Antonio Falcó Montesinos
Profesor del Departamento de Ciencias Físicas,
Matemáticas y de la Computación

Disquisión sobre el Teorema Fundamental del Precio de los Activos

Lección Magistral leída en la Apertura del
Curso Académico 2006-2007

Universidad CEU Cardenal Herrera
Fundación CEU San Pablo

Valencia 2006

De esta edición
se han impreso
500 ejemplares
numerados del 1 al 500

EJEMPLAR

16

ISBN: 84-86117-50-X
Depósito Legal: V. 3.736-2006

Printed in Spain - Impreso en España

Gráficas Marí Montañana, s.l.
Av. Blasco Ibáñez. 22 - 46132 Almàssera (Valencia)
Tel. 961 851 448*. Fax 961 864 155
imprenta@marimontanyana.com

El objetivo de la lección que hoy presentamos es el de mostrar, mediante un ejemplo concreto, cómo la matemáticas puede emplearse para la resolución de problemas relacionados con la industria. Para ello se ha elegido uno de los resultados más representativos de la valoración de activos derivados, el denominado Teorema Fundamental del Precio de los Activos. Este enunciado matemático, que establece las condiciones teóricas para determinar mecanismos de valoración de contratos financieros, es además uno de los pilares básicos de la disciplina académica conocida como *Matemática Financiera.*

La Matemática Financiera, se podría ser definida como la matemática aplicada a la resolución de los problemas de naturaleza cuantitativa que surgen dentro de la Industria Financiera. Esta disciplina se ocupa fundamentalmente, de la formulación de modelos de precios, mercados y gestión de riesgos, del desarrollo de fórmulas de valoración de activos financieros, de los métodos numéricos y de la implementación computacional de los mismos. Cabe destacar además la existencia varias revistas científicas internacionales, dedicadas exclusivamente a esta materia.

Los orígenes de la Matemática Financiera no son motivo de discusión académica, ya que es aceptada como fecha de inicio, la del 29 de Marzo de 1900. En este día el estudiante de postgrado Louis Bachelier, defendió en la Sorbona, bajo la tutela de Henri Poincaré, su tesis doctoral titulada "Théorie de la Spéculation". Su trabajo fue posteriormente publicado en los *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, una de la más influyentes revistas científicas francesas de la época.

El artículo en cuestión no solo contenía un análisis de los mercados de acciones y de opciones, absolutamente adelantado a su tiempo, sino que además desarrollaba una serie de ideas que ha tenido un enorme valor posteriormente, tanto en el campo de las Finanzas como en el de la Teoría de la Probabilidad. En particular introducía por primera vez en la literatura la Teoría del *movimiento Browniano*, uno de los más importantes descubrimientos del siglo XX. Curiosamente esta parte de la Física Matemática, que constituye uno de los bloques fundamentales de la *Mecánica Estadística*, tuvo su origen en la modelización matemática del movimiento del precio de los activos y de la valoración de activos contingentes en un mercado financiero. La mencionada tesis, junto con una serie de trabajos posteriores, han tenido a su vez una influencia esencial en el desarrollo del Cálculo Estocástico. Como testimonio de todo ello, en el año 1996 se funda la *Bachelier Finance Society*.

Para motivar el tema que nos ocupa hoy, vamos a introducir uno de los típicos problemas que se presentan en el ámbito de la *Ingeniería Financiera*.

Todos ustedes habrán visto, tanto en prensa como en televisión, anuncios del llamado *depósito bolsa garantizado*. Este producto financiero, suele ofrecerse como una inversión a plazo fijo, digamos 24 meses, y en la que el cliente tiene siempre asegurado el 100 % del capital invertido. Como reclamo se le ofrece la posibilidad de ganar el 40 % de la revalorización del IBEX35, calculado como la diferencia relativa entre el valor del índice en la fecha de inicio del depósito y el valor en la fecha de vencimiento del contrato. El problema, desde el punto de vista de la entidad emisora del depósito, radica en cómo construir una estrategia que le permita hacer frente a los compromisos adquiridos con el inversor.

Vamos a plantearlo de manera más formal introduciendo notación matemática. Denotemos con la letra t minúscula el tiempo, que en nuestro caso particular lo consideraremos medido en años. Este variará entre el instante $t = 0$, que denotará la fecha de inicio del contrato y $t = T$, la fecha de vencimiento del contrato, que en nuestro caso será de $24/12 = 2$ años. P_t denotará el valor de IBEX 35 observado en el instante de tiempo t. Empleando esta notación P_0 será el valor del IBEX 35 en la fecha de inicio del contrato, un valor conocido a priori, por ejemplo 12.020,70, y P_T representará en valor del IBEX 35 en la fecha de vencimiento del contrato, un número real no negativo sin valor conocido alguno.

