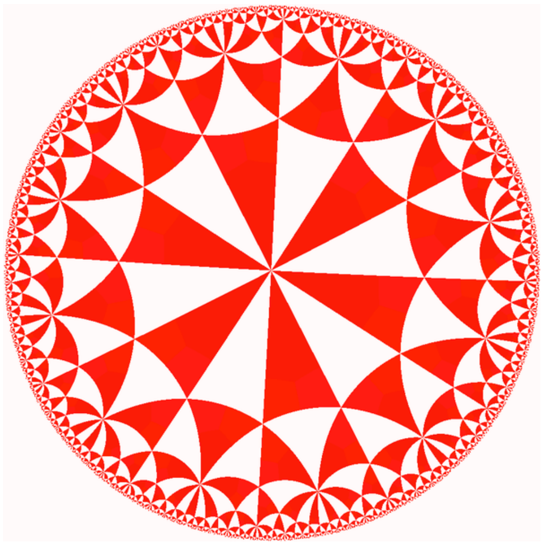


Figura 8. Un triángulo hiperbólico cuyos ángulos suman 150 grados.

Referencias Bibliográficas

[1] ARES-GASTESI, P. "Coordinates for Teichmüller spaces of b-groups with torsion", Ann. Acad. Sci. Fenn. 20 (1995), 279-300.

[2] ARES-GASTESI, P. and VENKATARAMANA, T. N. "The big Picard theorem and other results on Riemann surfaces", L'Enseignement Mathématique (2) 55 (2009), 127-137.

[3] CASSELMAN, B. "All for Nought", American Mathematical Society, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-india-zero

[4] EVERITT, B. "Symmetries of Equations: An Introduction to Galois Theory", http://www-users.york.ac.uk/~bje1/galnotes.pdf

[5] HALES, T. C. "The Honeycomb Conjecture". Discrete and Computational Geometry 25 (2001), 1-22.

[6] JACOBSON, N. *Basic Algebra I*, Dover, 2009

[7] LOCKHART, P. *A mathematician's lament*, Bellevue Literary Press, 2009.

[8] RUSSELL, B. *A History of Western Philosophy*, Simon & Schuster, 1945.

[9] THURSTON, W. Zippers and univalent functions, The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985) Math. Surveys Monogr., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 185-197.

[10] WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press 1927.

[11] WILES, A. "Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem", Annals of Math. 141 (1995), 443-551.

Pablo Arés Gastesi es licenciado en Matemáticas (1988) por la Universidad Complutense de Madrid y Premio Extraordinario fin de carrera. Su especialización fue en Análisis, considerándose como una generalización del Cálculo. Obtuvo su doctorado en Matemáticas en la Stony Brook University en 1993, en el estado de Nueva York. Su Tesis fue en el área de Superficies de Riemann, esto es, objetos matemáticos donde se encuentran el Cálculo y la Geometría.

Tras acabar su doctorado realizó una estancia postdoctoral en Finlandia, la cuna del Análisis de Variable Compleja. Al finalizar dicho período se marchó a la India, con becas postdoctorales. Durante dieciocho meses estuvo en el Tata Institute of Fundamental Research (TIFR), Bombay, y otros seis meses en The Institute of Mathematical Sciences, Madrás. En el momento en que el TIFR le ofreció un puesto de trabajo permanente regresó a Bombay, donde permaneció hasta su vuelta a España, en el año 2010.

En Bombay investigó en Variable Compleja, publicando artículos en revistas matemáticas internacionales. La oportunidad de asistir a congresos de Matemáticas, así como de impartir charlas de investigación y popularización, le permitieron viajar a lo largo de la India. En Bombay impartió clases en distintos Masters y en programas de Doctorado, tanto en el Tata Institute como en la Universidad de Bombay. Además de las Matemáticas, durante su estancia en la India, aprendió la instalación de servidores y de redes locales, lo que le abrió nuevas oportunidades para viajar por el país.

En el año 2010 decidió regresar a España, a la Universidad CEU San Pablo. Desde entonces ha impartido clases de Matemáticas y Estadística en distintos grados de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, así como también, en la Escuela Politécnica Superior. Participa activamente en los programas Bilingües de la Universidad, tanto en el Programa con Boston como en el Programa con Chicago. Uno de los temas que más le interesan hoy en día es la enseñanza de las Matemáticas a alumnos de titulaciones lejanas, o incluso opuestas, a dicha materia. Con ocasión de sus vacaciones anuales en la India imparte charlas de popularización de Matemáticas avanzadas en la University of Hyderabad.

En sus ratos libres escucha música de Mozart o elabora cerveza en casa, sus principales hobbies.

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad CEU San Pablo
Julián Romea 23, 28003 Madrid
Teléfono: 91 456 63 00, Fax: 91 554 84 96
ecodec@ceu.es, **www.ceu.es/usp**