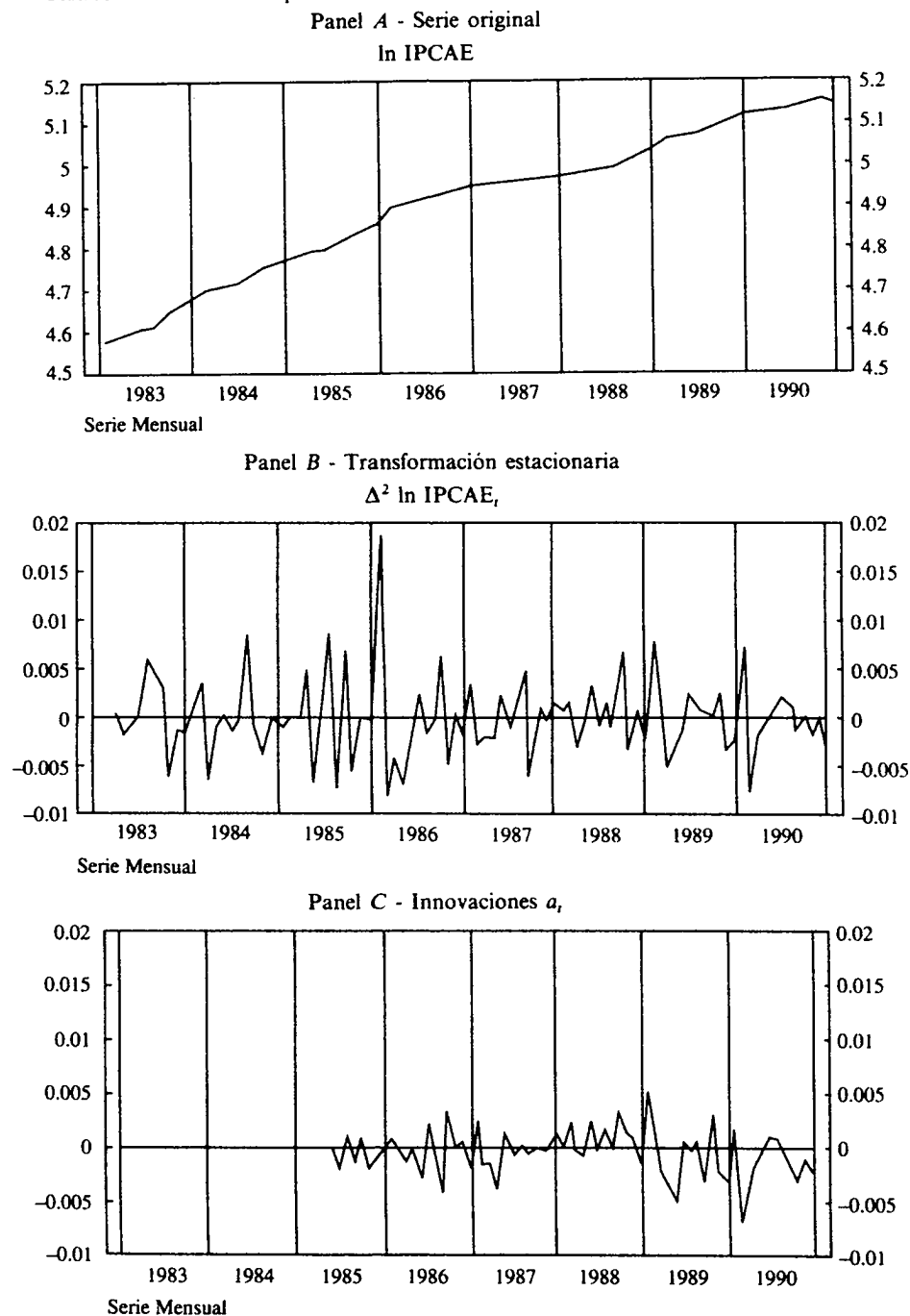




- ◆ Trabajo realizado por el equipo de la Biblioteca Digital de la Fundación Universitaria San Pablo-CEU
- ◆ Me comprometo a utilizar esta copia privada sin finalidad lucrativa, para fines de investigación y docencia, de acuerdo con el art. 37 del T.R.L.P.I. (Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual del 12 abril 1996)

GRÁFICO 2.5. Índice de precios al consumo de alimentos elaborados.



ritmica de la serie de precios presenta una evolución cuasi lineal (recuérdese que en este caso los coeficientes ψ_j crecen linealmente con j), aspecto que se comprueba visualmente en el primer panel del gráfico 2.5. Así, y mientras en los ejemplos de tipos de interés las series deambulaban alrededor de una constante que cambia con el tiempo ($d=1$), el caso presente tiene una evolución cuasi lineal ($d=2$).

4. Para la serie mensual de visitantes extranjeros (VEX), gráfico 2.6, se ha estimado el siguiente modelo:

$$\Delta\Delta_{12} \ln \text{VEX}_t = (1 - 0,57L)(1 - 0,25L^{12}) a_t$$

$$\sigma_a = 0,0506.$$

El tipo de diferencias empleado señala que los visitantes extranjeros evolucionan de forma cuasi lineal con estacionalidad de periodicidad anual, fácilmente apreciable en el gráfico de la serie original. En efecto, hemos visto como el operador $\Delta\Delta_{12}$ se puede expresar como $\Delta^2 U_{11}(L)$, en donde el factor Δ^2 recoge una evolución cuasi lineal, al igual que en el ejemplo anterior, y el factor $U_{11}(L)$ una oscilación estacional.

Estos dos últimos ejemplos van a permitir cerrar este epígrafe con una discusión de los aspectos diferenciadores entre $\Delta\Delta_{12}$, una diferencia regular y una estacional, y Δ^2 , dos diferencias regulares. Procesos estocásticos con el operador Δ^2 generan series temporales que se caracterizan por tener una evolución de tipo cuasi lineal; por otro lado, procesos con el operador $\Delta\Delta_{12}$, es decir, $\Delta^2 U_{11}(L)$, generan series que además de mostrar una evolución cuasi lineal en su nivel también contienen oscilaciones cíclicas anuales. Esquemáticamente, las diferencias aparecen representadas en el gráfico 2.7, utilizando series artificiales.

No obstante, es preciso señalar que en ocasiones la presencia de estacionalidad de carácter no estacionario no se detecta a simple vista, como ocurría en los casos recogidos en los gráficos 2.6 o 2.7. Por citar solamente un ejemplo, considérense los activos líquidos en manos del público (ALP), cuya evolución mes a mes entre los años 1979 y 1987 se representa en el panel superior del gráfico 2.8.

Aparentemente, y en especial si se compara con la serie de visitantes extranjeros, la evolución de los ALP no parece requerir el operador Δ_{12} ; y sin embargo, el modelo más adecuado para esta serie resulta ser

$$\Delta\Delta_{12} \ln \text{ALP}_t = (1 + 0,21L)(1 - 0,34L^{12}) a_t$$

$$\sigma_a = 0,0035,$$

GRÁFICO 2.6. Visitantes extranjeros.

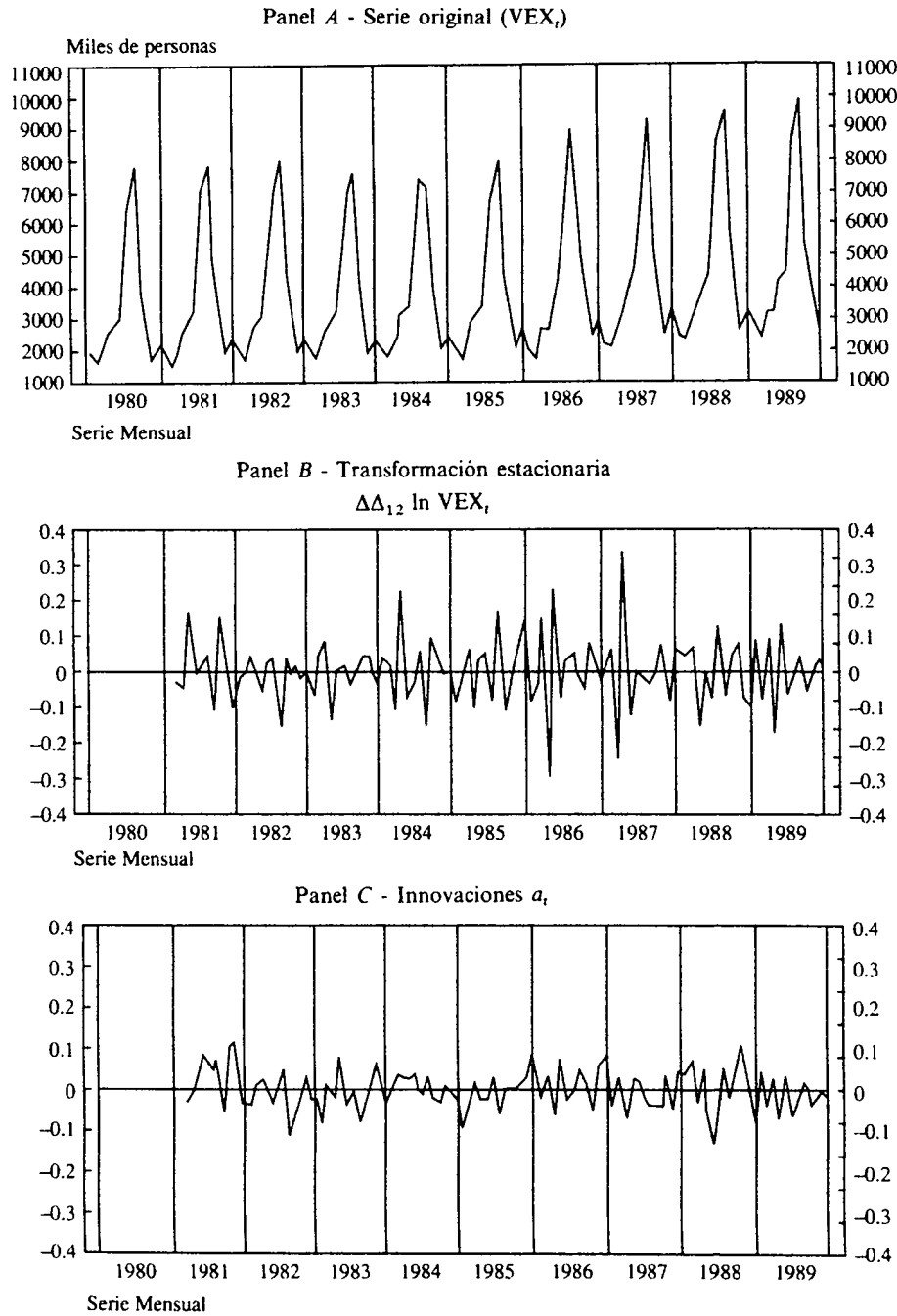


GRÁFICO 2.7. Comparación de las transformaciones estacionarias.