A nivel informativo recordaremos que el IBEX 35 es un índice ponderado formado por los 35 valores más capitalizados del mercado bursátil español, de manera más precisa podemos escribir que:

$$P_t = \alpha_1(t)S_t^{(1)} + \alpha_2(t)S_t^{(2)} + \cdots + \alpha_{35}(t)S_t^{(35)}.$$

donde $S_t^{(i)}$ representa el precio de la i ésima acción que compone el índice en el instante de tiempo t y donde los coeficientes $\alpha_i(t)$ se calculan del modo siguiente:

$$\alpha_i(t) = \frac{N^{(i)}P_{t-\Delta t}}{N^{(1)}S_{t-\Delta t}^{(1)} + N^{(2)}S_{t-\Delta t}^{(2)} + \cdots + N^{(35)}S_{t-\Delta t}^{(35)}}.$$

para $i = 1, 2, \ldots, 35$. En esta última expresión, $N^{(i)}$ es el número de acciones en el mercado del i ésimo activo y $S_{t-\Delta t}^{(i)}$ representa el precio de la i ésima acción un instante de tiempo anterior, del mismo modo $P_{t-\Delta t}$ será el valor del índice un instante de tiempo anterior. Observemos que la fórmula del IBEX 35 es una combinación lineal de los precios de las acciones, podemos considerarlo pues como una cartera de inversión y asignarle un precio. En nuestro caso cada punto del índice corresponderá a un euro. Luego si el valor de índice es de 10.000 puntos consideraremos que su precio, entre comillas, es de 10.000 euros.

Veamos ahora cómo podemos construir la función de pago del depósito bolsa. Denotaremos por X_T el pago a recibir en la fecha de vencimiento por un euro invertido en $t = 0$. Está claro que este dependerá del valor de P_T, el precio del IBEX en la fecha vencimiento del depósito, y que será igual a 1 si su valor es menor o igual al inicial, lo que garantiza el 100 % de la inversión. En caso contrario, el pago será igual a 1 más el 40 % del redimiento obtenido durante el periodo de vigencia del contrato. La expresión para el valor de X_T quedaría entonces

$$X_T = 1 + 0{,}40 \max\left(\frac{P_T - P_0}{P_0}, 0\right).$$

El problema consistirá en determinar un precio "racional" para X_T.

El depósito bolsa garantizado, es lo que se conoce como un *activo derivado*, llamado así por que su precio de deriva de otro activo, el llamado *activo subyacente* (en nuestro caso el IBEX 35). Uno de los activos derivados más comerciados es la llamada opción de compra de tipo europeo, conocida en el argot financiero como la opción *Call*. La adquisición de este tipo de contrato supone la posesión de un derecho de compra en la fecha de vencimiento T, de una unidad del activo subyacente P_T, a un precio fijado K que se denomina *precio de ejercicio*, y que en el argot financiero se le conoce como *Strike*. El comprador de una *Call* solo ejercerá su derecho si en T el precio del subyacente es estrictamente superior al precio de ejercicio. La función de pago $C_T(K)$ de la opción *Call* tiene como expresión

$$C_T(K) = \max(P_T - K, 0),$$

y que podemos ver representada gráficamente en la Figura 1. Nótese que siempre que el valor del subyacente es inferior al precio de ejercicio el valor

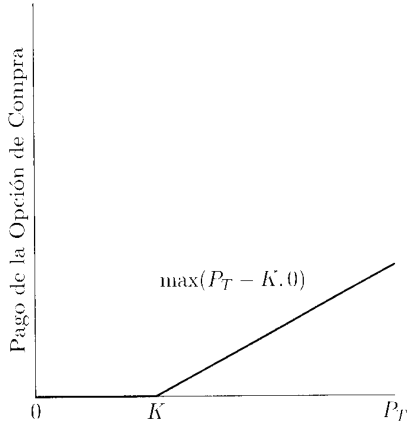

Figura 1: La función de pago de la opción de compra.

de la función de pago es cero, lo que representa que no se ejerce el derecho. Por el contrario, si el precio del subyacente supera el precio de ejercicio el comprador de la *Call* tendrá una ganancia igual a la diferencia de precios.

