CEU
Universidad
San Pablo

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA COMUNICACIÓN.

DEPARTAMENTO: Psicología y Pedagogía.

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO.

CURSO ACADÉMICO 2014/2015 – CONVOCATORIA ORDINARIA.

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y SU APLICACIÓN DIDÁCTICA EN LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

Vº. Bº. :

Alumno: D. Carlos Córdoba Muñoz   Directora: Dña. Mª Carmen Ródenas Escribano

ÍNDICE

Resumen 3

Introducción 4

Aplicación didáctica de la sucesión de Fibonacci en las matemáticas de la Educación Secundaria 6

1. Tercero ESO 6
   - 1.1. Fibonacci 6
   - 1.2. Contenidos 8
     - 1.2.1. Sucesiones 9
     - 1.2.2. Funciones 10
     - 1.2.3. Aplicaciones en distintas disciplinas 13
       - 1.2.3.1. Cuerpo Humano 13
       - 1.2.3.2. Naturaleza 15
       - 1.2.3.3. Física 16
       - 1.2.3.4. Arquitectura y Arte 17
       - 1.2.3.5. Música 18
       - 1.2.3.6. Cine y Literatura 18
     - 1.2.4. Curiosidades y juegos matemáticos 19
   - 1.3. Recursos materiales 28
   - 1.4. Actividades 29
   - 1.5. Objetivos didácticos 29
   - 1.6. Competencias 30

2. Cuarto ESO 32
   - 2.1. Contenidos 32
     - 2.1.1. Números combinatorios y Binomio de Newton 33
     - 2.1.2. Geometría 36
       - 2.1.2.1. Triángulo áureo 37

2.1.2.2. Pentágono áureo 39
2.2. Actividades 41
2.3. Objetivos didácticos 41
2.4. Competencias 42

3. Bachillerato I 43
3.1. Contenidos 43
3.1.1. Límites 44
3.1.2. Curiosidades y juegos matemáticos 45
3.2. Actividades 50
3.3. Objetivos didácticos 50

Evaluación de resultados y conclusiones 51

Bibliografía y fuentes 52

RESUMEN

Una forma de mejorar la percepción y la predisposición del alumnado hacia las Matemáticas en la Educación Secundaria es promover el sentido real de éstas. Este aspecto se deja de lado en la enseñanza escolarizada en muchas ocasiones, lo que provoca que el alumno no consiga situarse en la asignatura, sintiéndose perdido porque no sabe qué está haciendo realmente, ni para qué.

El presente trabajo consiste en acercar las Matemáticas al alumnado, a partir de la sucesión de Fibonacci, su relación con el número áureo, sus aplicaciones y curiosidades, tanto matemáticas como en otras áreas, de una forma atractiva e interdisciplinar.

PALABRAS CLAVE: Percepción, Predisposición, Sucesión, Interdisciplinar.

ABSTRACT

One way to improve the perception and willingness of students towards Mathematics in the Secondary Education is to promote the real meaning of these. This aspect is neglected in teaching schooled on many occasions, causing the student fails to be in the subject, feeling lost because they do not know what is really doing, or why.

The present work is to bring mathematics to students, from the Fibonacci sequence, their relationship to the golden ratio, applications and curiosities, both in mathematics and in other areas, in an attractive and interdisciplinary way.

KEYWORDS: Perception, Willingness, Sequence, Interdisciplinary.

INTRODUCCIÓN

A través de la sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las Matemáticas de la Educación Secundaria (ESO), se intentará que el alumno disfrute de las Matemáticas. Que el alumno disfrute, a la vez que adquiere conocimientos, es la principal idea, destacando también la interdisciplinariedad de las Matemáticas en la vida cotidiana, y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos.

Las Matemáticas en la Educación Secundaria son una asignatura poco agradable, como norma general, para el alumnado. “Las Matemáticas son una asignatura difícil de enseñar y de aprender”. (Cockcroft, 1985, p. 82)

Es por ello que se hace imprescindible que el alumno descubra su belleza, y porque no, hasta le resulte divertido su estudio. Y si queremos que el alumno disfrute de ellas, cuanto antes mejor.

Debido a la amplitud de aplicaciones de la sucesión de Fibonacci, el trabajo se distribuirá en tres bloques:

- Integración la sucesión de Fibonacci a partir de 3 ESO, por ser el primer año que el alumno estudia las Sucesiones.
  En este bloque se describirá ampliamente la sucesión, haciendo hincapié la interdisciplinariedad de las Matemáticas en la vida cotidiana, y como las Matemáticas nos ofrecen curiosidades y juegos, que motiven al alumno al fomento de su estudio.

- El segundo bloque se sitúa en 4 ESO, curso donde el alumno conoce el concepto de sucesiones, pero en el que aprenderá a relacionar unos conceptos matemáticos con otros.

- Por último, la aplicación didáctica de la sucesión de Fibonacci en Bachillerato I, como una excelente herramienta para introducir el concepto de límite.

A través de los distintos bloques podremos observar la importancia que tiene el profesorado por motivar al alumnado y favorecer el interés hacia la asignatura, mediante la historia de las matemáticas, biografías, anécdotas y problemas de entretenimiento, y como puede ayudarle a tener pensamientos interdisciplinarios que les permitan resolver los problemas complejos de la realidad, y descubrir los vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos.

APLICACIÓN DIDÁCTICA DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI EN LAS MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

El presente trabajo no consiste en realizar una Unidad Didáctica, sino transmitir la belleza de las Matemáticas y enfatizar el enfoque funcional de éstas.

Según el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, y el Decreto 67/2008, de 19 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato; la sucesión de Fibonacci, con sus múltiples aplicaciones en distintitas ramas, es un excelente elemento introductorio a ciertos contenidos de la Enseñanza Secundaria, y en particular, para Tercero ESO.

1. TERCERO ESO

Este curso, al ser la primera vez que el alumnado se familiariza con las sucesiones, es el curso, en el que más encaja la sucesión de Fibonacci.

Tal y como se describe en la introducción del presente trabajo, debemos integrar la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina y motivar al alumnado y favorecer el interés hacia las matemáticas, mediante biografías, anécdotas y problemas de entretenimiento.

Es por ello, que en primer lugar, el alumnado debe conocer quién fue Fibonacci y lo aspectos principales de su obra.

1.1. Fibonacci

Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (1170 - 1250), también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración indo-arábigo actualmente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10, o decimal) y un dígito de valor nulo: el cero; y por idear la sucesión de Fibonacci.

El apodo de Guglielmo (Guillermo), padre de Leonardo, era Bonacci (simple o bien intencionado). Leonardo recibió póstumamente el apodo de Fibonacci (por filius

Bonacci, hijo de Bonacci). Guglielmo dirigía un puesto de comercio en Bugía, en el norte de África, y de niño Leonardo viajó allí para ayudarlo. Allí aprendió el sistema de numeración árabe.

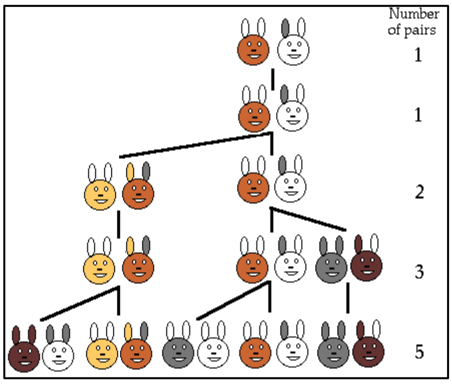
Consciente de la superioridad de los numerales árabes, Fibonacci viajó a través de los países del Mediterráneo para estudiar con los matemáticos árabes más destacados de ese tiempo, regresando a Italia, cerca de 1200. En 1202, a los 32 años de edad, publicó lo que había aprendido en el Liber Abaci. Este libro mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo en la Europa ilustrada, y tuvo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo.

Leonardo fue huésped del Emperador Federico II, que se interesaba por las matemáticas y la ciencia en general. En 1240, la República de Pisa lo honra concediéndole un salario permanente (bajo su nombre alternativo de Leonardo Bigollo).

La sucesión fue descrita por Fibonacci en su libro Liber Abaci, publicado en 1202, como la solución a un problema de la cría de conejos (Ilustración 1):

«Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir»

Ilustración 1. Solución problema cría de conejos.



Fuente: Knott, 2010a.

La sucesión de Fibonacci es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…

La sucesión comienza con los números 1 y 1, y a partir de estos, cada término es la suma de los dos anteriores. Es la relación de recurrencia que la define.

Esta sucesión, como veremos más adelante, tiene numerosas aplicaciones en la vida cotidiana.