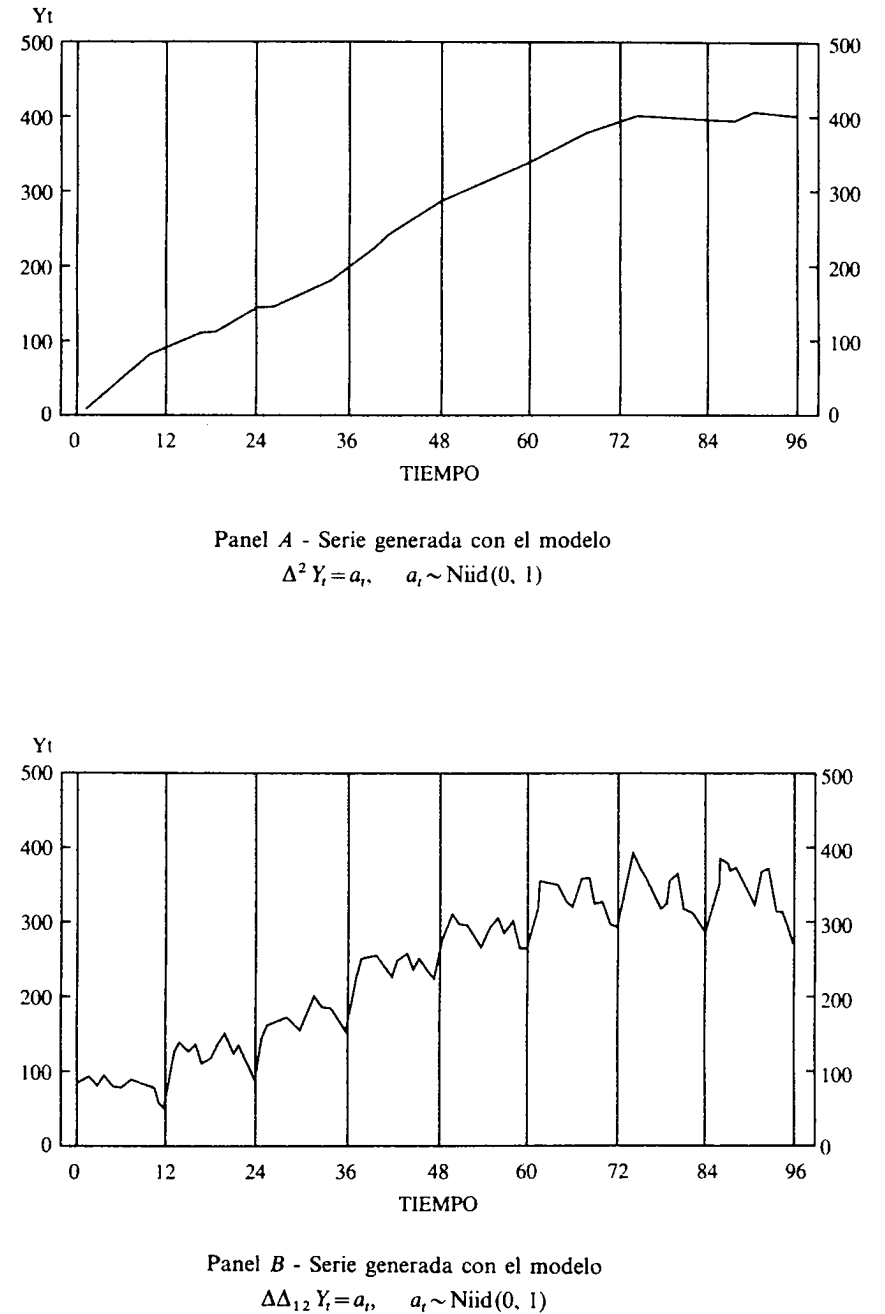
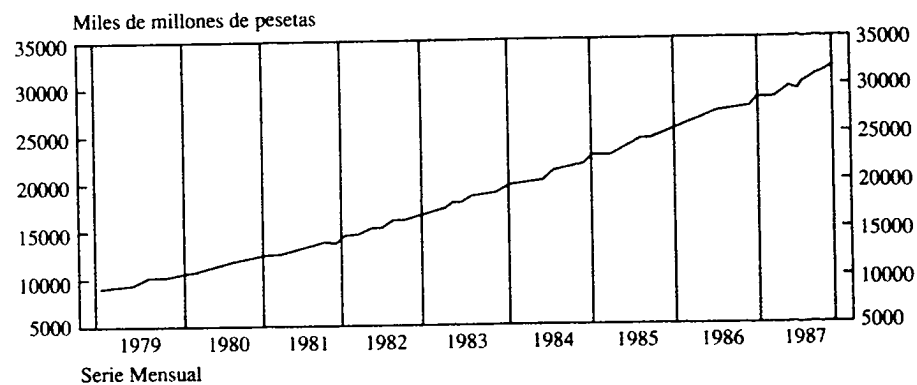
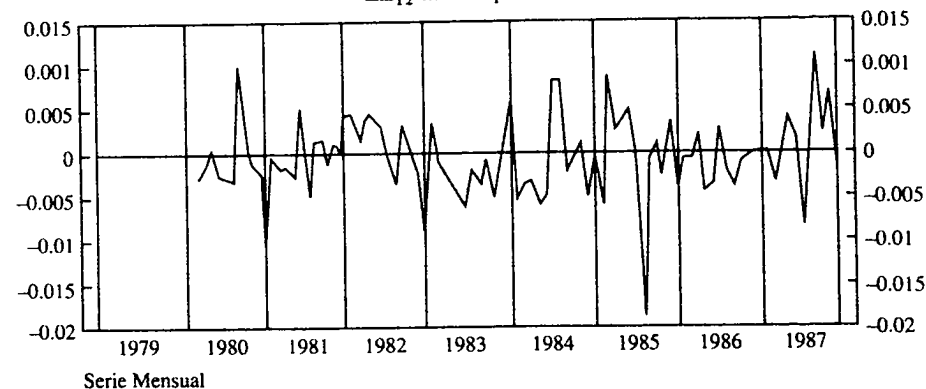
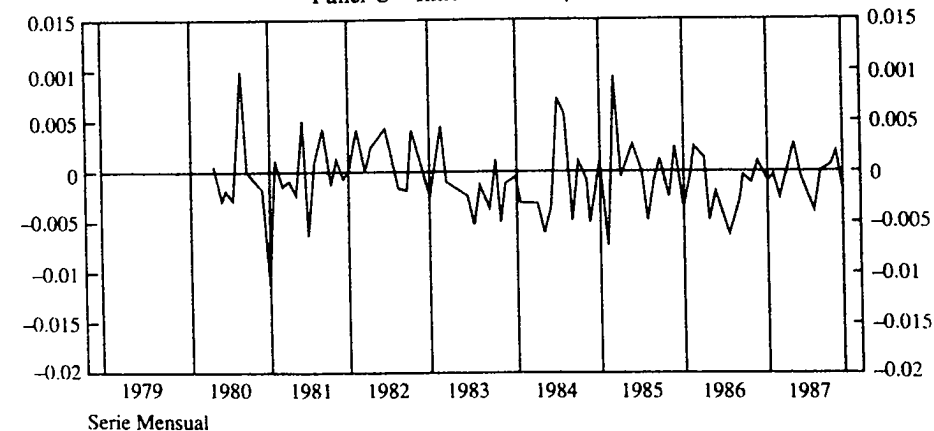


GRÁFICO 2.8. *Activos líquidos en manos del público.*Panel A - Serie original (ALP_t)

Panel B - Transformación estacionaria

$$\Delta_{12} \ln ALP_t$$

Panel C - Innovaciones a_t 

y se comprueba que la simple inspección visual del gráfico de la serie original puede no ser suficiente para decidir si incluir o no el operador Δ_{12} .

2.6. El análisis de intervención y la modelización de anomalías

Muchas veces se observa que en determinados momentos la serie a analizar presenta movimientos bruscos de importancia, que no es posible captar con una dependencia sistemática de su pasado. Si en un momento concreto ocurre algo atípico o anómalo, que no guarda relación con el patrón de comportamiento de la serie observado hasta esa fecha, tal movimiento no se va a poder explicar con la secuencia de términos $\pi_j Y_{t-j}$ que contiene un modelo ARIMA en su formulación (2.3.3).

En las secciones anteriores se ha presentado una clase de modelos válida para recoger una regularidad en el tiempo y explotarla con fines explicativos y predictivos. Si aparece algo anómalo, sin conexión con la experiencia previa, el modelo no estará preparado para captarlo, y para ello hay que extender los esquemas considerados hasta el momento.

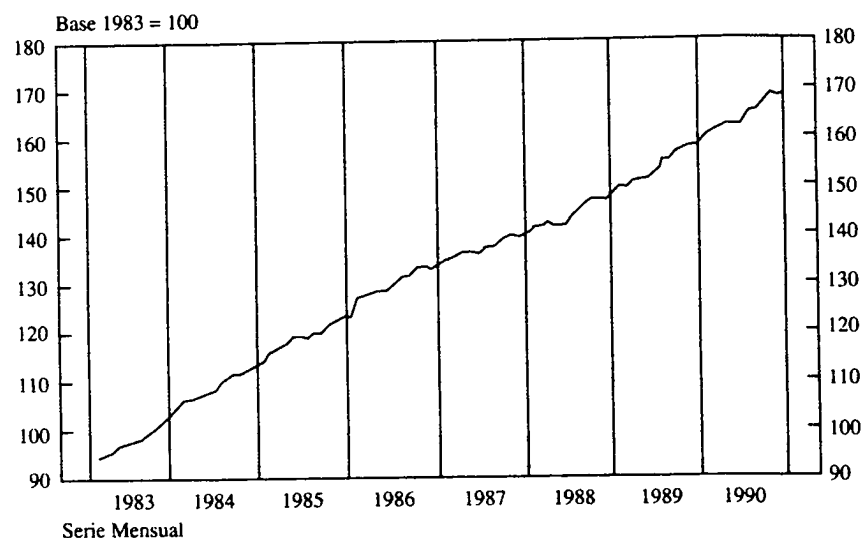
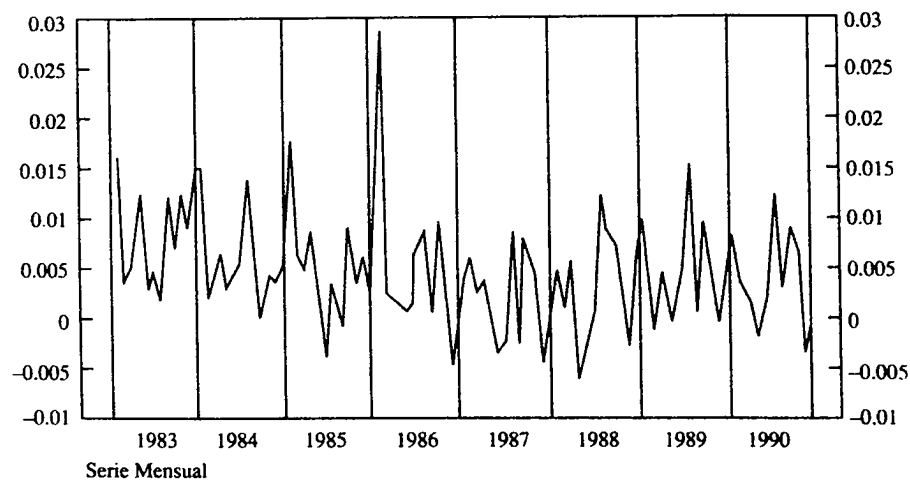
Algunos ejemplos de comportamientos anómalos:

1. La introducción en enero de 1986 del Impuesto sobre el Valor Añadido (IVA) provocó que el Índice de Precios al Consumo subiera, por tal hecho, 2,2 puntos en 1986 (véase Espasa et al., 1987). Tal introducción representa algo atípico que aparece de repente y que incide en la serie analizada, y se puede considerar que no tiene relación con la evolución anterior de la misma. Su efecto se recoge en el gráfico 2.9: obsérvese que esta anomalía pasa relativamente desapercibida en el gráfico de la serie original (IPC), pero es muy clara en el de la tasa de inflación intermensual aproximada por $(1-L) \ln IPC_t$.

2. En diciembre de 1982 los pasivos computables en el agregado monetario ALP (Activos Líquidos en manos del Público) se reducen, ya que los depósitos del sector público dejan de ser computables. Se produce así una bajada en el nivel de ALP debido a que por ley desaparece una de las partidas que lo componían.

3. En el Índice de Producción Industrial las crisis energéticas de 1974 y 1979 tienen su efecto especial, ya que se observa una ruptura respecto a lo que era la evolución de la serie hasta esos momentos.

GRÁFICO 2.9. Índice general de precios de consumo.

Panel A - Serie original (IPC_t)Panel B - Tasa de inflación intermensual ($\Delta \ln \text{IPC}_t$)

4. En las series de exportaciones: desde enero de 1981 las exportaciones de un mes se computan considerando las transacciones realizadas desde el día 1 hasta el 31, cuando el criterio previo era el 25 del mes anterior al 24 del mes corriente. Por este motivo, hubo un mes (diciembre de 1980) en el que se tuvo que contabilizar, de forma excepcional, las transacciones realizadas entre el 25 de noviembre y el 31 de diciembre, lo que supone una ruptura que se ha de modelizar expresamente.

Para la modelización de cualquiera de los fenómenos que se acaban de comentar hay que completar el modelo ARIMA hasta aquí estudiado con lo que se conoce en la literatura como *Análisis de Intervención*¹⁵.

El análisis de intervención es una generalización de lo que en econometría se denomina análisis con variables artificiales¹⁶, es decir, el empleo de variables indicador que suelen tomar los valores cero y uno. La generalización que supone el análisis de intervención consiste en que en él la variable artificial puede ir afectada por un filtro ARMA (autorregresivo y de medias móviles) del tipo:

$$\frac{w_s(L)}{\delta_r(L)} = \frac{w_0 + w_1 L + \dots + w_s L^s}{1 - \delta_1 L - \dots - \delta_r L^r}, \quad (2.6.1)$$

con lo que la flexibilidad de dicha variable para explicar los movimientos anómalos en las series es muy grande, permitiéndose que sean los datos quienes decidan el tipo de estructura requerida en esos puntos de ruptura mediante la estimación de los parámetros w_j y δ_j . Al filtro del numerador, $w_s(L)$, se le conoce como el *filtro de medias móviles*, mientras al filtro del denominador, $\delta_r(L)$, se le denomina *filtro autorregresivo*.

El análisis de intervención es útil para explicar puntos atípicos en las series debidos a causas concretas y conocidas pero difíciles de cuantificar, y que en general suelen ser, sin ánimo de ser exhaustivos, de alguno de los siguientes tipos:

1. Errores en la construcción de la serie publicada.
2. Cambios de definición de la serie.
3. Medidas económicas especiales o cambios de legislación.
4. Acontecimientos extraordinarios (huelgas, elecciones, conflictos internacionales, etc.).

¹⁵ Véase Box y Tiao (1975), en cuyo artículo están inspirados los comentarios de este epígrafe. En Espasa (1985c) se recoge también una presentación del análisis de intervención.

¹⁶ Véase, por ejemplo, Suits (1957, 1984), Derrick (1984) o Kennedy (1985).

5. Fenómenos que afectan a la estacionalidad de la serie, con cierto carácter excepcional, como son la presencia de fiestas móviles, etcétera.
6. Cambios en los calendarios administrativos.
7. Series sometidas a control.
8. Crisis Económicas.

Como ejemplos de los cuatro primeros tipos de intervención se pueden citar los siguientes trabajos. En Espasa (1979a) se detecta la necesidad de un análisis de intervención en el agregado monetario disponibilidades líquidas, y Tortosa (1979) demuestra que es debido a algún error en los datos que no se había descubierto hasta el momento. Algunos problemas en los cambios de definición del agregado monetario se discuten y modelizan en Espasa y Pérez (1979). En Treadway et al. (1978) se hace un análisis de intervención bastante exhaustivo para tener en cuenta los efectos de las devaluaciones y revaluaciones de la peseta en la modelización de la cuenta del sector exterior del balance ajustado del Banco de España. La crisis del Golfo Pérsico en 1990 es un acontecimiento extraordinario que ha afectado a determinadas variables de actividad como el consumo de gasolina.