Empleando la función de pago de una opción *Call*, podemos representar la función de pago del depósito bolsa garantizado, como una combinación lineal de dos contratos financieros, ya que podemos expresar X_T como

$$X_T = 1 + \frac{0{,}40}{P_0} \text{máx}(P_T - P_0, 0) = 1 + \frac{0{,}40}{P_0} C_T(P_0).$$

El primero de ellos paga de forma segura un euro en la fecha de vencimiento y el segundo es una fracción de una *Call* con precio de ejercicio igual al precio del IBEX 35 en la fecha de inicio del contrato.

Para poder calcular el precio "racional" en $t = 0$ de X_T, veamos en primer lugar el razonamiento empleado por Bachelier para la valoración de una opción *Call*. El mencionado autor asumía, que las fluctuaciones del mercado tienen carácter aleatorio y que pueden ser representadas por una distribución normal de media cero y de desviación típica $\sigma\sqrt{t}$. Esta distribución se describe en la actualidad mediante una constante que multiplica a un proceso estocástico. El proceso en cuestión es conocido como *movimiento Browniano*, llamado así en honor de Robert Brown, un biólogo que en 1827 describió el movimiento errático de un grano de polen suspendido en un líquido en reposo. El modelo de precios de Bachelier empleando la notación matemática actual, se representa mediante la expresión

$$P_t = P_0 + \sigma W_t.$$

Bachelier asumía que el precio en t, es igual al precio inicial observado P_0, más una fluctuación, debida a lo que hoy en día conocemos como *riesgo de mercado* y representada por un movimiento Browniano W_t, atenuado por un parámetro σ, que representa la *volatilidad del mercado*. El movimiento Browniano W_t, es un proceso aleatorio que evoluciona en el tiempo y que cumple: (1) $W_0 = 0$, y (2) que tiene la propiedad, para los valores del tiempo t estrictamente mayores a cero, de que los incrementos del mismo son independientes e idénticamente distribuidos, siendo dicha distribución una normal de media cero y de desviación típica la raíz cuadrada del incremento de tiempo. En particular, si el intervalo temporal elegido está entre 0 y t, como $W_0 = 0$,

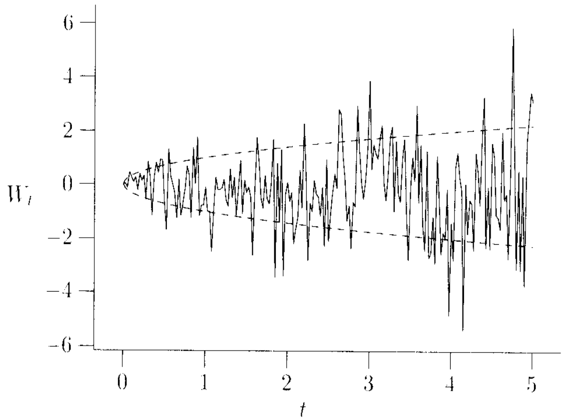

Figura 2: Una realización de un movimiento browniano y en trazo discontinuo las funciones $\pm\sqrt{t}$.

obtenemos que la distribución del Movimiento Browniano sigue una distribución normal de media cero y desviación típica la raíz cuadrada del tiempo. Esta propiedad nos facilita su simulación mediante el empleo de un generador de números aleatorios como podemos ver en la Figura 2.

El modelo de precios propuesto por Bachelier se sustentaba en el siguiente axioma:

"L'espérance mathématique du spèculateur est nulle".

Antes de ver las implicaciones que tiene este principio para la valoración de derivados financieros, necesitamos introducir el concepto de *esperanza matemática condicionada.*

La esperanza matemática de una variable aleatoria estática, como el error cometido durante el proceso de fabricación de una determinada pieza industrial, puede ser definida como la mejor predicción que se puede realizar sobre el conjunto de todos sus valores posibles. En nuestro ejemplo particular al calcularla, obtendríamos el error esperado en el proceso de fabricación de una pieza genérica. Cabe resaltar que el valor obtenido depende fundamentalmente de la distribución de probabilidad interna modelo. Volviendo al ejemplo propuesto, aunque todas las máquinas que fabrican la pieza sean aparentemente iguales y los errores cometidos en la fabricación de la misma pertenezcan a la misma familia de distribuciones de probabilidad, las predicciones realizadas sobre ambas no tienen por que ser exactamente iguales. Podría darse el caso, que para una máquina el error esperado fuese de 5×10^{-3} y para otra distinta de 8×10^{-3}.