Una de las propiedades más curiosas de la sucesión de Fibonacci, es que el cociente de dos números consecutivos, se aproxima a la denominada razón dorada, sección áurea o divina proporción. Este número, se lo nombra con la letra griega Phi (Φ), tiene un valor de $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1.61803…, y la sucesión formada por los cocientes (resultados de la división) de números de Fibonacci consecutivos converge, rápidamente, hacia el número áureo.

Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número, ya que lo consideraban el ideal de la belleza. Un objeto que tuviese una proporción (por ejemplo, entre el alto y el ancho) que se ajustase a la sección áurea era estéticamente más agradable que uno que no lo hiciese.

1.2. Contenidos

Según el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, se seleccionan los siguientes contenidos de Tercero ESO, que se pueden enseñar a través de la sucesión de Fibonacci.

Bloque 3. Álgebra.

- Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes.
- Progresiones aritméticas y geométricas.
- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.

- Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales.

Bloque 4. Geometría.

- Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.

Bloque 5. Funciones y gráficas.

- Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.
- Elaboración de gráficas continuas o discontinuas a partir de un enunciado, una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla.
- Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

1.2.1. Sucesiones

Dentro del Bloque 2. Algebra, los alumnos de Tercero ESO, estudian las sucesiones, siendo de gran utilidad la aplicación didáctica de la sucesión de Fibonacci.

Se llama sucesión a un conjunto de números dispuestos uno a continuación de otro.

$a_{1,}\ a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$

Los números $a_{1,}\ a_2, a_3, a_4$, ..., se llaman términos de la sucesión.

El subíndice indica el lugar que el término ocupa en la sucesión.

El término general es a_n, es una expresión que nos permite determinar cualquier término de la sucesión.

Determinación de una sucesión:

a) Por el término general
b) Por una Ley de recurrencia: Se dice que a_n es una sucesión recurrente cuando sus términos vienen definidos en función de los que le preceden

La sucesión de Fibonacci, sucesión recurrente, sigue una expresión sencilla:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

partiendo de dos primeros valores predeterminados:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

se obtienen los siguientes números:

$a_3 = 2$

$a_4 = 3$

$a_5 = 5$

$a_6 = 8$

$a_7 = 13$

$a_8 = 21$

para n = 3 , 4, 5, 6, 7, 8,….

1.2.2. Funciones

Con la aplicación didáctica de la sucesión de Fibonacci a las funciones, conseguiremos un excelente elemento introductorio para éste contenido (Bloque 5. Funciones y gráficas). También el alumno aprenderá a relacionar unos conceptos matemáticos con otros, pues según se desarrolla el concepto de función, aparecen otros contenidos de Tercero ESO, tales como la resolución de ecuaciones de segundo grado y las progresiones aritméticas y geométricas (Bloque 2. Algebra).

Los números de Fibonacci tienen la función generadora:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Con las condiciones iniciales, $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$, la ecuación de esta relación de recurrencia es una ecuación de segundo grado completa:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Para obtener las soluciones utilizamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y sus raíces son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De esta manera, la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci tendrá la forma:

$$f_n = b\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Si se toman en cuenta las condiciones iniciales, entonces las constantes b y d satisfacen la ecuación anterior cuando n=0 y n=1, es decir, que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} b + d = 0 \\ b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene:

$b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Por lo tanto, cada número de la sucesión de Fibonacci puede ser expresado como

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para simplificar aún más esta expresió, es necesario considerar el número áureo.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Si comparamos,

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots,$

$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.61803\ldots,$

Observamos que poseen la misma parte decimal. En otras palabras.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

El único número que cumple esa propiedad es el número de oro, de manera que la expresión se reduce a:

$$f_n = \frac{\Phi^n - (1-\Phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Esta fórmula permite encontrar el enésimo número de Fibonacci sin la necesidad de producir todos los números anteriores. Curiosamente esta fórmula depende exclusivamente del número áureo (número irracional).

Y es que el número de oro posee unas sorprendentes propiedades matemáticas.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = \cdots.$$

Construyamos ahora la progresión geométrica.

$1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \ldots..$

Se trata de una progresión geométrica de razón Φ pero al mismo tiempo cada término es también la suma de los dos anteriores. Es la única sucesión que participa al mismo tiempo de la naturaleza de la progresión aritmética y geométrica, de ahí se deriva esa maravillosa perfección en las figuras cuya geometría y dimensiones están vinculadas al número de oro.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} =$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Y, en general

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$$

A su vez

$$\Phi^n = \Phi \cdot \Phi^{n-1}$$

Siguiendo con las curiosidades matemáticas, una forma de representar el número de oro es mediante la sucesión de radicales consecutivos.

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}.$$

1.2.3. Aplicaciones en distintas disciplinas

Conocida la sucesión de Fibonacci por el alumno, ahora queda descubrirle como una sucesión, descrita como la solución a un problema de la cría de conejos, se encuentra en nuestra vida cotidiana, y muy válida para explicar los contenidos incluidos en el Bloque 4. Geometría.

1.2.3.1. Cuerpo Humano

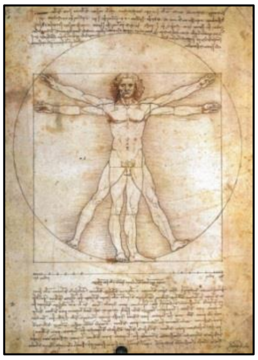
Los números Fibonacci se encuentran en la estructura del cuerpo humano (Fotografía 1). El hombre tiene cinco apéndices (dos brazos, dos piernas y una cabeza); cada brazo y cada pierna se componen de tres partes, acabando la última de ellas en cinco apéndices (cinco dedos), divididos en tres pequeñas falanges cada uno, excepto dos de ellos que solo poseen dos. A su vez la cabeza tiene tres rasgos salientes (dos orejas y una nariz), y tres rasgos incrustados (dos ojos y una boca). Por último, el cuerpo humano tiene cinco sentidos físicos: la vista, el oído, el olfato, el gusto y el tacto.

Fotografía 1. Mano humana.

Fuente: Capitanio y Manenti, 2009.

Con su conocido dibujo del hombre de Vitrubio, Leonardo da Vinci[1] ilustró el libro "La Divina Proporción" de Luca Pacioli[2], editado en 1509 (Ilustración 2). En dicha obra se describen cuáles han deben ser las proporciones de las creaciones artísticas. Pacioli propone una figura humana en la que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo son proporciones áureas. Así, en este hombre armónicamente perfecto para Pacioli, el cociente entre la altura del hombre -el lado del cuadrado-y la distancia del ombligo a la punta de la mano -el radio de la circunferencia- es el número áureo.

Ilustración 2. El hombre de Vitrubio.



Fuente: Capitanio y Manenti, 2009.

[1] (Vinci, Toscana, 1452 - Amboise, Turena, 1519). Artista, pensador e investigador italiano que, por su insaciable curiosidad y su genio polifacético, representa el modelo más acabado del sabio renacentista. (Biografías y Vidas, 2015b).

[2] (San Sepolcro, 1445 - Roma, 1514). Matemático italiano. (Biografías y Vidas, 2015c).

1.2.3.2. Naturaleza

El número de espirales que pueden verse en numerosas variedades de flores y frutos, se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión. El ejemplo más frecuentemente citado es la de la flor del girasol (Fotografía 2), cuya gran mayoría posee 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144 respectivamente.

Fotografía 2. Espirales en girasol.

Fuente: Knott, 2010a.

Las margaritas también obedecen a esta secuencia, y acomodan sus semillas en forma de 21 y 34 espirales. Las piñas, prácticamente de cualquier variedad que encuentres, también presentan un número de espirales que coincide con dos términos de la sucesión de los números de Fibonacci (Fotografía 3), por lo general 8 y 13 o 5 y 8. Cuando uno comienza a bucear un poco en la forma en que los vegetales crecen o acomodan sus semillas, pareciera que se han programado en sus códigos genéticos los términos de la sucesión de Fibonacci. Sin embargo, solo se trata de los resultados de la evolución, una cuestión meramente práctica que coincide con los números de Leonardo.

Fotografía 3. Espirales en piña.

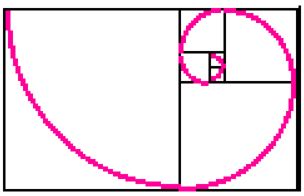
Fuente: Knott, 2010a.

Simplemente, las plantas que acomodan sus semillas de esta forma logran “meter” una mayor cantidad de ellas en el mismo espacio, “economizando” valiosos recursos. A lo largo de los milenios, la selección natural las ha premiado con la proliferación, a la vez que ha extinguido a las menos eficientes. La razón por la que los números de Fibonacci pueden encontrarse en tantos ejemplos de la naturaleza, también se relaciona estrechamente con el nexo que existe entre esta sucesión y el número áureo, motivo por el cual los griegos encontraban “tan naturales y agradables” las obras que se basaban en él.