En cuanto a intervenciones de naturaleza estacional o de cambio de calendario, se pueden comentar, entre otras, las siguientes. Las mejoras en el tratamiento del mayor número de falta de respuestas en la encuesta mensual de producción industrial del Instituto Nacional de Estadística, junto con un mayor deseo de los agentes productivos en concentrar las vacaciones de verano en el mes de agosto, provoca un cambio excepcional en la estacionalidad del índice de producción industrial, que Morales et al. (1989) tienen en cuenta a través de un análisis de intervención. El período de semana santa es un período vacacional de fecha variable que afecta, por ejemplo, a series de producción y servicios, y cuyo efecto se suele modelizar mediante variables artificiales (Hillmer et al., 1982, Espasa 1983b, etc.). El retraso en 1986 de la fecha habitual de liquidación al Tesoro de la cuota diferencial anual del impuesto sobre la renta de las personas físicas altera el comportamiento de los agregados monetarios en junio de dicho año, y Espasa y Salaverría (1988) lo tienen en cuenta mediante un análisis de intervención.

Las series como los agregados monetarios, cuyo crecimiento ha sido sometido a control por parte de las autoridades monetarias, requieren en su modelización univariante, si tal control ha sido efectivo, la incorporación de variables artificiales que capten dichos efectos. En Espasa y Salaverría (1988) se trata con detalle este problema para la serie de activos líquidos en manos del público.

Por último, las crisis ocurridas en 1974 y 1979 debidas a fuertes

incrementos en los precios energéticos, afectan considerablemente a series de actividad, como el producto interior bruto, y a nivel univariante requieren un análisis de intervención. En Espasa (1984b) se aborda el caso del producto interior bruto español trimestralizado y vía análisis de intervención se evalúan los efectos de dichas crisis energéticas en el crecimiento económico español. Para este tipo de acontecimientos que producen cambios importantes en la estructura de crecimiento de las series, Perron (1988, 1989, 1990) propone también la aplicación del análisis de intervención.

Los ejemplos anteriores se referían a series anuales, trimestrales, mensuales y decenales. Al bajar en la desagregación temporal y trabajar con series diarias de actividad, el análisis de intervención cobra una importancia muy grande, pues pasa a ser el instrumento utilizado para explicar oscilaciones, con frecuencia enormes, debidas a la presencia de fiestas intrasemanales, períodos vacacionales, efectos de fin de mes, etc. En Espasa (1979b), Loureiro (1986), Cancelo (1988b y 1990) y Cancelo y Espasa (1991a) se hace un amplio uso del análisis de intervención en la modelización de series diarias.

Al realizar un análisis univariante y encontrar valores atípicos la primera medida a tomar debe consistir en examinar si la causa es un error en la transcripción de los datos. Si no lo es convendrá investigar, siempre que sea posible, si hubo error en la construcción o elaboración de los datos publicados que pueda ser subsanado, como ocurre en los trabajos anteriormente comentados de Espasa (1979a) y Tortosa (1979). Con frecuencia éstas suelen ser las causas de un número importante de puntos atípicos.

Si la causa de la anomalía no son errores subsanables en los datos, habrá que indagar si es debida a algún acontecimiento especial como los mencionados anteriormente.

Si tras este estudio se identifica para la anomalía una causa tratable mediante variables artificiales, habrá que recoger información sobre el tipo de efecto que se espera que tenga dicha causa sobre la serie en cuestión. Con esa información, se construye la variable artificial pertinente y se selecciona un esquema ARMA de los definidos en (2.6.1), de modo que la acción conjunta de variable artificial y filtro sea capaz de modelizar la anomalía identificada. Para aplicar este procedimiento es necesario conocer qué tipo de efectos hay detrás de los principales tipos de variables artificiales y de filtros ARMA.

Las anomalías a veces son muy evidentes en las series y se detectan fácilmente con la mera inspección del gráfico de la serie original o de su transformación estacionaria. Otras veces tal evidencia es más confusa y no es sino después de un análisis de las innovaciones estimadas con un modelo ARIMA, cuando se puede detectar y contrastar la presencia de anomalías. Sobre procedimientos para detectar

la presencia de anomalías véase Fox (1972), Box y Tiao (1975, 1976), Chang (1982), Tsay (1986, 1988) y referencias contenidas en este último trabajo.

Para facilitar la exposición sea el siguiente ejemplo: analizando la serie mensual de producción de una empresa se encuentra que en la observación F (supóngase para simplificar que la serie es mensual) la empresa estuvo en huelga, lo que afectó seriamente a la producción. Esta huelga se puede modelizar mediante una variable artificial de tipo impulso, que toma el valor cero para todas las observaciones salvo para la de la huelga, en que toma el valor uno:

$$DF_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq F \\ 1 & \text{si } t = F \end{cases}$$

Esta variable se denota por DF_t , donde D indica que es una variable impulso y F es el mes concreto en que toma el valor uno, es decir, en el que ocurrió la anomalía.

Si el modelo ARIMA de la serie de producción es

$$Y_t = \frac{\theta_q(L)}{\phi_{p+d}(L)} a_t$$

y se supone que la huelga sólo afecta a la producción de la observación F , se puede mejorar la explicación de Y usando

$$Y_t = w_0 DF_t + \frac{\theta_q(L)}{\phi_{p+d}(L)} a_t,$$

donde $w_0 DF_t$ es la parte asociada al análisis de intervención, y el coeficiente w_0 es el efecto que dicha intervención tiene sobre Y_t , es decir, sobre la producción.

Si la serie está en sus unidades observadas, w_0 representa el efecto de la huelga medido en esas unidades observadas. Si la serie está expresada en logaritmos y w_0 es pequeño en valor absoluto, representa aproximadamente el efecto en tanto por uno que tiene esa intervención sobre el valor del dato observado; la cifra exacta, sea cual sea el valor del coeficiente, es igual a $1 - \exp(-w_0)$.

Considérese ahora la siguiente complicación del ejemplo: la actividad a la que se dedica la empresa es tal que una huelga en el momento de tiempo F afecta también a la producción de $F+1$, ya que una parada en el proceso productivo no se recupera con facilidad; en este caso el término de análisis de intervención sería $(w_0 + w_1 L) DF_t$, donde w_0 es el efecto de la huelga en la observación correspondiente

a F y w_1 el efecto en $F+1$. Es inmediato comprobar que LDF_t , el retardo de DF_t , es equivalente a $D(F+1)_t$, un impulso en la observación $F+1$.

En consecuencia el filtro $w_0 + w_1 L$ alarga un mes más el efecto de DF_t (véase el gráfico 2.10, panel A); generalizando este resultado, una expresión de la forma

$$(w_0 + w_1 L + \dots + w_s L^s) DF_t = w_s(L) DF_t$$

supone alargar durante s meses más el efecto de DF_t (véase el panel A del gráfico 2.11).

Con lo visto hasta aquí se puede concluir que las variables impulso captan efectos que acontecen puntualmente, aunque esos efectos se pueden alargar en el tiempo mediante el empleo de filtros del tipo $w_s(L)$.

Con los filtros $w_s(L)$ que se han estudiado hasta el momento no se impone ningún tipo de estructura en los efectos, es decir, ningún tipo de relación/restricción entre los efectos en distintos momentos del tiempo.

Para imponer esta clase de relación se emplean filtros autorregresivos (AR); por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{1-\delta L} &= w_0(1 + \delta L + \delta^2 L^2 + \dots + \delta^s L^s + \dots) = \\ &= w_0 + w_0 \delta L + w_0 \delta^2 L^2 + \dots + w_0 \delta^s L^s + \dots \end{aligned}$$

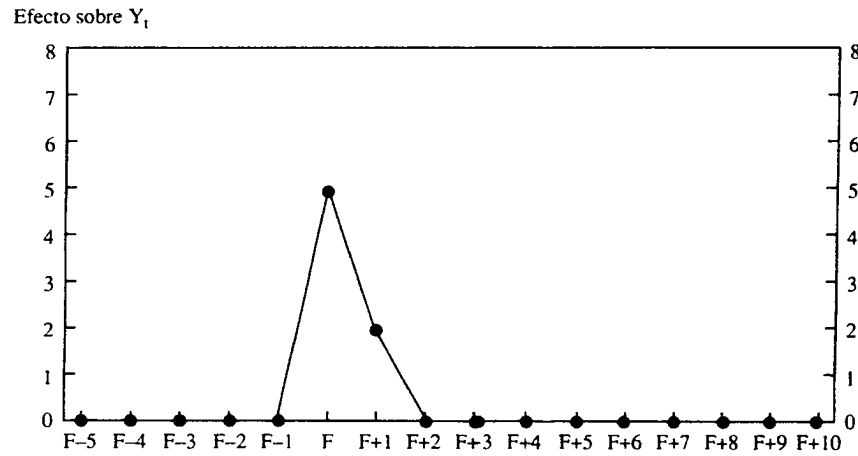
En esta expresión los coeficientes están restringidos, ya que el coeficiente de la potencia h de L es el coeficiente de la potencia $h-1$ multiplicado por δ , y esto se da desde L^0 . En tal caso se dice que la intervención tiene un efecto alargado en el tiempo pero con restricciones que dan una estructura a la sucesión de coeficientes. En este ejemplo esta estructura se da desde el comienzo de la intervención (véase el panel A del gráfico 2.12).

Los efectos de una intervención suelen amortiguarse en el tiempo, por lo que lo normal es imponer que $|\delta| < 1$. A lo largo de este libro se supondrá siempre tal restricción en los filtros correspondientes al análisis de intervención. Obsérvese que con el filtro anterior el efecto de la intervención se prolonga durante muchos meses, pero el efecto individual de cada mes es una proporción k del efecto del mes anterior.

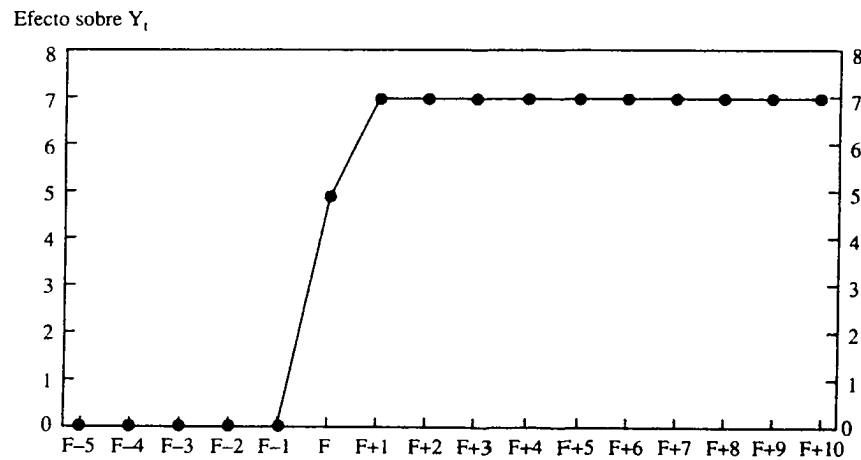
El efecto implícito en una expresión del tipo $w_0/(1-\delta L)$ es teóricamente infinito, en el sentido de que por muy grande que sea j siempre existe un término de la forma $w_0 \delta^j$ distinto de cero asociado a L^j . Sin embargo, y como $|\delta| < 1$, δ^j tiende a cero para j grande, con lo

GRÁFICO 2.10.

Panel A - Ejemplo de una intervención del tipo $(w_0 + w_1 L)DF_t$



Panel B - Ejemplo de una intervención del tipo $(w_0 + w_1 L)SF_t$

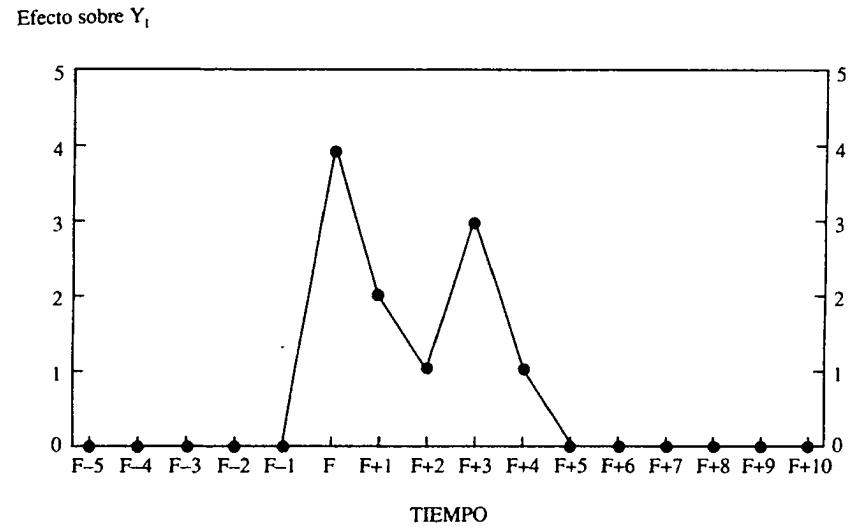


que en la práctica a partir de un valor k suficientemente grande los efectos son despreciables; de ahí que

$$\frac{w_0}{1 - \delta L} \simeq w_0 + w_0 \delta L + \dots + w_0 \delta^k L^k$$

GRÁFICO 2.11.