La predicción realizada para un proceso estocástico cuando se encuentra en un instante de tiempo genérico t, podrá ser efectuada desde cualquier instante de tiempo anterior s menor o igual a t. Se define entonces la esperanza matemática condicionada del proceso en t, calculada en el instante de tiempo $s \leq t$, y que denotaremos por $\mathbb{E}_s\left[\cdot_t\right]$, como la mejor predicción que podemos hacer partir de los valores de observados en s. La diferencia sustancial con la anterior definición estática, es que en este caso el valor esperado dependerá de los valores del proceso en el instante de tiempo s. Al asumir que en $t = 0$ el valor del proceso es conocido, la esperanza matemática condicional calculada en el instante de tiempo cero, será siempre una función conocida que depende del tiempo t.

Volviendo a nuestro problema original, el movimiento Browniano W_t, cumple que su esperanza matemática condicional calculada s toma el valor W_s, esto es,

$$\mathbb{E}_s\left[W_t\right] = W_s.$$

Esta expresión se puede interpretar diciendo que la mejor predicción que podemos realizar hoy para el valor del riesgo de mercado mañana es el valor del riesgo de mercado hoy.

Calculando ahora cual será la esperanza matemática condicional en s del incremento del precio del activo entre s y t, obtenemos que va a ser cero, esto es,

$$\mathbb{E}_s\left[P_t - P_s\right] = 0,$$

lo que equivale a decir que la esperanza matemática condicional de los incrementos de precios es nula, la ganancia esperada siempre es cero. Además, la expresión anterior la podemos escribir como

$$\mathbb{E}_s\left[P_t\right] = P_s,$$

lo que nos dice que la mejor predicción que podemos hacer para el precio futuro de un activo es el precio actual observado. Cabe ahora plantear:

¿Cómo podemos calcular el precio de la opción *Call*?

Si C_0 denota el precio en $t = 0$ de dicha opción, entonces se tiene que cumplir, bajo el principio de Bachelier, que:

$$\mathbb{E}_0\left[\max(P_T - K, 0) - C_0\right] = 0,$$

es decir,

$$C_0 = \mathbb{E}_0\left[\max(P_T - K, 0)\right] > 0.$$

Como $P_T = P_0 + \sigma W_T$ sigue una distribución normal, es fácil entonces calcular el valor de C_0.

Si pasamos a calcular el precio de construcción de nuestro depósito bolsa obtendríamos que en $t = 0$ su valor X_0 debería cumplir que

$$E_0\left[X_T - X_0\right] = 0,$$

esto es,

$$X_0 = 1 + \frac{0{,}40}{P_0} \times C_0 > 1.$$

Esta expresión nos dice que por cada euro invertido necesitamos una cantidad superior para poder hacer frente a los compromisos adquiridos con el inversor. En consecuencia, siempre tendríamos que poner dinero para poder lanzar este producto financiero, lo que representa un grave problema. Además, no es el único conflicto con el que nos encontramos: al seguir W_T una distribución normal existe probabilidad positiva de que aparezcan precios negativos (ver la Figura 3).

Para poder solventar el primero de estos problemas, introduciremos un

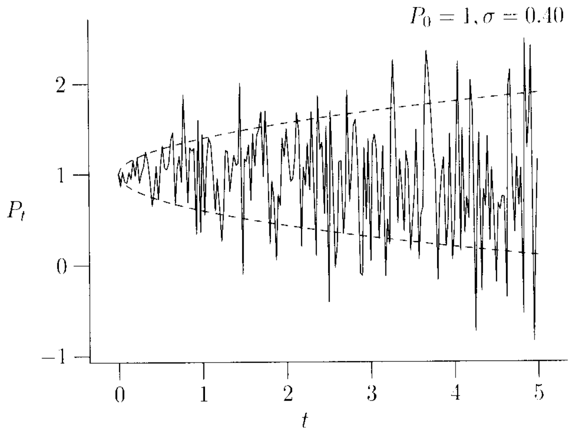

Figura 3: Una simulación del proceso $P_t = 1+0{,}40W_t$, como se puede observar en algún momento los precios son negativos. En linea discontinua la gráfica de $\pm 0{,}40\sqrt{t}$.