La espiral logarítmica basada en la relación áurea o espiral de Durero (Ilustración 3), también la podemos observar en la naturaleza (Fotografía 4).

Si partimos de un cuadrado de lado 1 y añadimos otro cuadrado de lado también igual a 1, formamos un rectángulo de 2x1. Si a este rectángulo le añadimos otro cuadrado de 2x2, formamos otro rectángulo de 3x2 (siguiendo la serie de Fibonacci) y después un cuadrado de 3x3 teniendo un rectángulo de 5x3 y así sucesivamente. Trazando un cuarto de círculo con origen del mismo desde un vértice de cada cuadrado obtendremos la espiral de Durero.

Ilustración 3. Espiral de Durero.



Fuente: Knott, 2010a.

Fotografía 4. Concha.

Fuente: Knott, 2010a.

1.2.3.3. Física

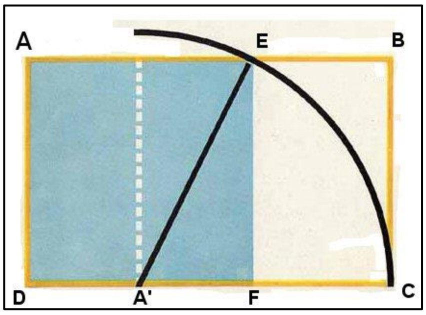
Si se colocan dos láminas planas de vidrio en contacto y se hace que unos rayos luminosos las atraviesen, algunos (dependiendo del ángulo de incidencia) las atravesarán sin reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión. El rayo que no sufre reflexión tiene sólo una trayectoria posible de salida; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco, y así sucesivamente. Tenemos aquí nuevamente una sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8... Si se aumenta el número de reflexiones (n), el número de trayectorias posibles sigue una sucesión de Fibonacci.

1.2.3.4. *Arquitectura y Arte*

El número áureo se representa con la letra griega Φ (Phi), en honor al escultor griego Fidias. El número áureo se define como la relación o proporción entre dos segmentos de una recta, que están en la misma proporción que la suma de ambos segmentos y el segmento más largo. Es decir, si los segmentos son a y b, y a>b, entonces $\Phi = \frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$. La solución positiva de segundo grado es 1.61803398874989…

Para construir un rectángulo áureo (Ilustración 4), a partir de un cuadrado de lado DF, basta con determinar el punto medio A´, y trazar, con centro en el punto A´, una circunferencia que pase por uno de los vértices del lado opuesto, por ejemplo el E, obtenemos el punto C, con lo que podremos construir el rectángulo áureo.

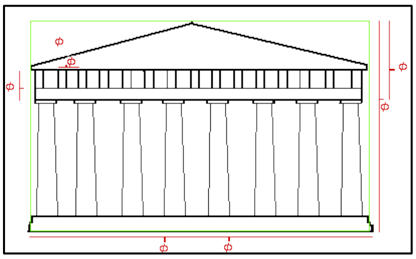
Ilustración 4. Rectángulo áureo.



Fuente: Capitanio y Manenti, 2009.

Lo increíble del rectángulo áureo es que se ha ocupado en arquitectura, como las pirámides de Egipto, el Partenón (Ilustración 5), o también en el diseño de las tarjetas de crédito, cajetillas de tabaco, etc. Esto no es una coincidencia ya que el número áureo representa belleza y equilibrio, por ende nuestro subconsciente se "enamora" de estos objetos.

Ilustración 5. Partenón.



Fuente: Knott, 2010b.

1.2.3.5. Música

La proporción áurea y la sucesión de Fibonacci tienen innumerables relaciones con la música. Se utilizan tanto en obras y composiciones como a la hora de construir ciertos instrumentos. El número áureo lo usaba Stradivarius[3] para calcular la ubicación exacta de los oídos o efes en la construcción de sus famosos violines y en las distancias entre las distintas partes del violín, como por ejemplo, entre el traste y el cuerpo.

En el piano, si nos detenemos en el séptimo número de la sucesión de Fibonacci (13), comprobamos que en la secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… se tiene que 13 son los semitonos de una escala cromática, 8 son las notas de la escala principal (notas blancas), 5 son las notas de la escala pentatónica (negras), en grupos de 2 y 3 teclas.

1.2.3.6. Cine y Literatura

En la película "El Código da Vinci", basada en la novela de misterio escrita por Dan Brown, aparece la Sucesión de Fibonacci en varias ocasiones. Al principio aparece en la escena del crimen del Gran Maestre de la orden del Priorato de Sion: 13-3-2-21-1-1-8-5. Como se ve son los primeros ocho números de Fibonacci desordenados. Posteriormente estos dígitos ordenados se convertirán en el número de cuenta secreta que da acceso al gran Secreto guardado por la Orden.

En cuanto a la literatura, no podemos dejar de mostrar al alumno el siguiente soneto de Rafael Alberti[4] (1946, Proemio):

---

[3] (Cremona, actual Italia, 1644 - 1737). Luthier italiano. (Biografías y Vidas, 2015a).
[4] (Puerto de Santa María, 1902 - 1999). Poeta español, miembro de la Generación del 27. (Biografías y Vidas, 2015d).

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

1.2.4. Curiosidades y juegos matemáticos

Una vez que el alumno se ha familiarizado con la sucesión de Fibonacci, y como se encuentra en la vida cotidiana, se pueden plantear problemas matemáticos recurrentes que hagan, por qué no, divertidas las matemáticas.

Estos problemas, además de divertir al alumno con las Matemáticas, fomentan la adquisición de competencias, asientan los objetivos, e invita al alumno, a realizar ejercicios de cálculo mental.

A continuación exponemos algunos que se han elegido a nivel 3 ESO.

a) La suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci es igual a 11 veces, el 7º elemento de ese grupo (Ilustración 6).

Ilustración 6. Cálculo 10 elementos consecutivos sucesión Fibonacci

Término	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**7º**	8º	9º	10
Elemento Fibonacci	1	1	2	3	5	8	**13**	21	34	55
Suma 10 elementos consecutivos	1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143									
11 veces el 7º elemento	11 x 13 = 143									

Fuente: Elaboración propia.

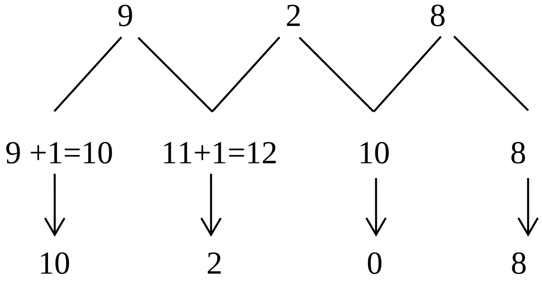
Con objeto de demostrar esta propiedad de la sucesión de Fibonacci solicitaremos a un alumno que escriba en la pizarra un par de enteros positivos cualesquiera (uno debajo del otro), que los sume y obtenga un tercero, que debe describir debajo del segundo; que sume los dos últimos números y obtenga un cuarto, prosiguiendo de esta forma hasta formar una columna de diez números. Es decir, ha de escribir los diez primeros términos de una sucesión generalizada de Fibonacci, donde cada término es suma de los dos que le preceden, exceptuados los dos primeros, que son arbitrarios.

Hecho esto, solicitamos a la clase que realice el sumatorio con la calculadora. Trazamos una raya por debajo de los diez sumandos, e inmediatamente, sin calculadora, y mucho antes que hayan finalizado el sumatorio con la calculadora, escribimos la suma. ¿Cómo?

La clave consiste en multiplicar por 11 el séptimo de los números a sumar, operación que fácilmente se realiza de cabeza.

Supongamos que el séptimo número sea 928 (Ilustración 7). Anotamos ya la cifra 8, que será la última cifra de la suma. Sumamos 8 y 2, y obtenemos 10. Escribimos en la suma un 0 inmediatamente al lado del 8, y llevamos 1. La suma del siguiente par de cifras, 9 y 2, es 11. Añadimos el 1 que arrastrábamos, y tenemos 12. Escribirnos el 2 a la izquierda del 0 en la suma, y seguimos llevando 1, que sumaremos al 9, y en la suma anotamos 10 a la izquierda del 2. La suma, ya terminada, es 10.208. En resumen, se suman las cifras por pares de derecha a izquierda, llevando 1 cuando sea necesario, y terminando con la última cifra de la izquierda.

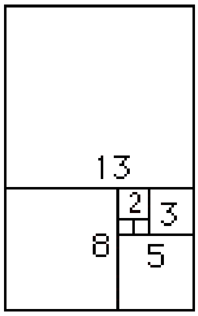
Ilustración 7. 928 x 11.