Panel A - Ejemplo de una intervención del tipo $(w_0 + w_1 L + w_2 L^2 + w_3 L^3 + w_4 L^4)DF_t$



Panel B - Ejemplo de una intervención del tipo $(w_0 + w_1 L + w_2 L^2 + w_3 L^3 + w_4 L^4)SF_t$

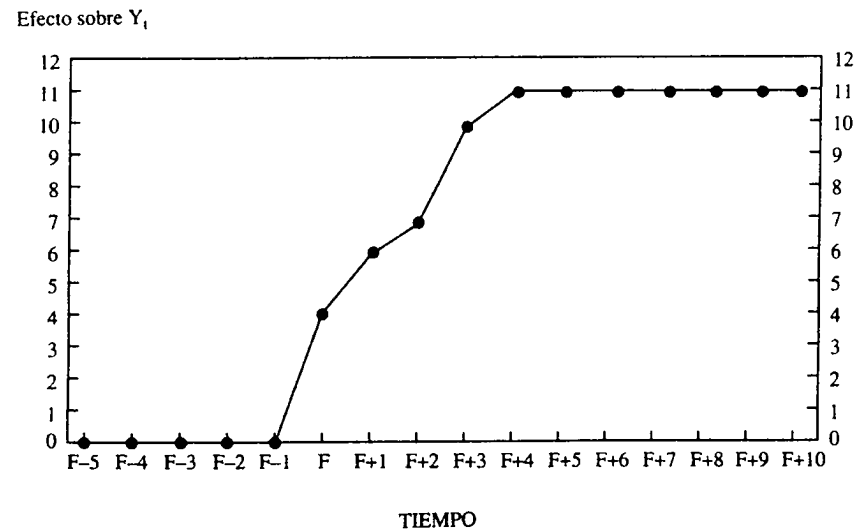
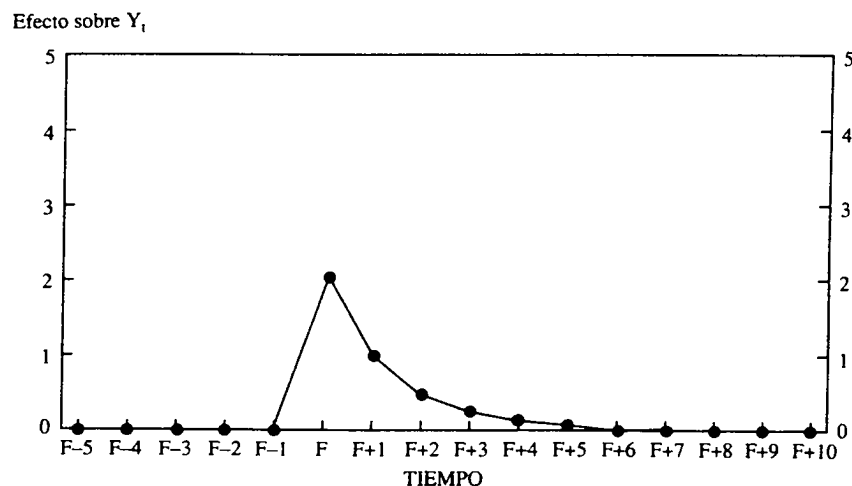


GRÁFICO 2.12.

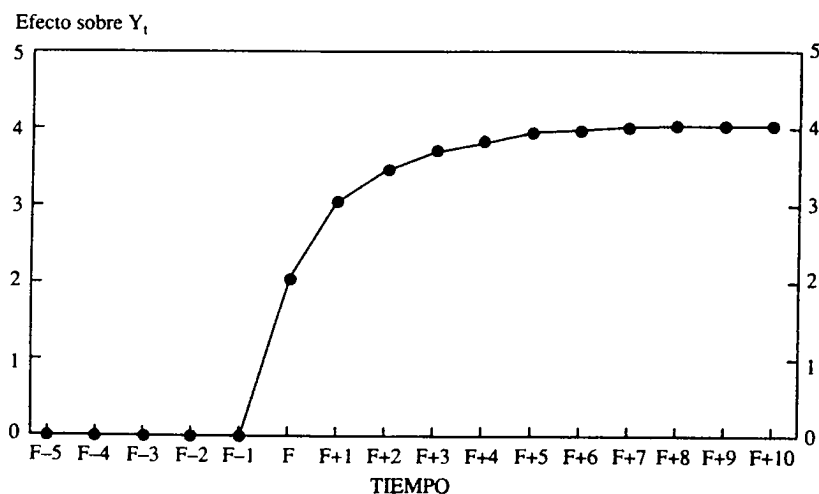
Panel A - Ejemplo de una intervención del tipo

$$\frac{w_0}{1-\delta L} DF_t$$



Panel B - Ejemplo de una intervención del tipo

$$\frac{w_0}{1-\delta L} SF_t$$



y la observación $F+k$ puede considerarse con la última en la que el impulso en F surte efectos.

La utilidad de considerar tanto filtros MA como filtros AR se pone de manifiesto cuando se recuerda que en la práctica sólo se dispone de un número finito de observaciones, y cualquier esquema explicativo de las mismas ha de estar basado en un número relativamente pequeño de parámetros para que sea operativo.

Con un filtro MA , $w_s(L)$, no se impone ningún tipo de restricción en los coeficientes; por ello éstos necesariamente han de ser en número finito y relativamente pequeño. Pero a veces es necesario permitir que la anomalía tenga un efecto más dilatado en el tiempo: para ello se usa un filtro AR , que permite una respuesta larga (teóricamente infinita) a base de imponer restricciones entre los coeficientes que representan el efecto de la anomalía en cada momento del tiempo. Cuando el filtro es del tipo $w_s(L)/\delta_1(L)$, las restricciones del filtro autorregresivo no se imponen desde el principio de la intervención sino pasadas s observaciones.

Combinando ambas clases de filtros se tiene una familia de filtros suficientemente general, capaz de aproximar cualquier tipo de efecto que pueda surgir en el análisis aplicado, y que al mismo tiempo depende sólo de un número finito de parámetros.

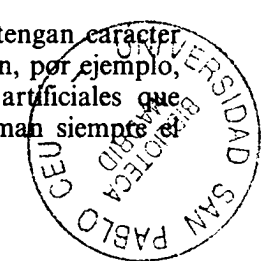
Las variables impulso se caracterizan por no tener efectos a largo plazo sobre el nivel de la variable a la que se aplican; esto es fácil de comprobar, ya que si el término de análisis de intervención se puede expresar como

$$\frac{w_s(L)}{\delta_r(L)} DF_t,$$

se observa que por definición DF_t , a partir de $F+1$ toma el valor cero, $w_s(L)$ es un polinomio finito de orden s y $\delta_r(L)$ es un filtro de efectos que se amortiguan en el tiempo. En consecuencia, transcurridos un número finito k de periodos, donde ese valor k dependerá de los polinomios $w_s(L)$ y $\delta_r(L)$, la alteración que representa DF_t en la evolución normal de Y_t habrá desaparecido, al menos prácticamente, y la variable original volverá a sus niveles habituales.

Para modelizar intervenciones que se espera que tengan carácter permanente en el nivel de la serie estudiada se emplean, por ejemplo, las llamadas variables *escalón*. Estas son variables artificiales que toman el valor cero hasta $F-1$, y a partir de F toman siempre el valor uno:

$$SF_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t < F \\ 1 & \text{si } t \geq F \end{cases}$$



Siguiendo una notación similar a la utilizada antes, a estas variables se les denotará por SF_t .

La necesidad de usar estas variables puede surgir de diferentes maneras:

1. Se dispone de información a priori que indica que la anomalía toma carácter permanente a partir de F : por ejemplo, el cambio de definición de ALP en diciembre de 1982. En este caso se modeliza su efecto empleando directamente una variable de tipo escalón.

2. En un efecto planteado como

$$\frac{w_s(L)}{1-\delta L} DF_t,$$

la estimación del coeficiente δ resulta ser igual a uno. En tal caso, se tiene que

$$\frac{1}{1-\delta L} DF_t = \frac{1}{1-L} DF_t = \frac{1}{\Delta} DF_t = (1+L+L^2+L^3+\dots) DF_t = SF_t$$

ya que si se suman impulsos el resultado es un escalón. En este ejemplo la información contenida en los datos lleva a rectificar la opinión inicial del analista: lo que a priori parecía ser una intervención del tipo impulso con un efecto transitorio pero prolongado a lo largo del tiempo, resulta ser de tipo escalón, y en consecuencia con efecto permanente en la variable analizada.

3. Se ha estimado un efecto impulso sobre la primera diferencia de la serie, del tipo

$$\Delta Y_t = w_s(L) DF_t + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} a_t$$

De aquí

$$Y_t = \frac{w_s(L)}{\Delta} DF_t + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} \frac{a_t}{\Delta} = w_s(L) SF_t + \frac{\theta_q(L)}{\phi_p(L)} \frac{a_t}{\Delta}$$

y un efecto impulso sobre la primera diferencia equivale a un efecto escalón sobre el nivel¹⁷.

La discusión anterior sobre los efectos de los polinomios $w_s(L)$ y

¹⁷ De forma similar la primera diferencia de un escalón es un impulso: $\Delta SF_t = DF_t$. Es conveniente manejar bien esta relación, ya que permite interpretar correctamente el efecto de la anomalía en términos de efecto sobre el stock y efecto sobre el flujo.

$\delta_r(L)$ sigue siendo válida cuando el filtro se aplica a una variable escalón. Una anomalía modelizada de la forma

$$(w_0 + w_1 L) SF_t = w_0 SF_t + w_1 S(F+1)_t$$

tiene un efecto sobre la variable de interés que se ilustra en el panel B del gráfico 2.10, para el caso en que w_0 y w_1 toman valores positivos. En él se ve que el efecto escalón comienza en F y se alarga hasta $F+1$; el efecto total del acontecimiento extraño que ocurrió en F es $w_0 + w_1$, y a ese efecto total o resultado final sobre la evolución de la serie es lo que se llama *efecto a largo plazo* o *ganancia*, y se denota por g .

En teoría es posible que una intervención de tipo escalón no tenga efectos a largo plazo sobre la que se aplica si la ganancia es cero; en el ejemplo anterior, si $w_0 = -w_1$. Pero salvo en los casos de ganancia nula, las variables escalón tienen un efecto permanente, a diferencia de lo que ocurría con las variables de tipo impulso.

Si la variable escalón viene afectada por un filtro $w_s(L) = w_0 + w_1 L + \dots + w_s L^s$, se tiene un efecto alargado s periodos sin ningún tipo de estructura, como el que se presenta en el panel B del gráfico 2.11, para valores positivos de todos los coeficientes w_j . Por el contrario, añadiendo un término $\delta_r(L)$ en el denominador se llega a un efecto alargado con estructura, como el representado en el panel B del gráfico 2.12 para valores positivos de w_0 y δ . Esta estructura se da transcurridos $(s-r+1)$ periodos desde que apareció la intervención. Si r es la unidad y s toma el valor cero, como es el caso del gráfico 2.12, entonces la estructura se da desde el principio de la intervención.

Para llegar al cálculo de la ganancia en un caso más general¹⁸, nótese que

$$\frac{w_s(L)}{1-\delta L} = v_0 + v_1 L + v_2 L^2 + \dots$$

y el efecto total a largo plazo se define como

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} v_j = g$$

¹⁸ El caso general sería el correspondiente a un filtro racional del tipo $w_s(L)/\delta_r(L)$, pero filtros con componentes autorregresivos de orden superior a uno raramente suelen estar justificados.

Una forma más cómoda de calcularlo es evaluando el polinomio racional para L igual a 1. Es decir,

$$g = \frac{w_s(1)}{1 - \delta \cdot 1} = \frac{w_0 + w_1 + \dots + w_s}{1 - \delta}$$

Siendo una técnica relativamente sencilla de emplear, el análisis de intervención puede ser muy útil para analizar hechos de gran importancia en el mundo de la empresa o de las instituciones. Inicialmente se trata de explicar con variables artificiales los movimientos anormales que experimenta la serie; pero su importancia muchas veces va más allá de explicar el acontecimiento atípico, ya que puede ocurrir que si no se considera la intervención no se llegue a captar la verdadera dependencia respecto del pasado, debido a las distorsiones introducidas en la serie observada por las perturbaciones anormales.

Hasta este momento se ha dicho que el análisis de intervención implica combinar dos tipos de herramientas complementarias:

1. La variable artificial. En ello la discusión se ha centrado en dos variables, el impulso, que no tiene efectos permanentes en el nivel de la variable, y el escalón, que sí los tiene, siempre y cuando su ganancia no sea nula. En el escalón el efecto permanente es constante, g , pues el nivel de la variable artificial se mantiene siempre en el valor uno a partir de F .

2. El filtro. Filtros en el numerador $-w_s(L)$ alargan el efecto de la variable artificial sin imponer restricciones en los coeficientes; filtros en el denominador $-\delta_r(L)$ lo hacen introduciendo restricciones. Estos últimos suponen un alargamiento teóricamente infinito; pero al ser filtros construidos de forma que sus efectos se amortiguen en el tiempo, en la práctica el efecto se puede considerar estabilizado pasado un cierto número de periodos, en caso de aplicarse a un escalón, o anulado en el caso de aplicarse a un impulso.

Obviamente existen otras variables con un efecto permanente que no es constante. Por ejemplo, las variables tendencia, TF_t , que toman valores cero hasta la observación $F-1$ y los valores 1, 2, 3, ... a partir de F . A veces estas tendencias se utilizan truncadas, TFK_t , en cuyo caso a partir de la observación F toman el valor 1, 2, 3, ... hasta la observación $F+K$, a partir de la cual se estabilizan en el valor $K+1$. En el capítulo séptimo de este libro se utiliza una tendencia truncada para captar el efecto de la segunda crisis energética en el índice de producción industrial español.