activo que medirá el valor temporal del dinero. Este activo denotado por B_t, es al que se denomina *activo sin riesgo* y que representa una cuenta bancaria. Aparece como contrapartida a P_t al que se le conoce también como *activo arriesgado*. Sabemos por el *Cálculo Mercantil*, que si ponemos a plazo una cantidad B_0 en $t = 0$, a un *tipo de interés* i, t periodos de tiempo después el valor B_t será igual a

$$B_t = B_0(1+i)^t.$$

Esta última expresión la podemos escribir como

$$B_t = B_0 e^{t\ln(1+i)}.$$

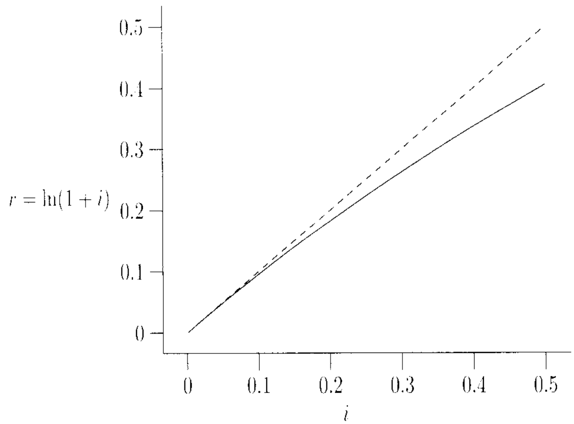

Figura 4: La gráfica de $r = \ln(1+i)$. Nótese que si $0 \leq i \leq 0{,}1$ entonces los valores de r son aproximadamente iguales a los valores de i.

Si denotamos por $r = \ln(1+i)$ (ver la Figura 4) obtenemos la expresión

$$B_t = B_0 e^{tr} = B_0 e^{rt}$$

que caracteriza la dinámica de la evolución del dinero. Además, este modelo cumple la siguiente propiedad

$$B_t = B_0 e^{rt+rs-rs} = B_0 e^{rs} e^{r(t-s)} = B_s e^{r(t-s)}.$$

para cualquier s menor o igual a t.

Con este nuevo activo, para obtener un euro en un plazo de tiempo T

tendríamos que poner en la cuenta de banco en $t = 0$ una cantidad igual a

$$B_0 = e^{-rT}$$

ya que

$$B_T = B_0 e^{rT} = 1.$$

El depósito bolsa tendría entonces un valor en $t = 0$ igual a

$$X_0 = e^{-rT} + \frac{0{,}40}{P_0} \times C_0.$$

Veamos ahora como solventar el problema de los precios negativos. Como la función exponencial transforma la recta real en el conjunto de los números reales estrictamente mayores que cero, la propuesta, formulada inicialmente por Samuelson en los años 50, es el considerar como modelo de precio del activo arriesgado:

$$P_t = P_0 e^{\alpha t} e^{\sigma W_t} = P_0 e^{\alpha t + \sigma W_t}.$$

¿Cómo podemos interpretar ahora el parámetro α? Si nos fijamos en la expresión del activo sin riesgo, α podría interpretarse como la rentabilidad esperada del activo arriesgado. Nótese que además podemos escribir:

$$P_t = P_s e^{\alpha(t-s) + \sigma(W_t - W_s)}.$$

Ahora bien, para que esta interpretación fuese correcta, la esperanza matemática condicional en $t = 0$ debería de ser

$$E_0 \left[P_t \right] = P_0 e^{\alpha t},$$

y además debería cumplirse que

$$\mathbb{E}_s \left[P_t \right] = P_s e^{\alpha(t-s)}.$$

para cualquier s menor o igual a t. El problema radica en que si se calcula su valor real obtenemos:

$$\mathbb{E}_s \left[P_t \right] = P_s e^{(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} \neq P_s e^{\alpha(t-s)}.$$

Este contratiempo se puede resolver expresando el modelo del precio del activo arriesgado como:

$$P_t = P_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t},$$

para el que se satisface la propiedad

$$\mathbb{E}_s \left[P_t \right] = P_s e^{\alpha(t-s)}.$$

para cualquier s menor o igual a t.