Fuente: Elaboración propia.

b) Usando los términos de la sucesión de Fibonacci podemos dibujar rectángulos de dimensiones iguales a los términos de la sucesión (Ilustración 8). Los rectángulos con estas dimensiones encajan perfectamente entre sí, como piezas de un puzle formando cuadrados, de tamaños progresivamente mayores.

Ilustración 8. Rectángulos de Fibonacci.



Fuente: Knott, 2010a.

La explicación es sencilla. Sumando los productos de los términos consecutivos de la sucesión en la forma.

- $(1\cdot1) + (1\cdot2) + (2\cdot3) = 3^2$, obtenemos el cuadrado del último término.
- $(1\cdot1) + (1\cdot2) + (2\cdot3) + (3\cdot5) + (5\cdot8) + (8\cdot13) + (13\cdot21) = 21^2$
- $(1\cdot1) + (1\cdot2) + (2\cdot3) + (3\cdot5) + (5\cdot8) + (8\cdot13) + (13\cdot21) + (21\cdot34) + (34\cdot55) + (55\cdot89) + (89\cdot144) = 144^2$

c) Cualquier número natural se puede escribir mediante la suma de un número limitado de términos de la sucesión de Fibonacci, cada uno de ellos distinto a los demás.

véase ejemplo,

17 = 13 + 3 + 1

d) Cada número de Fibonacci es el promedio del término que se encuentra dos posiciones antes y el término que se encuentra una posición después.

$$f_n = \frac{f_{n-2} + f_{n+1}}{2}$$

véase ejemplo,

1 – 1 – 2 – 3 – **5** – 8 – **13** – **21** – 34 – 55 – 89 – 144 – 233

$$f_7 = \frac{f_5 + f_8}{2} = \frac{5+21}{2} = 13$$

e) La suma de los n primeros números es igual al número que ocupa la posición n+2 menos uno.

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

véase ejemplo,

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – **13** – 21 – 34

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 =$$

$$= 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33 = 34 - 1 = f_{n+2} - 1$$

f) El máximo común divisor de dos números de Fibonacci es otro número de Fibonacci.

$$\text{mcd}\ (f_n, f_m) = f_{\text{mcd}(n,m)}$$

véase ejemplo,

Si $f_8 = 21$ y $f_{12} = 144$, entonces m = 8, n = 12,

por lo que el mcd(m, n) = mcd(8, 12) = 4 y

el mcd (f_8, f_{12}) = (21, 144) = 3 = f_4

g) Si n es divisible entre m, entonces f_n es divisible entre f_m.

véase ejemplo,

$f_{10} = 55$ y $f_5 = 5$, $\frac{10}{5} = 2$

entonces $\frac{f_{10}}{f_5} = \frac{55}{5} = 11$

h) f_n es par, sí y sólo sí, n es múltiplo de 3.

véase ejemplo,

$f_3 = 2,\ f_6 = 8,\ f_9 = 34,\ f_{12} = 144, \ldots$

i) A excepción del 3, todo número de Fibonacci que sea primo tiene también subíndice primo.

véase ejemplo,

89 = f_{11}. El 89 es primo y el 11 también

j) Dos números de Fibonacci consecutivos cualesquiera son siempre primos entre sí.

véase ejemplo,

$f_3=2$

$f_4=3$

$f_5=5$

2 es primo con 3 y 3 es primo con 5

k) El cuadrado de un término de la sucesión de Fibonacci es igual al producto de los términos que quedan a su derecha e izquierda respectivamente, aumentado o disminuido en una unidad. Esta diferencia va haciéndose alternativamente positiva y negativa.

$f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 \pm 1$

véase ejemplo,

$f_3=2$

$f_4=3$

$f_5=5$

Obtenemos, $2 \cdot 5 = 3^2 + 1$

l) La suma de los cuadrados de dos números de Fibonacci consecutivos fn y fn+1 es igual al término de Fibonacci de orden $f_{(2 \cdot n+1)}$.

$(f_n)^2 + (f_{n+1})^2 = f_{(2 \cdot n+1)}$

véase ejemplo,

$f_3=2$

$f_4=3$

$2^2 + 3^2 = 13 \longrightarrow f_{(2 \cdot 3+1)} = f_7 = 13$

m) Cualesquiera cuatro términos de Fibonacci consecutivos A, B, C y D, verifican que:

$C^2 - B^2 = A \cdot D$

véase ejemplo,

$89^2 - 55^2 = 144 \cdot 34$

Es decir, la diferencia entre los cuadrados de los términos medios es igual al producto de los términos de los extremos.

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144 – 233

n) Comprobar si un número entero positivo es un número de Fibonacci

Si N es un número entero positivo, N es un número de Fibonacci si y sólo si, $5 \cdot N^2+4$ o $5 \cdot N^2-4$ es un cuadrado perfecto.

Como podéis ver la regla es bien sencilla. Veamos algunos ejemplos:

f_0= 0 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 0^2 + 4 = 4 = 2^2$

f_1= 1 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 1^2 – 4 = 1 = 1^2$

f_2= 1 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 1^2 + 4 = 9 = 3^2$

f_3= 2 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 2^2 - 4 = 16 = 4^2$

f_4= 3 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 3^2 + 4 = 49 = 7^2$

4 no es un número de Fibonacci porque:

- Ni $5 \cdot 4^2 – 4 = 76$, ni $5 \cdot 4^2 + 4= 84$, son cuadrados perfectos.

f_5= 5 es un número de Fibonacci porque $5 \cdot 5^2 - 4 = 121 = 11^2$

6 no es un número de Fibonacci porque:

- Ni $5 \cdot 6^2 – 4 = 176$, ni $5 \cdot 4^2 + 4= 184$, son cuadrados perfectos.

o) Fibonacci y las fracciones. El asombroso $\frac{1}{89}$ y $\frac{1}{109}$

Pese a no ser muy conocido, los números 89 y 109 están muy ligados a la sucesión de Fibonacci

Para demostrar la siguiente característica, utilizaremos con los alumnos programas de Hoja de Cálculo. Solicitaremos que realicen la división $\frac{1}{89}$.

Nos queda un número decimal periódico con 44 decimales:

$\frac{1}{89}$ = 0.01123595505617977528089887640449438202247191

Fijémonos en los decimales. Vaya, qué curioso, los seis primeros decimales (0, 1, 1, 2, 3, 5) son los seis primeros términos de la sucesión de Fibonacci (podéis ver aquí cómo se construye esta sucesión). Pero aún hay más.

Los alumnos en la Hoja de Cálculo deberán realizar una tabla (Tabla I), dividendo cada término de la sucesión por 10 elevado a la posición que ocupa en ella. Veamos qué pasa:

Tabla I. Cálculo de $\frac{1}{89}$

$\frac{1}{89}=$	0.011235955……….
0/(10^1)	0,01
1/(10^2)	0,001
1/(10^3)	0,001
2/(10^4)	0,0002
3/(10^5)	0,00003
5/(10^6)	0,000005
8/(10^7)	0,0000008
13/(10^8)	0,00000013

Fuente: Elaboración propia.

Finalizada la tabla, el alumno realizará el sumatorio (Σ) de la columna de la derecha. ¿Qué obtenemos?

0.01123595505617977528089887640449438202247191 = $\frac{1}{89}$. Alucinante!!!!.

Como podemos ver los términos calculados así suman $\frac{1}{89}$ y además nos dan los términos de la sucesión de Fibonacci en el mismo orden en el que aparecen en ella!!!!!!!!!!!!. Cuanto menos curioso.

Sin abandonar la Hoja de Cálculo, veamos qué pasa con el 109:

Realicemos la división $\frac{1}{109}$. Nos queda un número decimal periódico con 108 decimales:

$\frac{1}{109}$ = 0.009174311926605504587155963302752293577981651376146788990825688073394495412844036697247706422018348623853211

Como vemos los seis últimos decimales del período son, junto al 0, los primeros términos de la sucesión de Fibonacci colocados en orden inverso de aparición.

Dividamos ahora cada término de la sucesión de Fibonacci por 10 elevado a 109 menos la posición que ocupa en la sucesión (Tabla II). Nos queda algo así:

Tabla II. Primer método de cálculo de $\frac{1}{109}$

$\frac{1}{109} =$	18348623853211
0/(10^109)	...00000000000000
1/(10^108)	...00000000000001
1/(10^107)	...0000000000001
2/(10^106)	...000000000002
3/(10^105)	...00000000003
5/(10^104)	...0000000005
8/(10^103)	...000000008
13/(10^104)	...00000013

Fuente: Elaboración propia.