En los problemas que se plantean al analizar fenómenos reales puede ser necesario combinar distintos tipos de variables artificiales para captar plenamente la distorsión. Supóngase que en el momento

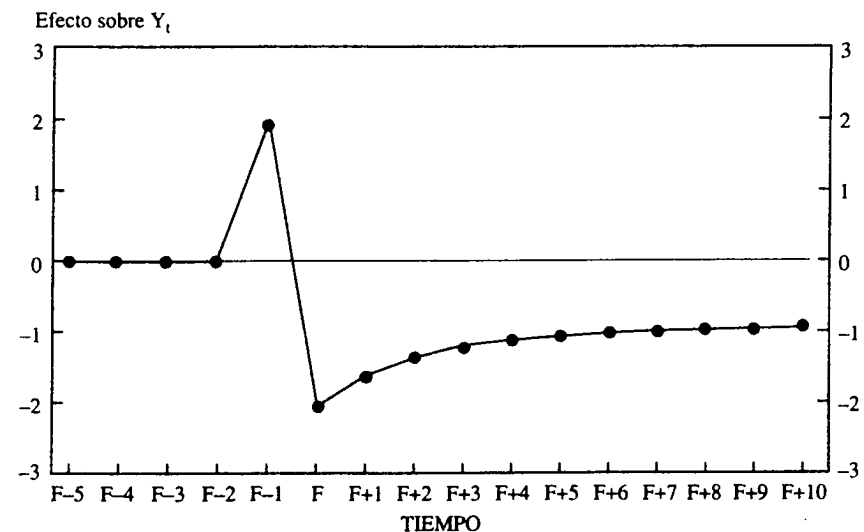
$F-1$ se anuncia la introducción de un fuerte impuesto, que será aplicable a partir de F , sobre el precio de un bien no perecedero. Cabe esperar entonces que en $F-1$ se produzca un fuerte aumento de las ventas de ese bien, seguido de una caída muy acusada en F , que se va recuperando, en parte y gradualmente, en los meses posteriores, hasta que en un momento futuro el nivel de ventas se estabiliza alrededor de un valor menor del que tenía con anterioridad a $F-1$. Esta clase de efecto se puede modelizar con una expresión de la forma:

$$w_0 D(F-1) + \frac{w_1}{1-\delta L} DF_t + w_2 SF_t$$

donde $w_0 > 0$, $w_1, w_2 < 0$ y $0 < \delta < 1$. La representación gráfica de esta anomalía figura en el gráfico 2.13.

En $F-1$ hay un crecimiento puntual y transitorio dado por la acumulación de existencias para paliar temporalmente el efecto del impuesto, y recogido por $w_0 D(F-1)$. A partir de F se superponen dos clases de efectos: por un lado el efecto de largo plazo de la introducción del nuevo impuesto, un efecto permanente cuantificado en una caída en w_2 unidades respecto al valor previo y representado por $w_2 SF_t$. Por otro, hay un efecto transitorio, aunque distribuido en el tiempo, derivado del almacenamiento que se produjo en $F-1$; estas existencias se van agotando poco a poco, a una tasa δ por mes,

GRÁFICO 2.13. Representación gráfica de la intervención asociada a la introducción de un nuevo impuesto.



y en el caso del ejemplo para $F + 6$ se puede decir que el acaparamiento de existencias ya se ha consumido y las ventas se mueven alrededor de su nuevo equilibrio.

Es de destacar que existen diferentes formas equivalentes de modelizar la situación anterior, pero la expuesta es la más adecuada, al distinguir perfectamente cuál es la naturaleza de los diversos factores que están influyendo en el fenómeno, y cuáles son sus respectivas distribuciones en el tiempo.

Así, distinguiendo si un factor tiene efectos de naturaleza transitoria o permanente, se elegirá una variable impulso o no. Si se rechaza el empleo de un impulso y se elige la variable artificial más adecuada, escalón, tendencia, tendencia truncada, etc., para captar su efecto a largo plazo sobre el fenómeno estudiado.

Por otro lado, analizando la distribución temporal del efecto se elegirá el filtro: un efecto instantáneo requerirá meramente un filtro $MA(0) = w_0$, un efecto a lo largo de pocas observaciones y sin estructura aparente se captará con un filtro $MA(s)$, y un efecto relativamente largo y con indicios de estructura transcurridos $(s-r+1)$ periodos desde que apareció la intervención, se puede recoger con un filtro $MA(s)/AR(r)$, donde r normalmente será la unidad.

En algunas ocasiones puede ser dudoso si el efecto es de carácter permanente o transitorio, en cuyo caso no será sencillo decidir entre un impulso o un escalón. En esta situación, y recordando que

$$DF_t = \Delta SF_t \Leftrightarrow SF_t = \frac{DF_t}{\Delta} = \frac{DF_t}{1-L}$$

lo más adecuado será incluir en el modelo una variable impulso con un filtro $\delta_1(L) = 1 - \delta L$ en el denominador, y estimar el valor de δ . Si ese valor resulta lo suficientemente próximo a 1 (por encima de 0,9), se puede tomar el resultado como una indicación de que la variable artificial es un escalón; en caso contrario se debe mantener el impulso, con lo que la intervención no tiene efectos a largo plazo¹⁹.

A los modelos presentados en esta sección se les denominará ARIMA-IA (modelos ARIMA-Intervention Analysis). Para concluir el epígrafe se discuten algunos ejemplos de intervenciones en problemas reales.

1. IPC de Alimentos Elaborados (IPCAE): para la muestra

enero de 1978 a diciembre de 1986 Espasa et al. (1987) estiman el siguiente modelo:

$$\Delta^2 \ln IPCAE_t = w_0^a \Delta D8011_t + w_0^b \Delta D8108_t + w_0^c \Delta D8601_t + w_1^c \Delta D8602_t + w_2^c \Delta D8603_t + n_t$$

Dejando de lado la estructura estocástica de carácter estacionario del modelo, que se engloba en el término n_t , se observa que sobre la tasa de inflación de este tipo de bienes ($\Delta \ln IPCAE$) se definen distintos impulsos, que equivalen a escalones sobre el nivel ($\ln IPCAE$). En efecto, si $\Delta^2 \ln IPCAE$ requiere una intervención del tipo ΔDF , esto implica que la variable $\Delta \ln IPCAE$ requerirá una intervención con DF y $\ln IPCAE$ una intervención con $DF/(1-L)$, es decir, una intervención de tipo escalón.

Centrando la atención en la tercera intervención, (c), correspondiente a las variables D8601, D8602 y D8603, que representan la entrada en vigor del IVA, se ve que este impuesto alteró de manera puntual la tasa de variación de estos precios en los tres primeros meses de 1986. Dado que $w_0^c = 0,0195$, $w_1^c = 0,0093$ y $w_2^c = 0,0089$, el impuesto representó un aumento global en la tasa de inflación de los precios de estos productos igual a 3,77. Tal aumento se produjo de forma escalonada, un 1,95 en enero, un 0,93 en febrero y un 0,89 en marzo²⁰. La razón de este escalonamiento podría deberse a que al tratarse de bienes almacenables los vendedores no aplicaron el IVA a las ventas en 1986 de las existencias que se tenían el uno de enero de 1986.

2. IPC de Servicios (IPCSER): el modelo estimado en el mismo trabajo es

$$\Delta \Delta_{12} \ln IPCSER_t = w_0^a \Delta_{12} D8205_t + w_0^b \Delta_{12} D8204_t + w_0^c \Delta_{12} D8404_t + w_0^d \Delta_{12} D8601_t + n_t$$

Atendiendo al efecto del IVA, se observa una intervención de tipo impulso en la tasa de inflación (ya que las diferencias estacionales se anulan), o lo que es lo mismo, un escalón sobre el nivel de precios. Aquí el efecto de la introducción del nuevo impuesto, cuantificado en un incremento de los precios del mes de enero del 1,03%, no se alarga en el tiempo, sino que se absorbe directamente en el mes en que ocurre.

El análisis de intervención supone que el hecho que ha provocado

¹⁹ Algunas veces esta clase de análisis también puede servir para precisar el momento F en que ocurre la anomalía: véase por ejemplo Espasa y Pérez (1979).

²⁰ En el trabajo de Matea que aparece en el capítulo 9 de este libro se desarrolla un análisis detallado del efecto del IVA sobre distintos índices de precios.

el comportamiento denominado anómalo en la serie bajo estudio tiene efectos fijos, deterministas. Sin embargo, existen ciertos hechos, por ejemplo un cambio importante en la política económica instrumentada, una recesión económica de ámbito internacional, etc., que pueden tener efectos estocásticos, con lo que la estructura lineal del modelo ARIMA que se venía utilizando hasta F puede cambiar a partir de esa fecha. En tales casos, la explicación global de una muestra que incluya suficientes observaciones anteriores y posteriores a F puede requerir la utilización de modelos univariantes no lineales. La discusión de este tipo de modelos está fuera de los objetivos de este capítulo, tanto por la complejidad de los mismos como por su todavía escasa aplicación práctica.

Para abordar el problema de que acontecimientos especiales tengan efectos estocásticos en una serie temporal, en Espasa et al. (1991) se propone aproximar la posible estructura univariante de tipo no lineal, mediante estructuras lineales por submuestras.

2.7. Predicción con modelos univariantes

Uno de los principales usos del modelo ARIMA es la predicción; no obstante, con este nombre se suelen denominar dos conceptos que, sin ser radicalmente distintos, sí es conveniente diferenciar.

Se habla de *proyección* cuando se extrapola hacia el futuro una magnitud sobre la que se puede ejercer algún tipo de control. Esto sucede, por ejemplo, si el Banco de España desea extrapolar los activos líquidos en manos del público (ALP). El banco emisor puede realizar tal extrapolación, y si las perspectivas futuras no son satisfactorias puede, al menos teóricamente, tomar medidas para influir en la evolución de ALP, de forma que la extrapolación no se cumpla. En consecuencia el modelo ARIMA cometerá en tal ocasión un importante error al adelantar el futuro, pero habrá resultado de gran ayuda ya que indicó cuál hubiera sido la situación de no haber tomado medidas para evitarla.

En cambio se habla de *predicción* cuando se extrapola una serie sobre la que no se puede influir. En este caso lo que interesa es tener una buena aproximación de su valor futuro y tomar decisiones basándose en esa aproximación.

En la práctica se suelen realizar tanto predicciones como proyecciones; por poner un ejemplo, cuando una empresa intenta extrapolar sus ventas puede estar haciendo una proyección, si lo hace con el fin de evaluar si le conviene lanzar una campaña de publicidad. En cambio si realiza una extrapolación del nivel de precios agregado de

la economía, está haciendo una auténtica predicción, ya que no ejerce ningún tipo de control sobre esa variable.

De todas formas se suele hablar en general de predicción, sin distinguir la predicción en sentido estricto de la proyección, y esto es lo que se hará en este libro.

El problema planteado es el siguiente: estando en t se trata de obtener una predicción para $t+k$, y para ello se dispone de un modelo ARIMA del tipo

$$Y_{t+k} = \phi_1 Y_{t+k-1} + \dots + \phi_{p+d} Y_{t+k-p-d} + a_{t+k} - \theta_1 a_{t+k-1} - \dots - \theta_q a_{t+k-q}. \quad (2.7.1)$$

En lo que sigue se supondrá que el modelo ARIMA disponible es el verdadero modelo generador de los datos, y se ignorará el hecho de que el modelo se ha tenido que estimar a partir de una serie temporal finita.

A la predicción se le denotará poniendo el símbolo \wedge por encima de la variable que se desea predecir, por ejemplo \hat{Y}_{a+b} . El subíndice temporal se expresará como la suma de dos términos: la suma $(a+b)$ indica el momento temporal al que se refiere la variable; el primer término de la suma, a , indica que la predicción se hace con información hasta ese momento, por lo que el segundo, b , indica la antelación con la que se realiza la predicción.

La teoría estadística indica que la predicción óptima, en el sentido de que minimiza la esperanza matemática del error de predicción al cuadrado (error cuadrático medio de predicción), es el valor esperado de Y_{t+k} condicionado a la información disponible hasta t .

En este punto es importante distinguir entre dos tipos de medias o valores esperados para las variables de un proceso. Sea el siguiente modelo estacionario para la variable Y :

$$Y_t = 0,5Y_{t-1} + a_t,$$

que en forma de medias móviles infinitas se puede escribir como

$$Y_t = a_t + 0,5a_{t-1} + 0,5^2 a_{t-2} + 0,5^3 a_{t-3} + \dots$$

y dado que todas las innovaciones tienen media cero, la esperanza matemática de Y_t es cero. De hecho si las innovaciones tienen una distribución normal la variable Y_t sigue una función de densidad marginal normal con media cero y varianza $1/(1-0,5^2)\sigma_a^2$, y esto es válido para cualquier valor de t ya que el proceso es estacionario. En tal situación, si se deseara predecir el valor que tomará Y_{t+1} , y dado

que no se conoce ningún valor previo, la predicción consistiría en igualarlo a su esperanza matemática marginal, es decir a cero.

Sin embargo, una vez que se dispone de una serie temporal y en concreto se sabe, por ejemplo, que $Y_t=10$, se puede mejorar la predicción anterior. En este caso concreto, dados el proceso generador de Y y la información que proporciona la serie temporal, la función de distribución de Y_{t+1} condicional a que Y_t sea igual a diez es normal con media $0,5 \cdot 10=5$ y varianza σ_a^2 . En tal caso la mejor predicción es la esperanza matemática condicional, es decir cinco.

¿Qué sucede si en vez de intentar aproximar el valor en $t+1$ el objetivo es el dato para $t+k$, siendo k un valor finito todo lo grande que se quiera? En este caso, y por sustitución recursiva, se llegaría a que la mejor predicción posible es $0,5^k \cdot 10$, y esto es prácticamente igual a cero, para valores grandes de k .