Necesitamos ahora asegurarnos de que los precios que vamos a calcular están correctamente fundamentados. En esta línea recordemos que el enunciado establecido por Bachelier estaba expresado como un axioma. Siguiendo otra dirección alternativa, Black, Scholes y Merton introdujeron a principios de los años setenta, la condición de Ausencia de Oportunidades de Arbitraje, más bien conocida como "No Free Lunch". El objetivo perseguido con la misma era el de asegurar la imposibilidad de generar estrategias que permitiesen obtener ganancias con probabilidad positiva y sin coste de creación alguno. En particular, la eliminación de este tipo de situaciones, implica la no existencia de productos financieros deterministas que proporcionen rendimientos distintos al que genera el activo libre de riesgo. En términos matemáticos, esto quiere decir que si existe Ausencia de Oportunidades de Arbitraje en el mercado, entonces para cualquier flujo de capital que no tenga carácter aleatorio Z_t se cumple que

$$Z_t = Z_0 e^{rt}.$$

Ahora bien, como cualquier flujo de capital generado en el mercado y de carácter aleatorio V_t, su esperanza matemática condicionada $Z_t = E_0[V_t]$, siempre proporciona flujos monetarios deterministas. Bajo la Ausencia de Oportunidades de Arbitraje se tiene que

$$E_0[V_t] = V_0 e^{rt}.$$

o bien de forma equivalente,

$$V_0 = e^{-rt} E_0[V_t].$$

Esta última fórmula nos dice que el valor actual V_0, de cualquier flujo de capital generado en el mercado y de carácter aleatorio V_t, se calcula a partir de la esperanza matemática condicional del valor descontado del mismo. Además, si tomamos $V_t = P_t$ en la anterior fórmulas, obtenemos

$$E_0[P_t] = P_0 e^{rt}.$$

Cabe recordar que

$$E_0[P_t] = P_0 e^{\alpha t}.$$

Igualando las dos últimas expresiones, concluimos que en Ausencia de Oportunidades de Arbitraje $\alpha = r$, es decir, la rentabilidad esperada para el activo arriesgado tiene que ser igual a la del activo sin riesgo.

Empleando la misma argumentación, el valor C_0 de la opción *Call* viene determinado por la expresión

$$C_0 = e^{-rT} E_0 \left[\text{máx}(P_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T} - K, 0) \right].$$

que puede calcularse explícitamente empleando las propiedades de la distribución normal. Con esto obtenemos que el precio en $t = 0$ de nuestro depósito bolsa, se calcula a partir de la expresión siguiente:

$$X_0 = e^{-rT} + \frac{0{,}40}{P_0} C_0.$$

Fijémonos que los parámetros que necesitamos conocer para poder calcular son la rentabilidad r del activo libre de riesgo y la volatilidad del mercado σ.

En la Figura 5 presentamos los diferentes valores para la constitución de un depósito bolsa asumiendo que el valor inicial del IBEX 35 es de 12.012.70 puntos. El primer bloque separado por una línea discontinua, nos muestra los diferentes valores de X_0 en función de los valores de σ, que aparecen en la primera columna, y los valores de r, que aparecen en la primera fila. En el bloque inferior, se dan los valores del segundo sumando que compone el cálculo del precio del depósito bolsa, esto es,

$$\frac{0{,}40}{P_0}C_0.$$

El tercer bloque, nos da los valores del primer sumando e^{-rT}. Como podemos observar en la Figura 5 este producto tiene precios iniciales inferiores a un euro siempre que los tipos de interés sean superiores a un tres por ciento anual aproximadamente y con volatilidad anual inferior a un 30 % aproximadamente.

IBEX 35, P_0 12.012,70

sigma/r	0.0100	0.0280	0.0460	0.0640	0.0820	0.1000
0.0500	0.9958	0.9765	0.9585	0.9417	0.9258	0.9109
0.1200	1.0053	0.9842	0.9655	0.9482	0.9319	0.9167
0.1900	1.0166	0.9927	0.9729	0.9549	0.9382	0.9226
0.2600	1.0286	1.0019	0.9808	0.9620	0.9447	0.9286
0.3300	1.0408	1.0116	0.9890	0.9692	0.9513	0.9347
0.4000	1.0527	1.0216	0.9974	0.9767	0.9580	0.9409

sigma/r	0.0100	0.0280	0.0460	0.0640	0.0820	0.1000
0.0500	0.0156	0.0309	0.0464	0.0618	0.0771	0.0922
0.1200	0.0251	0.0386	0.0534	0.0683	0.0832	0.0980
0.1900	0.0364	0.0471	0.0608	0.0751	0.0895	0.1038
0.2600	0.0484	0.0563	0.0687	0.0821	0.0959	0.1098
0.3300	0.0606	0.0660	0.0768	0.0894	0.1026	0.1159
0.4000	0.0725	0.0761	0.0853	0.0969	0.1093	0.1221
exp(-rT)	0.9802	0.9455	0.9121	0.8799	0.8487	0.8187

Figura 5: Los valores del depósito bolsa en función de los parámetros r y σ.