Nos suena, ¿verdad? Esas operaciones suman $\frac{1}{109}$ y también nos dan los términos de la sucesión de Fibonacci. Otra cosa cuanto menos bastante curiosa.

Y una más del 109. Tomemos cada término de la sucesión de Fibonacci y elevémoslo a 10 elevado a su posición en la sucesión. Después sumemos y restemos alternativamente (Tabla III). El resultado vuelve a ser análogo a los anteriores:

Tabla III. Segundo método de cálculo de $\frac{1}{109}$

$\frac{1}{109} =$	0,00917431............
0/(10^1) (+)	0,0 (+)
1/(10^2) (-)	0,01 (-)
1/(10^3) (+)	0,001 (+)
2/(10^4) (-)	0,001 (-)
3/(10^5) (+)	0,0002 (+)
5/(10^6) (-)	0,00003 (-)
8/(10^7) (+)	0,000005 (+)
13/(10^8) (-)	0,00000013 (-)

Fuente: Elaboración propia.

1.3. Recursos materiales

Obviamente, mucho se ha escrito sobre la sucesión de Fibonacci, pero en este apartado cabe mencionar a D. Antonio Pérez Sanz[5], que realizó una serie de 13 programas en TVE 2 “La Aventura del Saber”.

De los 13 programas, todos ellos recomendables, y muy válidos para introducir distintos conceptos matemáticos a lo largo de la Educación Secundaria, resaltamos dos (Ilustración 8 y 9).

El primero de ellos dedicado a la sucesión de Fibonacci.

Ilustración 8. Fibonacci. La magia de los números.

Fuente: Pérez, 2011b.

y el segundo al número áureo

Ilustración 9. El número áureo.

Fuente: Pérez, 2011a.

Ambos vídeos, con una duración inferior a los 20 minutos, son una excelente herramienta para motivar y fijar contenidos en el alumno.

[5] Licenciado en matemáticas por la Universidad Complutense en 1976. Nació en Valdeavero, Madrid, en 1954. (Centro virtual de divulgación de las matemáticas, s.f.).

1.4. Actividades

La presente sucesión, tal y como hemos visto, es un excelente recurso para que el alumnado disfrute de las Matemáticas. En el presente curso sería interesante hacer partícipe al alumno del descubrimiento de la sucesión mediante trabajos grupales. Estos podrían ser bajo la tutela del profesor mediante una *webquest*, o bien realizando trabajo de investigación por parte del alumnado.

Dividimos la clase en grupos, de 8 alumnos por grupo. Dentro de un grupo, cada miembro elegirá una de las siguientes temáticas:

1) Historia.
2) El cuerpo humano.
3) Naturaleza.
4) Física.
5) Arquitectura y Arte.
6) Música.
7) Cine y Literatura.
8) Curiosidades y juegos matemáticos.

Recopilada la información de los 8 miembros del grupo, deberán realizar un póster, el cual expondrán en clase de Matemáticas.

1.5. Objetivos didácticos

- Reconocer sucesiones.
- Escribir cualquier término de una sucesión, conocido su término general.
- Calcular el término general de sucesiones sencillas conocidos sus primeros términos.
- Distinguir una progresión aritmética de una geométrica.
- Reconocer ecuaciones de segundo grado.
- Resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita en forma gráfica y en forma numérica.
- Aplicar los métodos de resolución anterior a problemas prácticos.
- Conocer la sucesión de Fibonacci.

- Desarrollar la intuición geométrica.
- Potenciar la curiosidad para encontrar relaciones entre magnitudes.
- Relacionar el lenguaje gráfico con otros lenguajes matemáticos.
- Apreciar la presencia de conceptos matemáticos en otros ámbitos.
- Ser capaz de extraer conclusiones propias; inferir resultados.

1.6. Competencias

La sucesión de Fibonacci, teniendo en cuenta todo lo expuesto anteriormente, junto a las actividades propuestas, colabora a la adquisición de las siguientes competencias básicas:

- Comunicación lingüística

La sucesión de Fibonacci contribuye a la competencia en comunicación lingüística puesto que se utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas.

- Matemática

Con la sucesión de Fibonacci el alumno aplica aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.

- Conocimiento y la interacción con el mundo físico

Conocer la sucesión de Fibonacci y sus aplicaciones es una importante herramienta para conocer el mundo que nos rodea.

- Tratamiento de la información y competencia digital

El uso de calculadoras y hojas de cálculo contribuye a mejorar la competencia en tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes.

- Social y ciudadana

Realizar el póster adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio.

- Cultural y artística

La sucesión de Fibonacci, y en particular la razón áurea, ofrece al alumno una excelente herramienta para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras y pinturas que ha creado el hombre.

- Aprender a aprender

Con la sucesión de Fibonacci el alumno puede comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.

- Autonomía e iniciativa personal

La resolución de problemas matemáticos y la realización de una parte individual, dentro de un trabajo en equipo, fomenta esta competencia.

2. CUARTO ESO

Si bien la sucesión de Fibonacci en Tercero ESO, muestra al alumnado, sus aplicaciones y curiosidades, tanto matemáticas como en otras áreas, de una forma atractiva e interdisciplinar, es en este curso, donde la sucesión de Fibonacci, simplifica el aprendizaje de ciertos contenidos.

2.1. Contenidos

Según el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, se seleccionan los siguientes contenidos de Cuarto ESO, que se pueden enseñar a través de la sucesión de Fibonacci.

OPCIÓN A

Bloque 3. Álgebra.

- Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b)\cdot(a-b)$. Factorización de polinomios.

OPCIÓN B

Bloque 3. Álgebra.

- Utilización de las identidades notables.

Bloque 4. Geometría.

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas.
- Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos.
- Uso de la calculadora para la obtención de ángulos y razones trigonométricas.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Bloque 6. Estadística y probabilidad.

- Técnicas de recuento. Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. Aplicación al cálculo de probabilidades.

2.1.1. Combinatoria y Binomio Newton

La aplicación didáctica de la sucesión de Fibonacci interrelacionando los contenidos seleccionados del Bloque 3. Álgebra y del Bloque 6. Estadística y probabilidad, conseguirá por parte del alumnado una visión global de las Matemáticas.

Pues bien, recordando a los alumnos que a sucesión de Fibonacci comienza con los números 1 y 1, y a partir de estos, cada término es la suma de los dos anteriores, relacionaremos dicha sucesión con el triángulo de Pascal (también conocido como triángulo de Tartaglia), que es un triángulo formado por números enteros que se construye de la siguiente manera (Ilustración 11):

Colocamos un 1 en el vértice superior del triángulo. Después, en la fila inferior, colocamos un 1 a la derecha y un 1 a la izquierda del 1 de arriba. En la inferior colocamos un 1 a cada extremo y entre los dos unos colocamos un 2 (1 + 1). En la inferior un 1 en cada extremo y en medio un 3 entre el 1 y el 2 (1 + 2) y otro 3 entre el 2 y el 1 (2 + 1). Y así sucesivamente: en los extremos un 1 a cada lado y en las posiciones intermedias colocamos la suma de los números de arriba:

Ilustración 11. Triángulo de Pascal.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

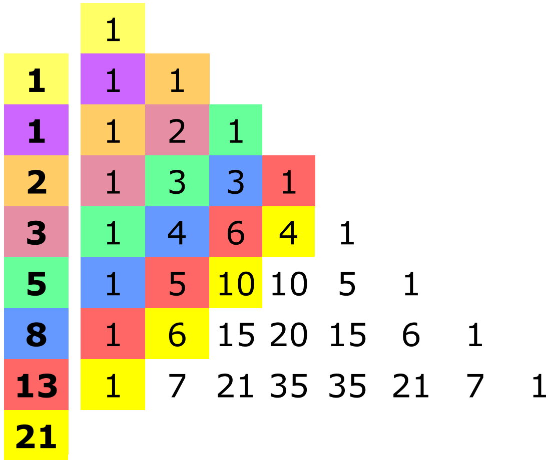
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Fuente: Elaboración propia.

¿Cómo encontrar los elementos de la sucesión de Fibonacci en el triángulo de Pascal? La respuesta se encuentra dentro de las diagonales del triángulo (Ilustración 12):

Ilustración 12. Números de Fibonacci en triángulo de Pascal.



Fuente: Knott, 2014.

Relacionado el triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci, ¿cómo puede simplificar los contenidos del presente curso? Así de fácil:

a) Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios.

El número combinatorio C_n^m (n sobre m) se encuentra en el triángulo en la fila n+1, en el lugar m+1.