El ejemplo, aunque sencillo, sirve de prototipo para ilustrar lo que ocurre con procesos estacionarios. En ellos se dice que el valor del fenómeno tiende a anularse, en el siguiente sentido: a corto plazo, la media condicionada puede diferir de la media marginal, pues en aquélla se incorpora la información conocida sobre el pasado reciente. Sin embargo, a medio y largo plazo esa información deja de ser útil, pues un proceso estacionario «olvida» el pasado más lejano, y la mejor aproximación que se puede hacer es la que proporciona la media no condicionada (marginal), que en este caso es cero.

Como se verá más adelante, la situación es radicalmente distinta en los procesos no estacionarios, pero el ejemplo es válido para establecer la diferencia entre la esperanza matemática marginal y la condicionada.

¿Cómo son las esperanzas matemáticas condicionadas de los términos que determinan Y_{t+k} en la fórmula (2.7.1), correspondiente a un modelo ARIMA general?

- La esperanza matemática condicional de lo que ya ha sucedido es precisamente lo que ya ha sucedido. Si se considera la información disponible hasta t , todo lo anterior a t y lo que ocurre en t deja de ser aleatorio para tomar valores concretos, los que se han observado, y las esperanzas de esas constantes son las propias constantes; y por ello las esperanzas condicionadas de $Y_t, Y_{t-1}, \dots, a_t, a_{t-1}, \dots$ son los valores observados de estas variables.
- En cuanto a los valores futuros de las innovaciones, a_{t+1}, \dots, a_{t+k} , la solución es inmediata, una vez que se recuerda que estas variables se caracterizan por ser absolutamente impredecibles a partir de su propio pasado; una innovación sólo se puede

aproximar empleando su esperanza matemática, que por definición resulta ser cero²¹.

- Para los valores de Y entre $t+1$ y $t+k-1$, se tiene que la esperanza condicionada a la información disponible en t será la predicción que para esos valores se puede hacer con dicha información.

Por lo tanto, para poder predecir Y_{t+k} es preciso predecir primero $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+k-1}$. Con este fin se diseña el siguiente procedimiento recursivo:

- En primer lugar se predice Y_{t+1} . De acuerdo con lo estudiado en el primer epígrafe de este capítulo se tiene que

$$Y_{t+1} = PS_{t+1} + a_{t+1}$$

donde PS_{t+1} representa la parte de Y_{t+1} que es perfectamente conocida en t , y resulta que

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1} &= PS_{t+1} = \\ &= \phi_1 Y_t + \dots + \phi_{p+d} Y_{t+1-p-d} - \theta_1 a_t - \dots - \theta_q a_{t+1-q} = \\ &= f_1(Y_t, Y_{t-1}, \dots, a_t, a_{t-1}, \dots). \end{aligned}$$

- A continuación se predice Y_{t+2} , siendo

$$Y_{t+2} = \phi_1 Y_{t+1} + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} + f_2(Y_t, Y_{t-1}, \dots, a_t, a_{t-1}, \dots)$$

donde $f(\cdot)$ es una función lineal dada por el correspondiente modelo ARIMA. En t no se dispone de información que ayude a predecir a_{t+2} o a_{t+1} , por lo que sus valores se sustituyen por cero. Tampoco se conoce Y_{t+1} , pero si una predicción óptima dada por \hat{Y}_{t+1} , valor que se emplea para predecir Y_{t+2} :

$$\hat{Y}_{t+2} = \phi_1 \hat{Y}_{t+1} + f_2(Y_t, Y_{t-1}, \dots, a_t, a_{t-1}, \dots)$$

- Procediendo recursivamente para $Y_{t+3}, Y_{t+4}, \dots, Y_{t+k-1}$, se llegaría a

²¹ Formalmente, si se representa por I_t el conjunto de información disponible hasta t , se tiene que $a_{t+j}, j > 0$, es independiente de I_t , lo que implica que

$$E(a_{t+j}/I_t) = E(a_{t+j}) = 0$$

$$\hat{Y}_{t+k} = \phi_1 \hat{Y}_{t+k-1} + \phi_2 \hat{Y}_{t+k-2} + \dots + \phi_{k-1} \hat{Y}_{t+k} + f_k(Y_t, Y_{t-1}, \dots, a_t, a_{t-1}, \dots), \quad (2.7.2)$$

que es la predicción óptima para Y_{t+k} con la información disponible en t .

Como ejemplos del procedimiento recursivo de predicción con un modelo ARMA/ARIMA véanse los siguientes. Sean tres variables, W , X y Z generadas por los modelos:

$$(1 - 0,5L)W_t = a_t \quad (2.7.3)$$

$$(1 - 0,5L)(1 - L)X_t = a_t^* \quad (2.7.4)$$

$$(1 - 0,5L)(1 - L)(1 - L)Z_t = a_t^+ \quad (2.7.5)$$

Por lo visto en las secciones anteriores W_t es una variable estacionaria, es decir $I(0)$, y X_t y Z_t son variables no estacionarias: X_t es integrada de orden uno, $I(1)$, y Z_t integrada de orden dos, $I(2)$.

Supongamos que los valores anteriores a $t+1$ de estas variables son:

$$W_t = 10; \quad X_t = 10; \quad X_{t-1} = 9; \quad Z_t = 10; \quad Z_{t-1} = 8,5; \quad Z_{t-2} = 7,5.$$

Con todo ello, estando en t se quieren hacer predicciones de todas las variables para el momento $t+3$. Los valores de dichas variables en $t+3$ vendrán dados por

$$W_{t+3} = 0,5W_{t+2} + a_{t+3}$$

$$X_{t+3} = 1,5X_{t+2} - 0,5X_{t+1} + a_{t+3}^*$$

$$Z_{t+3} = 2,5Z_{t+2} - 2Z_{t+1} + 0,5Z_t + a_{t+3}^+$$

y su predicción será

$$\hat{W}_{t+3} = 0,5\hat{W}_{t+2}$$

$$\hat{X}_{t+3} = 1,5\hat{X}_{t+2} - 0,5\hat{X}_{t+1}$$

$$\hat{Z}_{t+3} = 2,5\hat{Z}_{t+2} - 2\hat{Z}_{t+1} + 0,5Z_t$$

que depende de predicciones para momentos intermedios entre t y $t+3$, por lo que hay que emplear el procedimiento recursivo señalado.

Adelantando una unidad el subíndice temporal en las expresiones (2.7.3) a (2.7.5), se tiene que

$$W_{t+1} = 0,5W_t + a_{t+1}$$

$$X_{t+1} = 1,5X_t - 0,5X_{t-1} + a_{t+1}^*$$

$$Z_{t+1} = 2,5Z_t - 2Z_{t-1} + 0,5Z_{t-2} + a_{t+1}^+$$

Sustituyendo aquí los valores anteriores de las variables por sus correspondientes observaciones y las innovaciones en $t+1$ por su esperanza matemática que es cero, se obtienen predicciones para $t+1$:

$$\hat{W}_{t+1} = 0,5 \times 10 = 5 \quad (2.7.6)$$

$$\hat{X}_{t+1} = 1,5 \times 10 - 0,6 \times 9 = 10,5 \quad (2.7.7)$$

$$\hat{Z}_{t+1} = 2,5 \times 10 - 2 \times 8,5 + 0,5 \times 7,5 = 11,75 \quad (2.7.8)$$

Para predecir los valores en $t+2$ se formulan las ecuaciones (2.7.3) a (2.7.5) para $t+2$, sustituyendo además los valores correspondientes a $t+1$ por las predicciones calculadas en (2.7.6) a (2.7.8). Así:

$$\hat{W}_{t+2} = 0,5\hat{W}_{t+1} = 2,5$$

$$\hat{X}_{t+2} = 1,5\hat{X}_{t+1} - 0,5\hat{X}_t = 10,75$$

$$\hat{Z}_{t+2} = 2,5\hat{Z}_{t+1} - 2\hat{Z}_t + 0,5Z_{t-1} = 13,625$$

Con todo ello las predicciones para $t+3$ serán:

$$\hat{W}_{t+3} = 0,5\hat{W}_{t+2} = 1,25$$

$$\hat{X}_{t+3} = 1,5\hat{X}_{t+2} - 0,5\hat{X}_{t+1} = 10,875$$

$$\hat{Z}_{t+3} = 2,5\hat{Z}_{t+2} - 2\hat{Z}_{t+1} + 0,5Z_t = 15,5625$$

La expresión (2.7.2) permite obtener la predicción de Y_{t+k} para diferentes valores de k haciendo uso del modelo univariante: por esa razón a (2.7.2) se le llama *función de predicción univariante*. Un análisis detallado de esta función se realiza, por ejemplo, en Box et al. (1987), Peña (1989) o Espasa y Peña (1991). En el siguiente epígrafe se centrará la atención en uno de los aspectos más importantes de la misma.

2.8. La función de predicción final y su importancia económica

Una vez visto cómo predecir a cualquier horizonte temporal utilizando el modelo ARIMA, cabe preguntar qué tipo de comportamiento de la variable en cuestión está implícito en estas predicciones.

Si estando en el momento t se quiere predecir el valor de Y en $t+k$, siendo la antelación temporal k mayor que el orden q de las medias móviles del correspondiente modelo ARIMA, se puede ver en la ecuación (2.7.1) que todas las innovaciones que entran en la determinación de Y_{t+k} son futuras, es decir, posteriores a t , por lo que en el cálculo de la predicción se sustituyen por cero. En otras palabras, en predicciones a un horizonte superior a q la parte de medias móviles del modelo aparentemente no tiene efecto, y para ese tipo de horizontes las predicciones satisfacen la siguiente relación:

$$\hat{Y}_{t+k} = \phi_1 \hat{Y}_{t+k-1} + \dots + \phi_{p+d} \hat{Y}_{t+k-p-d}, \quad k > q.$$

Esa expresión resulta ser una ecuación en diferencias finitas de orden $p+d$, cuya solución general viene dada por

$$\hat{Y}_{t+k} = b_1^{(0)} g_1(k) + \dots + b_{p+d}^{(0)} g_{p+d}(k), \quad (2.8.1)$$

donde $b_j^{(0)}$ son constantes arbitrarias que cambian con las condiciones iniciales, es decir, con la información que se dispone en el momento de hacer la predicción, y $g_j(k)$ son funciones del horizonte temporal k . La parte de medias móviles del modelo incide directamente en las predicciones de los valores anteriores a $t+q$.

La función (2.8.1) es la llamada *función de predicción final*²². Tal y como indica el superíndice de las constantes arbitrarias, esta función cambia con el origen de la predicción $-t-$, pues con él cambian dichas constantes.

Las expresiones $g_j(k)$ están relacionadas con la parte autorregresiva del modelo ARIMA para Y . En concreto si todas las raíces del polinomio AR son distintas entre sí

$$g_j(k) = g_j^k,$$

donde g_j es la inversa de la raíz μ_j del mencionado polinomio autorregresivo. Si una raíz se repite n veces, entonces habrá n valores iguales $g_j = 1/\mu_j$, y su contribución conjunta será

$$\begin{aligned} b_0^{(0)} g_j^k + b_1^{(0)} g_j^k k + \dots + b_{n-1}^{(0)} g_j^k k^{n-1} = \\ = (b_0^{(0)} + b_1^{(0)} k + \dots + b_{n-1}^{(0)} k^{n-1}) g_j^k \end{aligned}$$

²² Se demuestra que la función de predicción del epígrafe anterior no es más que

$$\hat{Y}_{t+k} = b_1^{(0)} g_1(k) + \dots + b_{p+d}^{(0)} g_{p+d}(k) - \theta_1 a_{t+k-1} - \dots - \theta_q a_{t+k-q}.$$

A esta expresión se le denomina la forma integrada de la función de predicción. Si $k > q$ entonces a efectos de predicción $a_{t+k-1} = \dots = a_{t+k-q}$ se hacen igual a cero, y esta expresión colapsa en la función de predicción final.

¿Qué sucede al predecir con un horizonte temporal suficientemente lejano en el futuro, es decir, si $k \rightarrow \infty$? Se pueden distinguir dos casos.

1. Si el mundo es estacionario todas las inversas de las raíces del polinomio AR —denotadas por g_j — están dentro del círculo unidad, es decir, tienen módulo menor que uno, y se cumplirá que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_{t+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_1^{(0)} g_1^k + \dots + b_p^{(0)} g_p^k) = 0,$$

y a medida que k tiende a infinito \hat{Y}_{t+k} tiende a cero: en el mundo estacionario la predicción colapsa en el valor medio de la variable, que se está suponiendo que es cero. Más adelante se comentará el modelo estacionario con media distinta de cero.

2. Si el mundo presenta una no estacionariedad homogénea, existe al menos una raíz igual a uno; si denotamos a la constante asociada a esa raíz por $b_0^{(0)}$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_0^{(0)} \cdot 1^k = b_0^{(0)} \neq 0$$

y el resultado anterior ya no es válido.

En los ejemplos (2.7.3) a (2.7.5) de la sección anterior la función de predicción final se da desde $k=1$, ya que en todos ellos el orden de las correspondientes medias móviles es cero. Dado que las inversas de las raíces de los polinomios autorregresivos son:

- proceso de la variable W : 0,5,
- proceso de la variable X : 1 y 0,5,
- proceso de la variable Y : 1, 1 y 0,5,

se tienen que las correspondientes funciones de predicción final son:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{t+k} &= b_{W1}^{(0)} \cdot 0,5^k \\ \hat{X}_{t+k} &= b_{X0}^{(0)} \cdot 1^k + b_{X1}^{(0)} \cdot 0,5^k \\ \hat{Z}_{t+k} &= (b_{Z0}^{(0)} + b_{Z1}^{(0)} k) 1^k + b_{Z2}^{(0)} \cdot 0,5^k. \end{aligned}$$

La determinación de las constantes $b_j^{(0)}$ se hace a partir de las condiciones iniciales. En estos ejemplos las funciones de predicción finales son válidas desde k igual a uno, por lo que utilizaremos como condiciones iniciales W_t para W , X_t y \hat{X}_{t+1} para X y Z_t , \hat{Z}_{t+1} y \hat{Z}_{t+2} para Z . Con ello, para W :

$$b_{W1}^{(0)} = W_t / 0,5^0 = 10.$$

Para X:

$$\begin{aligned} X_t &= 10 = b_{X0}^{(t)} + b_{X1}^{(t)} \cdot 0,5^0 \\ \hat{X}_{t+1} &= 10,5 = b_{X0}^{(t)} + b_{X1}^{(t)} \cdot 0,5^1, \end{aligned}$$

y resolviendo dicho sistema se tiene que

$$b_{X0}^{(t)} = 11 \quad \text{y} \quad b_{X1}^{(t)} = -1.$$

Para Z:

$$\begin{aligned} Z_t &= 10 = b_{Z0}^{(t)} + b_{Z1}^{(t)} \cdot 0 + b_{Z2}^{(t)} \cdot 0,5^0 \\ \hat{Z}_{t+1} &= 11,75 = b_{Z0}^{(t)} + b_{Z1}^{(t)} + b_{Z2}^{(t)} \cdot 0,5 \\ \hat{Z}_{t+2} &= 13,625 = b_{Z0}^{(t)} + b_{Z1}^{(t)} \cdot 2 + b_{Z2}^{(t)} \cdot 0,5^2 \end{aligned}$$

con lo que resolviendo el sistema se tiene que:

$$b_{Z0}^{(t)} = 9,5, \quad b_{Z1}^{(t)} = 2 \quad \text{y} \quad b_{Z2}^{(t)} = 0,5.$$

Recapitulando, las tres funciones de predicción final son:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{t+k} &= 10 \cdot 0,5^k \\ \hat{X}_{t+k} &= 11 - 0,5^k \\ \hat{Z}_{t+k} &= 9,5 + 2k + 0,5 \cdot 0,5^k. \end{aligned}$$

Se comprueba que cuando k tiende a infinito la predicción de W colapsa a su media, que es cero, pero eso no ocurre con X y Z que son variables no estacionarias. Además el comportamiento de las predicciones a largo plazo es distinto para X , variable integrada de primer orden, que para Z , que es $I(2)$: con el origen de predicción que hemos tomado, a largo plazo la predicción de X tiende a once, mientras la de Z tiende a situarse sobre la línea recta $9,5 + 2k$.

Este ejemplo sirve también para ilustrar que el comportamiento de las funciones de predicción a largo plazo es distinto en función del tipo de no estacionariedad que presente la serie concreta que se analiza, y éste es un resultado muy importante en esta clase de modelos. A continuación se revisarán los principales resultados desde la perspectiva estrictamente matemática, y más adelante se procederá a su interpretación económica.

Supóngase que el modelo ARIMA incluye una y sólo una raíz unitaria, es decir, que $\Delta Y_t = W_t$ es un proceso estacionario. A largo plazo las demás raíces de $\phi_{p+d}(L)$ tienen una contribución cero, y queda que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_{t+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_0^{(t)} \cdot 1^k = b_0^{(t)}.$$

En este caso la predicción a largo plazo para la variable Y es una constante, $b_0^{(t)}$, que depende del momento t en que se realiza la predicción y, por lo tanto, cambia al cambiar dicho origen. Eso significa que a largo plazo la variable tiende a estabilizarse en un determinado valor, aunque ese valor varía a medida que entran nuevas observaciones en el sistema.

En el ejemplo anterior en el que la variable X viene generada por el modelo ARIMA (2.7.4), se ha visto que la función de predicción final que se obtiene prediciendo desde t es tal que la predicción a largo plazo tiende a once. Sin embargo, supóngase que en $t+1$ se observa el valor 10,2, que difiere de la predicción que para ese momento se hacía desde t , igual a 10,5. Repitiendo el ejercicio anterior teniendo en cuenta la nueva observación, se llega a $b_{X1}^{(t+1)} = 10,4$ y $b_{X2}^{(t+1)} = -0,2$, y la nueva función es

$$\hat{X}_{(t+1)+k} = 10,4 - 0,2 \cdot 0,5^k,$$

A largo plazo esta función tiende a 10,4, que es distinto del valor (11) al que tendía la función de predicción final que calculábamos con información hasta t .

Volviendo brevemente al caso de procesos estacionarios, sea el modelo

$$\phi_p(L)(Y_t - \mu) = \theta_q(L)a_t,$$

que por hipótesis es estacionario e invertible, y la única diferencia con respecto a los modelos estacionarios que se han considerado previamente es que ahora la media de Y_t es μ , distinta de cero. En este caso para $k > q$ se tiene que

$$(\hat{Y}_{t+k} - \mu) = \phi_1(\hat{Y}_{t+k-1} - \mu) + \dots + \phi_p(\hat{Y}_{t+k-p} - \mu)$$

y la solución de esa ecuación en diferencias finitas es, suponiendo que todas las raíces son distintas²³,

$$\hat{Y}_{t+k} = \mu + b_1^{(t)} g_1^k + \dots + b_p^{(t)} g_p^k,$$

con lo que cuando k tiende a infinito se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_{t+k} = \mu$$

²³ El que alguna raíz estacionaria se repita no altera la convergencia a largo plazo, como se desprende de la ecuación expuesta anteriormente para el caso de raíces repetidas.

Lo anterior se puede ilustrar para el caso del proceso autorregresivo de primer orden:

$$(Y_{t+k} - \mu) = \phi_1(Y_{t+k-1} - \mu) + a_{t+k}.$$

Las predicciones para distintos valores de k serán:

$$\begin{aligned} \text{— para } k=1: & \hat{Y}_{t+1} = \mu + \phi_1(Y_t - \mu) \\ \text{— para } k=2: & \hat{Y}_{t+2} = \mu + \phi_1(\hat{Y}_{t+1} - \mu) = \mu + \phi_1^2(Y_t - \mu) \\ \text{— en general:} & \hat{Y}_{t+k} = \mu + \phi_1^k(Y_t - \mu), \end{aligned}$$

con lo que el límite cuando k tiende a infinito es la media del proceso μ .

Una variable generada por un proceso estacionario con media μ se caracteriza por tender a largo plazo a esa constante μ , pero, a diferencia del caso en que Y_t tenía una raíz unitaria, esa constante es la misma cualquiera que sea el origen de predicción. Este es otro aspecto que distingue a los procesos estacionarios de los integrados de orden uno. En estos últimos el valor de equilibrio a largo plazo es estocástico y dependiente de la historia de la variable, mientras en los procesos estacionarios es determinista (igual o distinto de cero según sea el caso) e independiente del presente y pasado de la variable.

Si el modelo ARIMA incluye un término de la forma Δ^2 , entonces el polinomio AR extendido tiene dos raíces unitarias, y la contribución de esa doble raíz unitaria será

$$[b_0^{(j)} + b_1^{(j)}k] 1^k$$

y como a largo plazo sólo importan las raíces unitarias

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{Y}_{t+k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_0^{(j)} + b_1^{(j)}k) 1^k = \pm \infty$$

yendo a $+\infty$ o a $-\infty$ dependiendo del valor de $b_1^{(j)}$.

En este caso si se hace la predicción desde t , hay un intervalo de tiempo en que las predicciones muestran una oscilación, mayor o menor en función de la dependencia dinámica de carácter estacionario; pero a partir de un $t^* = t+k$, con k suficientemente grande, la contribución de la parte estacionaria del modelo es nula o prácticamente nula y todas las predicciones se sitúan sobre una recta, como se vio en el ejemplo de la variable generada por el modelo (2.7.5).

Cuando $\Delta\Delta_{12}Y_t = \Delta^2 U_{11}(L)Y_t$ es la transformación estacionaria, la presencia de Δ^2 provoca la repetición del resultado anterior, mientras $U_{11}(L)$ aporta once raíces de módulo unidad que implican

oscilaciones de carácter estacional que también se mantienen a largo plazo²⁴. Esto va a suponer, sobre la recta que se deriva de la presencia del factor Δ^2 , la inclusión de unos factores aditivos constantes de carácter estacional, que dependen del momento t , en la función de predicción a largo plazo. Si denominamos $S_j^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, 12$, a tales factores estacionales para los que se demuestra que cumplen la propiedad de sumar cero a lo largo de un ciclo, es decir,

$$\sum_{j=1}^{12} S_j^{(j)} = 0,$$

se tiene que para k suficientemente grande

$$\hat{Y}_{t+k} \approx b_0^{(j)} + b_1^{(j)}k + S_j^{(j)},$$

donde el factor estacional ($j=1, 2, \dots, 12$) asignado será el que corresponda al mes del año en que cae la observación $t+k$.

Considérese ahora un modelo del tipo

$$\phi_p(L)(\Delta Y_t - \mu) = \theta_q(L)a_t,$$

donde, para simplificar, se supone $\phi_p(L) = \theta_q(L) = 1$. En este caso ΔY_t es un proceso estacionario, pero su media es distinta de cero. Operando

$$\Delta Y_t = \mu + a_t \Rightarrow Y_t = \frac{\mu}{\Delta} + \frac{a_t}{\Delta} = Y_{1t} + Y_{2t}$$

y se puede replantear el problema de predecir Y_t como un problema de predecir por separado Y_{1t} y Y_{2t} ; como

$$Y_{2t} = \frac{a_t}{\Delta} \Rightarrow \Delta Y_{2t} = a_t,$$

la predicción de Y_{2t} a largo plazo es, por lo visto anteriormente, una constante que cambia con las condiciones iniciales, es decir,

$$\hat{Y}_{2,t+k} \approx b_0^{(j)}.$$

Por su parte Y_{1t} es puramente determinista, ya que

$$Y_{1t} = \mu/\Delta = \mu/(1-L) = \mu(1+L+L^2+\dots);$$

²⁴ Véase el apéndice a este capítulo.

entonces es fácil comprobar que dada la condición inicial, Y_{1t} , resulta que

$$\begin{aligned} Y_{1,t+1} &= Y_{1t} + \mu \\ Y_{1,t+2} &= Y_{1,t+1} + \mu = Y_{1t} + 2\mu \\ \dots\dots\dots \\ Y_{1,t+k} &= Y_{1,t+k-1} + \mu = Y_{1t} + k\mu \end{aligned}$$

y la contribución de Y_{1t} a la predicción de Y_t es una recta de pendiente μ . Combinando ambos resultados,

$$\hat{Y}_{t+k} = Y_{1,t+k} + \hat{Y}_{2,t+k} = b_0^{(0)} + Y_{1t} + k\mu = b_0^{(0)} + k\mu.$$

De ahí que si ΔY_t tiene media distinta de cero, a largo plazo las predicciones para Y_t se sitúan sobre una recta; como se verá más adelante en este mismo epígrafe, esta recta se puede interpretar como una trayectoria de equilibrio a largo plazo, caracterizada por una tasa de crecimiento determinista e independiente de las condiciones del sistema.

Para cerrar el estudio de los modelos más usuales en la literatura, sea el caso en que

$$Y_t = a + bt + n_t,$$

donde Y_t está definida como la suma de un polinomio lineal en el tiempo y un residuo estacionario (n_t) con media cero. Dado que a largo plazo la predicción del componente estacionario se anula, es obvio que la predicción a largo plazo para la variable Y viene dada por

$$\hat{Y}_{t+k} = a + b(t+k),$$

expresión en la que todo es determinista e independiente de la situación presente y pasada del fenómeno.

En las últimas columnas del cuadro 2.1 se resumen los resultados que se obtienen para los distintos casos considerados.

¿Cuál es la importancia económica de estos resultados, o lo que es lo mismo, qué tipo de información proporcionan al economista? Antes de nada, se ha de señalar que la predicción se puede interpretar como el valor que tomará la variable en el futuro si el sistema no sufre ninguna innovación, o sorpresa, con posterioridad a t . En efecto, tal y como se ha definido la predicción óptima, lo único que se hace para calcularla es sustituir las innovaciones futuras desconocidas por cero, es decir, suponer que no habrá ningún tipo de innovación a partir del momento en que se realiza la predicción.

CUADRO 2.1. Función de predicción a largo plazo para distintos modelos

Caso	Orden de integración (*)	Función de predicción a largo plazo	Parámetros estocásticos de la función de predicción	Interpretación económica. A largo plazo la variable tiende a
1. Y_t estacionaria con media cero	(0, 0)	$\hat{Y}_{t+k} = 0$	—	Anularse.
2. Y_t estacionaria con media $\mu \neq 0$	(0, 1)	$\hat{Y}_{t+k} = \mu$	—	Un equilibrio estable en el valor μ , inmutable.
3. ΔY_t estacionaria con media cero	(1, 0)	$\hat{Y}_{t+k} = b_0^{(0)}$	$b_0^{(0)}$	Un equilibrio estable, $b_0^{(0)}$, cuyo valor concreto depende del momento puntual en que se encuentre el sistema.
4. ΔY_t estacionaria con media $\mu \neq 0$	(1, 1)	$\hat{Y}_{t+k} = b_0^{(0)} + \mu k$	$b_0^{(0)}$	Una situación de crecimiento equilibrado lineal, en el que la tasa de crecimiento es inmutable.
5. $\Delta^2 Y_t$ estacionaria con media cero	(2, 0)	$\hat{Y}_{t+k} = b_0^{(0)} + b_1^{(0)} \cdot k$	$b_0^{(0)}, b_1^{(0)}$	Una situación de crecimiento equilibrado lineal, en el que la tasa de crecimiento y la ordenada en el origen dependen del momento puntual en que se encuentre el sistema
6. $Y_t = a + bt + n_t$, n_t estacionaria con media cero	—	$\hat{Y}_{t+k} = a + b(t+k)$	—	Una situación de crecimiento equilibrado lineal en la que ambos parámetros son inmutables.
7. $\Delta \Delta_{12} Y_t$ estacionaria con media cero	(2, 0)	$\hat{Y}_{t+k} = b_0^{(0)} + b_1^{(0)} \cdot k + S_j^{(0)}$	$b_0^{(0)}, b_1^{(0)}, S_j^{(0)}$ $j = 1, 2, \dots, 12$	Una situación de crecimiento equilibrado lineal con ordenada en el origen estacional. Todos los parámetros dependen del momento puntual en el que se encuentre el sistema.