El número combinatorio C_n^m (n sobre m) que representa el número de grupos de m elementos que pueden hacerse de entre un conjunto de n (por ejemplo, [4 sobre 2] nos da el número de parejas distintas que podrían hacerse en un grupo de cuatro personas), se encuentra en el triángulo en la fila n+1, en el lugar m+1 (Ilustración 13).

Ilustración 13. Números combinatorios en triángulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \left[\frac{0}{0}\right] & & & & \\
 & & & \left[\frac{1}{0}\right] & & \left[\frac{1}{1}\right] & & & \\
 & & \left[\frac{2}{0}\right] & & \left[\frac{2}{1}\right] & & \left[\frac{2}{2}\right] & & \\
 & \left[\frac{3}{0}\right] & & \left[\frac{3}{1}\right] & & \left[\frac{3}{2}\right] & & \left[\frac{3}{3}\right] & \\
\left[\frac{4}{0}\right] & & \left[\frac{4}{1}\right] & & \left[\frac{4}{2}\right] & & \left[\frac{4}{3}\right] & & \left[\frac{4}{4}\right]
\end{array}
$$

Fuente: Elaboración propia.

Inmediatamente podemos saber que el número de parejas posibles [4 sobre 2] que es 6 si miramos el tercer número de la quinta fila. Esto hace que el triángulo sea útil como representación de estos números, y proporciona una buena forma de intuir sus propiedades.

Por el contrario, a la fórmula de los números combinatorios se le puede dar el carácter de fórmula general del triángulo para saber, sin necesidad de construir todas las filas anteriores, cuál es el número que ocupa un lugar determinado:

$$C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

b) Los números del triángulo de Pascal coinciden con los coeficientes que aparecen en el binomio de Newton.

Efectivamente, las Matemáticas no dejan de sorprendernos!!!!!

Cada fila del triángulo representa los coeficientes de los monomios que aparecen en el desarrollo del binomio $(a + b)^n$ (tomando el 1 de arriba como la potencia n = 0), o lo que es lo mismo, los coeficientes que aparecen en el binomio de Newton coinciden con los elementos que aparecen en cada fila del triángulo de Pascal.

La fórmula es:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Una forma de evitar tener que calcular uno a uno todos los coeficientes es utilizar el Triángulo de Pascal, ya que los coeficientes de la potencia n aparecen en la fila n+1 de dicho triángulo.

Un ejemplo: aplicando la fórmula y la definición de número combinatorio tendríamos:

$(a + b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2b + \mathbf{3}\cdot ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3$.

Pero hubiese sido más rápido ir a la fila 4 (3 + 1) del triángulo y ver que los números que aparecen son, precisamente, los coeficientes 1, 3, 3 y 1.

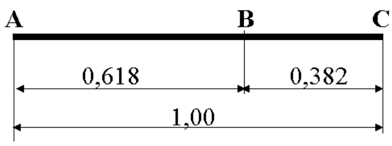
2.1.2. Geometría

Si los griegos y renacentistas estaban fascinados la sección áurea, la cual encontramos en las pirámides de Egipto, el Partenón,…, no podemos dejar de mostrar al alumno otras figuras geométricas y razones trigonométricas en las que encontramos número áureo Φ, siendo un gran elemento explicativo para los contenidos seleccionados del Bloque 4. Geometría.

La Proporción Divina establece que lo pequeño es a lo grande como lo grande es al todo.

En el caso especial de un segmento unitario (Ilustración 14), la Proporción Aurea proporciona la única forma de dividir la unidad en dos partes que están en progresión geométrica:

Ilustración 14. Segmento áureo.



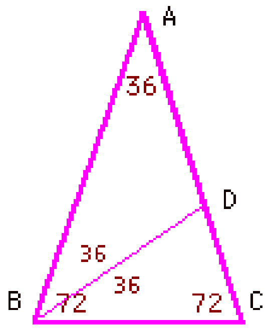
Fuente: Capitanio y Manenti, 2009.

Por ser en Cuarto ESO, donde el alumno conoce las relaciones trigonométricas básicas, sólo introduciremos el triángulo y el pentágono áureo.

2.1.2.1. Triángulo áureo

El triángulo 36º - 72º es muy interesante (Ilustración 15), pues además de ser isósceles al trazar la bisectriz interior de un ángulo congruente, se obtiene otro triángulo semejante al original, es decir otro triángulo 36º - 72º

Ilustración 15. Triángulo isósceles 36º - 72º.



Fuente: Knott, 2013.

Es decir se obtiene tres segmentos congruentes, pues curiosamente se obtiene tres triángulos isósceles.

Ahora veamos como aparece el número áureo en este triángulo notable; para ello asignemos 1 unidad de medida al menor segmento y x unidades a los tres segmentos congruentes, es decir:

- Longitud segmento CD = 1 unidad
- Longitud segmento BC = x unidades
- Longitud segmento BD = x unidades
- Longitud segmento DA = x unidades
- Longitud segmento BA = y unidades

Al ser triángulos isósceles, podemos observar que y = x +1, y por semejanza de triángulos tenemos la igualdad siguiente:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{x}$$

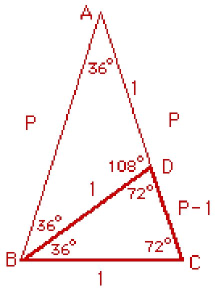
luego $y = x^2 \Rightarrow x + 1 = x^2$ por lo que

$x^2 - x - 1 = 0$; ¿nos suena?. Efectivamente:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ahora nuestro triángulo, tomando $P = \Phi$, lo podemos escribir en términos del número áureo (Ilustración 16):

Ilustración 16. Triángulo áureo.



Fuente: Knott, 2013.

Luego, aplicando las identidades trigonométricas obtenemos:

$$\text{sen}(18º) = \frac{\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{(\Phi+1)} = \frac{\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\Phi^2} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

y para hallar el coseno (36º)

$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha$, es decir:

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2 \alpha$

sustituyendo, obtenemos:

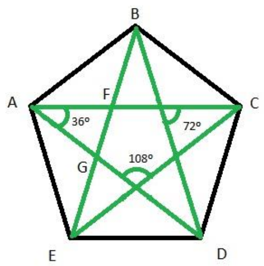
$$\cos(36º) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

2.1.2.2. Pentágono áureo

Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales (Ilustración 17). En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36º, 72º y 108º.

La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos ABE, ABF y AFG. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, que llamaremos: BE=a, AB=AE=b, AF=BF=AG=c y GF=d. Las longitudes de estos segmentos cumplen: a>b>c>d.

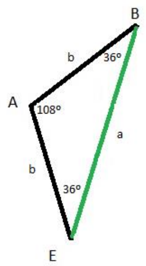
Ilustración 17. Pentágono áureo.



Fuente: Elaboración propia.

Consideremos cada uno de estos triángulos por separado (Ilustración 18, 19 y 20), y apliquemos el teorema del seno.

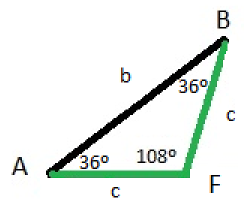
Ilustración 18. Triángulo ABE.



Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{a}{\text{sen}108°} = \frac{b}{\text{sen}36°} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$$

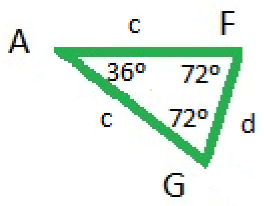
Ilustración 19. Triángulo ABF



Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{b}{\text{sen}108°} = \frac{c}{\text{sen}36°} => \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$$

Ilustración 20. Triángulo AFG.



Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{c}{\text{sen}72°} = \frac{d}{\text{sen}36°} => \frac{c}{d} = \frac{\text{sen}72°}{\text{sen}36°} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$$

Como 72º=180º-108º, se verifica que sen72º = sen108º

En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°} = 1{,}618033988 \ldots$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que c = a - b y haciendo b=1:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} => \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} => \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} => a^2 - a - 1 = 0 \ => a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a = Φ El número de oro.

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

Como consecuencia, se verifica $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\text{sen}108°}{\text{sen}36°}$

2.2. Actividades

En el presente curso, entendiendo que el alumno conoce a la perfección la sucesión y sus aplicaciones en la vida cotidiana, sería interesante fomentar la competencia aprender a aprender.

Como se ha visto en este curso, se pueden relacionar unos conceptos matemáticos con otros, y dada la importancia de las relaciones trigonométricas sería un buen ejercicio que el alumno individualmente, a partir de un triángulo isósceles 36º - 72º, concluyera por sí solo el valor del sen(18º) y cos(36º), y su relación con Φ.

Del mismo modo, se podría plantear a alumnado que calcule la relación entre la diagonal de un pentágono regular y el lado cuya longitud es la unidad. La solución, como no cabe esperar de otra manera, es Φ.

2.3. Objetivos didácticos

- Distinguir entre las distintas situaciones que dan lugar a Combinaciones.
- Utilizar los números combinatorios para desarrollar cualquier potencia de un binomio.
- Comprender el concepto de razón de semejanza, saber calcularla y utilizarla en la resolución de problemas con triángulos semejantes.
- Reconocer figuras semejantes.
- Usar los distintos criterios de semejanza de triángulos para resolver problemas geométricos.

- Conocer las razones trigonométricas de los ángulos.
- Aproximación a las relaciones entre razones trigonométricas
- Descubrir las relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

2.4. Competencias

- Comunicación lingüística

La sucesión de Fibonacci contribuye a la competencia en comunicación lingüística puesto que se utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas.

- Matemática

Con la sucesión de Fibonacci el alumno aplica aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.

- Tratamiento de la información y competencia digital

El uso de calculadoras y hojas de cálculo contribuye a mejorar la competencia en tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes.

- Aprender a aprender

Con la sucesión de Fibonacci el alumno puede comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.

- Autonomía e iniciativa personal

La resolución de problemas matemáticos fomenta esta competencia.

3. MATEMÁTICAS I DE BACHILLERATO.

Es en Bachillerato donde no podemos dejar de mostrar al alumno una de las características más sorprendentes de la sucesión de Fibonacci.

La razón o cociente entre un término y el inmediatamente anterior varía continuamente, pero se estabiliza en el número áureo. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

3.1. <u>Contenidos</u>

Según el Decreto 67/2008, de 19 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato, se seleccionan los siguientes contenidos de Bachillerato I, que se pueden enseñar a través de la sucesión de Fibonacci.

Bloque 1. Aritmética y Álgebra

- Números combinatorios. Binomio de Newton.

Bloque 3. Análisis

- Concepto intuitivo de límite, finito o infinito, de una función en un punto y en el infinito, con apoyo gráfico y de la calculadora.

Bloque 4. Estadística y probabilidad

- La combinatoria como técnica de recuento.

3.1.1. Límites

Utilizaremos la sucesión de Fibonacci como recurso para fijar el concepto de límite de una función (Bloque 3. Análisis).

Con una calculadora solicitaremos al alumno que realice el cociente entre un término y el inmediatamente anterior de la sucesión (Tabla IV).

Tabla IV. Cociente números consecutivos sucesión Fibonacci.

1/1=	1,000000
2/1=	2,000000
3/2=	1,500000
5/3=	1,666666
8/5=	1,600000
13/8=	1,625000
21/13=	1,615385
34/21=	1,619048
55/34=	1,617647
89/55=	1,68182
144/89=	1,617978
233/144=	1,618056
377/233=	1,618027
610/377=	1,618037
987/610=	1,618033

Fuente: Elaboración propia

Poco a poco el alumno se dará cuenta que se estabiliza en 1,61803….

El alumno puede que no reconozca el número áureo, pero en este momento, es más interesante su demostración:

Supongamos que la sucesión de cocientes de los términos de Fibonacci tiene límite y llamémoslo x, se tendrá entonces,

$x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ => (como cada término es la suma de los dos términos anteriores,

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, luego

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\right) = 1 + \frac{1}{x}$

De donde obtenemos $x = 1 + \frac{1}{x}$, y operando nos queda $x^2 - x - 1 = 0$

y como habíamos resuelto anteriormente:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

¿Y ahora reconocéis la solución? El número áureo (Φ)

3.1.2. Curiosidades y juegos matemáticos

Una vez que el alumno conoce que el $\lim_{n\to\infty}\frac{f\,n+1}{fn} = \Phi$, podemos enseañarles una interesante propiedad de esta sucesión que está relacionada con representaciones de números enteros positivos.

Se sabe que todo entero positivo puede representarse de forma única como suma de potencias de 2. De hecho es en esta propiedad en la que se basa el sistema de numeración binario, en el que cada número entero positivo se representa de una única forma con una sucesión de ceros y unos, correspondiendo un 1 a cada potencia de 2 que aparece en la representación y un 0 a cada potencia de 2 que no aparece. Por ejemplo, el 46 se representa de forma única como suma de potencias de 2 de la forma

$46 = 32 + 8 + 4 + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$

por lo que 46 en binario es:

$46 = 101110_{(2}$

¿Qué tiene que ver esto de las representaciones de números enteros con los números de Fibonacci? Para responder a esta pregunta primero tenemos que introducir a Edouard Zeckendorf[6].

“Todo número entero positivo puede representarse de forma única como suma de números de Fibonacci distintos, de tal forma que dicha representación no contiene dos números de Fibonacci consecutivos”. (Zeckendorf, 1972)

Esta representación se denomina representación de Zeckendorf del número entero positivo en cuestión.

Es decir, que podríamos representar cada número entero positivo de una forma parecida como lo hacemos con las potencias de 2, pero con números de la sucesión de Fibonacci:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Asignando un 1 a una posición si el número de Fibonacci correspondiente aparece en la representación (como F0 = F1 = 1, para evitar problemas nos quedamos uno de ellos nada más, F1, para las representaciones) y un 0 a una posición si el número de Fibonacci correspondiente no está en ella. En el ejemplo que aparece un poco más adelante se verá más claro todo eso.

¿Cómo encontramos la representación de Zeckendorf de un número entero positivo n? Pues, a priori es muy sencillo:

Tomamos el número de Fibonacci más grande de entre los que son menores que n y se lo restamos a n. Si queda cero, el propio n era un número de Fibonacci, y si no es así repetimos el proceso las veces que sea necesario hasta que una de las restas dé cero.

Eligiendo el número 46, el cual anteriormente calculamos la expresión en binario:

- Como el 46 no está en la sucesión de Fibonacci, su representación de Zeckendorf no es él mismo. Tomamos el número de Fibonacci más grande que sea menor que 46, que es el 34, que por tanto estará en la representación.

[6] (Lieja, 1901-1973). Médico, oficial del ejército belga y matemático. (Kimberling, 1998)

- Restamos: 46 – 34 = 12. Como 12 no es un número de Fibonacci buscamos el mayor elemento de la sucesión que sea menor que él, que es el 8. Entonces este 8 también estará en la representación.
- Restamos: 12 – 8 = 4. Como 4 no está en la sucesión, buscamos el mayor número de Fibonacci que sea menor que él, que es el 3, que por tanto también estará en la representación.
- Restamos: 4 – 3 = 1, que sí es un número de Fibonacci, por lo que también hay que tomarlo.
- La representación queda como sigue:

  $46 = 34 + 8 + 3 + 1 = 10010101_{(F}$

El presente teorema demuestra el apartado c) del punto 1.3.4 Curiosidades y juegos matemáticos con la sucesión de Fibonacci, que se comentaba en Tercero ESO.

Esta representación de Zeckendorf también puede servir para definir una operación poco conocida: la denominada multiplicación de Fibonacci, la cual se define de la siguiente forma:

Dados dos números enteros positivos a, b cuyas representaciones de Zeckendorf son las siguientes:

$$a = \sum_{i=0}^{k} F_{c_i} \qquad b = \sum_{j=0}^{l} F_{d_j}$$

con ci, dj ≥ 1, definimos la multiplicación de Fibonacci de a y b, que denotaremos a o b, así:

$$a \circ b = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} F_{c_i + d_j}$$

Veamos un ejemplo. Vamos a hacer la multiplicación de Fibonacci de 7 y 14, esto es, 7 o 14. Para ello, calculamos las representaciones de Zeckendorf de cada uno de ellos:

$7 = 5 + 2 = F_4 + F_2$ y $14 = 13 + 1 = F_6 + F_1$

Entonces:

$$7 \text{ o } 14 = F_{1+2} + F_{1+4} + F_{6+2} + F_{6+4} = F_3 + F_5 + F_8 + F_{10} = 3 + 8 + 34 + 89 = 134$$

Vamos a ver una manera de pasar de kilómetros a millas, y viceversa, usando esta representación. La clave está en el hecho de que la sucesión de los cocientes de cada número de Fibonacci entre el justo anterior converge al número áureo $\Phi = 1.61803\ldots$ y que una milla son aproximadamente 1,609 kilómetros.

¿Cómo podemos usar esto para nuestro objetivo? Muy sencillo. Supongamos que queremos expresar 72 millas en kilómetros. Lo que tenemos que hacer es encontrar la representación de Zeckendorf de 72 y después sustituir cada número de Fibonacci que aparezca en ella por el inmediatamente superior. La representación de Zeckendorf de 72 es:

72 = 55 + 13 + 3 + 1

Según lo anterior, esto nos dice que 72 millas serán, aproximadamente:

89 + 21+ 5 + 2 = 117 kilómetros

Si queremos pasar de kilómetros a millas hacemos lo mismo, pero en este caso sustituimos cada número de Fibonacci por el anterior.

Otra aplicación del teorema es el siguiente juego, que consiste en adivinar cualquier número que la clase haya pensado entre 1 y 100. Para ello, una vez que se han puesto de acuerdo, a tus espaldas, en escoger un número, tú les vas presentando una por una estas 10 cartas con números "aleatorios" (Ilustración 21), y ellos tienen que decir si su número se encuentra en ellas o no. Astutamente estas tarjetas las hemos fabricado de tal forma que comienzan por un número de Fibonacci, que está seguido por todos aquellos, mayores que él, que lo contienen en su representación de Zeckendorf.

Ilustración 21. Cartas mágicas de Brousseau.

1	4	6	9	12
14	17	19	22	25
27	30	33	35	38
40	43	46	48	51
53	56	59	61	64
67	69	72	74	77
80	82	85	88	90
93	95	98		

2	7	10	15	20
23	28	31	36	41
44	49	54	57	62
65	70	75	78	83
86	91	96	99	

3	4	11	12	16
17	24	25	32	33
37	38	45	46	50
51	58	59	66	67
71	72	79	80	87
88	92	93	100	

5	6	7	18	19
20	26	27	28	39
40	41	52	53	54
60	61	62	73	74
75	81	82	83	94
95	96			

8	9	10	11	12
29	30	31	32	33
42	43	44	45	46
63	64	65	66	67
84	85	86	87	88
97	98	99	100	

13	14	15	16	17
18	19	20	47	48
49	50	51	52	53
54	68	69	70	71
72	73	74	75	

21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	76	77
78	79	80	81	82
83	84	85	86	87
88				

34	35	36	37	38
39	40	41	42	43
44	45	46	47	48
49	50	51	52	53
54				

55	56	57	58	59
60	61	62	63	64
65	66	67	68	69
70	71	72	73	74
75	76	77	78	79
80	81	82	83	84
85	86	87	88	

89	90	91	92	93
94	95	96	97	98
99	100			

Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, si el número que han pensado es el 32 escogerán las siguientes tarjetas (Ilustración 22).

Ilustración 22. Selección número 32 en cartas mágicas de Brousseau.

3	4	11	12	16
17	24	25	**32**	33
37	38	45	46	50
51	58	59	66	67
71	72	79	80	87
88	92	93	100	

8	9	10	11	12
29	30	31	**32**	33
42	43	44	45	46
63	64	65	66	67
84	85	86	87	88
97	98	99	100	

21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	**32**	33	76	77
78	79	80	81	82
83	84	85	86	87
88				

Fuente: Elaboración propia.

y nosotros sólo tendremos que sumar los primeros números de cada tarjeta, pues la representación de Zeckendorf de 32 = 21 + 8 + 3.

3.2. Actividades

En esta etapa, el alumnado tiene todas las herramientas necesarias para entender al 100% la sucesión de Fibonacci. Es por ello, que en este curso, se podría proponer, según se avanza en la materia, que el alumno obtuviera las conclusiones del teorema de Zeckendorf, mediante el texto original. Con ello fomentaríamos la aplicación de una segunda lengua, basada en la búsqueda de información en páginas web matemáticas de reconocido prestigio.

3.3. Objetivos didácticos

- Adquirir el concepto de límite de una función en el infinito, así como conocer sus definiciones.
- Calcular de manera sistemática límites de funciones.

EVALUACIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La sucesión de Fibonacci no es un tema muy común en los libros de texto de Matemáticas de Educación Secundaria, pero:

¿Por qué estudiar la sucesión de Fibonacci?

1) Destacar la interdisciplinariedad de las Matemáticas en la vida cotidiana y como se requiere que el profesorado no incremente la cantidad de información fragmentada en los estudiantes, sino que los ayuden a tener pensamientos interdisciplinares que les permitan resolver los problemas complejos de la realidad y descubrir los vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos.

2) Relacionar unos conceptos matemáticos con otros, para así, conseguir una visión global y una estructura general de la matemática, para entender el conocimiento como un todo, y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos.

3) Hacer disfrutar al alumno de las Matemáticas, mediante biografías, anécdotas y problemas de entretenimiento.

El presente trabajo refleja ciertas aplicaciones didácticas de la sucesión de Fibonacci a la Educación Secundaria, el cual me ha servido de estímulo para iniciar Unidades Didácticas para Tercero ESO, Cuarto ESO y Bachillerato I, sobre esta maravillosa sucesión, que surgió en la Edad Media, sobre la resolución de un problema de la vida cotidiana de la época: la cría de conejos.

BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES:

Biografías y Vidas. La Enciclopedia Biográfica en Línea. (2015a). *Antonio Stradivarius.* Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/stradivarius.htm

Biografías y Vidas. La Enciclopedia Biográfica en Línea. (2015b). *Leonardo da Vinci*. Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leonardo.htm

Biografías y Vidas. La Enciclopedia Biográfica en Línea. (2015c). *Luca Pacioli.* Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pacioli.htm

Biografías y Vidas. La Enciclopedia Biográfica en Línea. (2015d). *Rafael Alberti*. Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/alberti_rafael.htm

Brousseau, A. (1972). Fibonacci Magic Cards. *The Fibonacci Quarterly*, 10.2, 197-198. Recuperado el 8 de Abril de 2015, de http://www.fq.math.ca/Scanned/10-2/brousseau2.pdf

Brown, D. (2010). *El Código da Vinci*. España: Planeta.

Capitanio, M. y Manenti, A. (2009). *Fibonacci*. Recuperado el 5 de mayo de 2015, de http://crema.di.unimi.it/~citrini/MD/progetto_fibonacci/storia.html

Centro virtual de divulgación de las matemáticas. (s.f.). *Pérez Sanz, Antonio*. Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3444:pz-sanz-antonio&catid=46:caricaturas-de-matemcos-espas&Itemid=33

Cockcroft, W.H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cohen M., Fernández J., Park A. y Schmedders, K. (2003). The Fibonacci Sequence: Relationship to the Human Hand. *Journal of Hand Surgery*, 28, 157-160.

Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. B.O.C.M. núm. 126. (29 de mayo de 2007). Recuperado el 7 de mayo de 2015, de http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/ curriculo_secundaria_madrid pdf

Decreto 67/2008, de 19 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato. B.O.C.M. núm. 152. (27 de junio de 2008). Recuperado el 7 de mayo de 2015, de http://www.madrid.org/dat_oeste/descargas/loe/decreto_67_2008_curriculo_Bachillerato.pdf

Kimberling, C. (1998). *Edouard Zeckendorf*. Recuperado el 30 de abril de 2015, de http://www.fq.math.ca/Scanned/36-5/kimberling.pdf

Knott, R. (2010a). *Fibonacci Numbers and Nature*. Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

Knott, R. (2010b). *Fibonacci Numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music*. Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html

Knott, R. (2013). *Two-dimensional Geometry and the Golden section or Fascinating Flat Facts about Phi.* Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/ phi2DGeomTrig.html

Knott, R. (2014). *The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers.* Recuperado el 28 de abril de 2015, de http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html#section8

Pacioli, Luca. (1946). *La Divina Proporción*. Buenos Aires (Argentina): Losada.

Pérez, A. (2011a). *Más por menos: Entiende las Matemáticas. El número áureo*. Recuperado el 15 de marzo de 2015, de http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-numero-aureo/1290977/

Pérez, A. (2011b). *Más por menos: Entiende las Matemáticas. Fibonacci La magia de los números*. Recuperado el 15 de marzo de 2015, de http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-fibonacci-magia-numeros/1291572/

Rodríguez, E. (2010). *Fibonacci y los Números Mágicos*. España: El Rompecabezas.

Winans, C. (1980). The Fibonacci Series in the Decimal Equivalents of Fractions. *The Fibonacci Quaterly*, In A Collection of Manuscripts Related to the Fibonacci Sequence: 18th Anniversary Volume,78-81. Recuperado el 6 de Abril de 2015, de http://www.fq.math.ca/Books/Collection/winans.pdf

Zeckendorf, E. (1972). A Generalized Fibonacci Numeration. *The Fibonacci Quarterly*, 10.4, 365-372. Recuperado el 13 de Abril de 2015, de http://www.fq.math.ca/Scanned/10-4/zeckendorf.pdf

Zeckendorf, E. (1973). Some General Fibonacci Shift Formulae. *The Fibonacci Quaterly*, 11.5, 524. Recuperado el 13 de Abril de 2015, de http://www.fq.math.ca/Scanned/11-5/errata.pdf