(*) El orden de integración no se define como $I(d)$ tal y como se hizo en la sección 2.3, sino como $I(d, m)$, donde m es cero o uno, según sea nula o no la media de la transformación estacionaria. La razón de esta terminología se explica al final de esta sección.

Desde ese punto de vista las predicciones para distintos valores de k no son más que las expectativas que se tienen en t para la variable en $t+1, t+2, \dots$. Nótese que se trata de unas expectativas que se deben calificar como expectativas univariantes, en el sentido de que se construyen teniendo en cuenta únicamente la información que aporta la serie temporal del fenómeno que se estudia.

En ese caso la función de predicción se puede interpretar como la *función generadora de expectativas univariantes*, y esa función, y más concretamente sus parámetros, caracteriza el mecanismo de generación de expectativas univariantes de los agentes económicos. Es de destacar que este mecanismo produce expectativas óptimas dado el conjunto de información que se está empleando.

Si se deja que k tienda a infinito, la función de predicción va a proporcionar la situación de equilibrio a la que tiende la variable, situación que puede caracterizarse por un valor constante en el tiempo, equilibrio estable, o por una función del tiempo, situación de crecimiento equilibrado. Si a partir del momento en que se hacen las predicciones el sistema ya no experimentase ninguna innovación, la variable terminaría por alcanzar una trayectoria de equilibrio dada precisamente por la función de predicción a largo plazo.

En conclusión, la importancia de la función de predicción obedece a dos causas: por un lado permite cuantificar las expectativas a distintos plazos sobre un determinado fenómeno; por otro, aproxima la situación de equilibrio a largo plazo hacia la que se mueve la variable.

De la predicción se desprende que

$$Y_{t+k} = \hat{Y}_{t+k} + e_{t+k}, \quad (2.8.2)$$

donde por e_{t+k} se denota el error de predicción que se comete en t al predecir Y_{t+k} , y que se puede demostrar que es igual a

$$e_{t+k} = a_{t+k} + \psi_1 a_{t+k-1} + \dots + \psi_{k-1} a_{t+1}.$$

Obsérvese que con la expresión (2.8.2), se está descomponiendo el valor real Y_{t+k} en dos partes que son independientes entre sí:

1. \hat{Y}_{t+k} : expectativa que, usando de forma eficiente la información disponible, se tiene en el momento t sobre Y_{t+k} , o equivalentemente, valor que tomará Y_{t+k} suponiendo que entre $t+1$ y $t+k$ el sistema no experimente ningún tipo de innovación.
2. e_{t+k} : efecto de las sorpresas ocurridas entre $t+1$ y $t+k$, que se obtiene como una suma ponderada de las correspondientes innovaciones. Si $k=1$ ese error de predicción es la innovación del momento $t+1$.

¿Cuáles son las implicaciones de los resultados del cuadro 2.1 desde esta nueva perspectiva? Compárese en primer lugar el caso en que ΔY_t es un proceso estacionario con media cero con el caso en que Y_t es un proceso estacionario con media μ distinta de cero.

Con ambos modelos la predicción a largo plazo, o la situación de equilibrio a largo plazo latente en el momento de hacer la predicción, es una constante: la variable es tal que tiende a un equilibrio estable²⁵. Ahora bien, si la modelización correcta incluye el operador Δ , esa constante lo es referida a un determinado conjunto de información: si con la información disponible en t esa constante está evaluada en $b_0^{(t)}$, cuando se disponga del dato de Y_{t+1} y en consecuencia el nuevo conjunto de información abarque hasta $t+1$, en general sucederá que el nuevo equilibrio a largo plazo será $b_0^{(t+1)}$, con $b_0^{(t+1)} \neq b_0^{(t)}$. Con este modelo ARIMA la situación de largo plazo es siempre de equilibrio estable, pero su valor cambia con las innovaciones que sufre el sistema.

Por el contrario, en el supuesto de que Y_t sea un proceso estacionario de media μ , el equilibrio a largo plazo será siempre igual a μ , con independencia de la información que se tenga sobre las innovaciones que está experimentando la variable de interés. Es decir, al sistema no pueden llegar perturbaciones capaces de alterar su valor de equilibrio.

Pasando a los cuatro casos en los que la función de predicción a largo plazo es una recta, y comenzando con el que incluye el término Δ^2 , es evidente que, en este caso, la velocidad de avance del fenómeno, ΔY_t , será no estacionaria, ya que la transformación estacionaria es, por hipótesis, $\Delta^2 Y_t$. Por lo tanto la velocidad de avance ΔY_t tendrá un equilibrio a largo plazo caracterizado por ser una constante que se modifica con las condiciones iniciales.

Se está diciendo con ello que a largo plazo Y_t presenta un crecimiento constante (situación de crecimiento equilibrado), aunque esa constante cambia con el origen de la predicción al incorporar nueva información sobre los factores que afectan a Y .

A ese crecimiento a largo plazo del fenómeno que se estudia se le denominará en lo sucesivo *inercia*, y matemáticamente es la pendiente de la función de predicción a largo plazo. Esta es otra forma de ver por qué se dice que los fenómenos con dos raíces unitarias siguen una evolución cuasi lineal: la situación de equilibrio viene dada por una función lineal del tiempo, con coeficientes que se modifican con el origen de la predicción.

²⁵ Recuérdese que cuando $\phi_{p+1}(L)$ se factoriza como $\phi_p(L) \cdot \Delta$, los coeficientes del correspondiente polinomio $\psi_\infty(L)$ tienden a una constante cuando la potencia de L tiende a infinito.

Nótese también que esta situación de equilibrio a largo plazo reproduce el esquema de los coeficientes del polinomio $\psi_\infty(L)$; se ha visto que en el caso en que $\phi_{p+d}(L) = \phi_p(L)\Delta^2$ los coeficientes de $\psi_\infty(L)$ tienden a más/menos infinito de forma lineal, resultado que se vuelve a obtener aquí para las expectativas a largo plazo de la serie.

Una situación similar se presenta en los modelos basados en $\Delta\Delta_{12}Y_t$, que, salvo por el factor estacional aditivo, reproducen fielmente los resultados anteriores, ya que $\Delta\Delta_{12}$ no es más que $\Delta^2U_{11}(L)$.

Supongamos ahora que ΔY_t sigue un proceso estacionario con media μ . Tal y como se ha comentado anteriormente, en este caso la pendiente de la recta de predicción a largo plazo —lo que antes se denominó inercia—, siempre toma el mismo valor: eso significa que cualesquiera que sean los factores que afecten al fenómeno su tasa de crecimiento de equilibrio se mantiene inalterada. Es decir, una variable económica que venga generada por este proceso tiende a una situación de crecimiento equilibrado, concretamente crecimiento lineal, en la que la tasa de crecimiento a largo plazo no puede verse alterada por las innovaciones que llegan al sistema.

Obsérvese que si ese modelo univariante es correcto, entonces el crecimiento (determinista) a largo plazo de esa variable no puede venir explicado en función de una variable económica cuyo crecimiento a largo plazo sea estocástico, es decir, cambie con las perturbaciones que sufre el sistema económico.

De aquí se puede extraer una importante conclusión: la inclusión de constantes en el modelo ARIMA supone fuertes restricciones sobre la caracterización del largo plazo de la variable, y hay que ser muy conscientes de este hecho a la hora de la modelización.

El caso extremo de la imposición de restricciones sobre el largo plazo son los modelos del tipo $Y_t = a + bt + n_t$, donde n_t es un proceso estacionario; con estos modelos se obliga a que el largo plazo de Y_t venga determinado por una recta que jamás cambia en el tiempo, presentando así una evolución a largo plazo puramente determinista.

Una de las principales causas del auge de los modelos ARIMA es la forma en que caracterizan el largo plazo. Hasta su aparición el tipo de modelización empleado suponía esquemas esencialmente deterministas, con sus consiguientes limitaciones. Por el contrario los modelos ARIMA presentan una gran flexibilidad ya que, aunque impliquen una evolución a largo plazo del fenómeno que se puede expresar como una función del tiempo, los parámetros de esa función se adaptan continuamente a las condiciones del sistema. Si éstas cambian, también cambian los parámetros en los que se basa la generación de expectativas.

Es inmediato generalizar los resultados anteriores; por ejemplo, una variable cuya transformación estacionaria sea $\Delta^3 Y_t$ tendrá una

raíz unitaria triple con una contribución en la función de predicción igual a

$$(b_0^{(t)} + b_1^{(t)}k + b_2^{(t)}k^2) 1^k$$

y su función de predicción a largo plazo es una función cuadrática del horizonte temporal de predicción, donde los tres coeficientes son estocásticos.

La definición del orden de integración de una variable temporal que habitualmente se emplea —y que se expuso al principio de la sección 2.3—, puede resultar algo confusa cuando se aplica al análisis del comportamiento de las predicciones a largo plazo.

Así, si se sigue la antedicha definición, dos variables pueden tener el mismo orden de integración (como por ejemplo en los casos tres y cuatro del cuadro 2.1²⁶), y presentar una trayectoria de largo plazo radicalmente diferente (de equilibrio estable en el caso tres y de crecimiento lineal en el caso cuatro). Además, dos variables pueden tener órdenes de integración diferentes, casos cuatro y cinco de dicho cuadro²⁷ y sin embargo sus trayectorias de largo plazo pueden compartir la característica de crecimiento lineal.

Por esa razón en Espasa y Peña (1991) se generaliza la terminología de variables integradas. Ciñéndose a los casos en los que la no estacionariedad se elimina exclusivamente mediante diferenciaciones, proponen definir una variable integrada de orden $I(h, m)$ como una variable a la que se debe aplicar h veces el operador de diferencias para que se convierta en estacionaria, y m toma el valor cero o uno según que la media de la transformación estacionaria sea o no nula. Con ello, siempre que no se cumpla que $h=m=0$, en cuyo caso la serie tiende a anularse, la trayectoria de largo plazo viene dada por un polinomio temporal cuyo orden es $(h-1)+m$.

Además, esa trayectoria es determinista o predominantemente determinista si m no es cero. En efecto, si m es uno y h es cero la trayectoria es plenamente determinista. Pero si siendo m la unidad h es distinto de cero, la trayectoria de largo plazo es un polinomio temporal de orden $(h+m-1)$ en el que el coeficiente de la mayor potencia es inmutable, no cambia con las condiciones del sistema; y como tal potencia domina la evolución a largo plazo que genera el polinomio, se puede decir que dicha trayectoria es predominantemente determinista.

La segunda columna del cuadro 2.1 recoge el orden de integración de cada caso estudiado en este capítulo siguiendo esta definición.

²⁶ De acuerdo con la definición del epígrafe 2.3, ambas series son integradas de orden uno, ya que en su modelo ARIMA hay una diferencia regular.

²⁷ Orden uno en el caso cuatro y orden dos en el cinco.

2.9. La incertidumbre en la predicción

Recordando la formulación del modelo ARIMA como un proceso $MA(\infty)$

$$Y_t = \psi_\infty(L) a_t$$

donde $\psi_\infty(L) = (\phi_p(L) \Delta^d)^{-1} \cdot \Theta_q(L)$, se tiene que el valor de la variable Y en $t+k$ vendrá dado por

$$Y_{t+k} = a_{t+k} + \psi_1 a_{t+k-1} + \dots + \psi_k a_t + \psi_{k+1} a_{t-1} + \dots$$

Dado que la predicción óptima de Y_{t+k} es la esperanza de ese valor condicionada a la información disponible en t , y que la esperanza condicionada de las innovaciones futuras es cero, se tiene que

$$\hat{Y}_{t+k} = \psi_k a_t + \psi_{k+1} a_{t-1} + \dots$$

De ahí que en la descomposición

$$Y_{t+k} = \hat{Y}_{t+k} + e_{t+k}$$

resulte, como ya se ha adelantado en el epígrafe anterior,

$$e_{t+k} = a_{t+k} + \psi_1 a_{t+k-1} + \dots + \psi_{k-1} a_{t+1},$$

y el error de predicción es una media móvil de las innovaciones comprendidas entre $t+1$ y $t+k$.

En cuanto a las propiedades estocásticas de ese error de predicción, su valor esperado es la suma ponderada de los valores esperados de las innovaciones que lo componen; ahora bien, como todas las innovaciones por definición tienen esperanza igual a cero, la esperanza de e_{t+k} también será cero:

$$E(e_{t+k}) = 0.$$

De aquí se deduce que en media los errores que se cometen prediciendo k periodos por delante son iguales a cero, y esto es lo que en la literatura estadística recibe el nombre de *predicción consistente*: algunas veces se tienen errores de predicción positivos y otras negativos, pero en conjunto tienden a anularse y su media es cero.

Esta es una propiedad imprescindible para una buena predicción, y es lógico que sea así: si los errores de predicción tuviesen una media distinta de cero, habría un componente sistemático en dichos errores,

y se podrían mejorar las predicciones sin más que incorporar a las mismas dicha media no nula.

En cuanto a la varianza del error de predicción, se tiene que como las innovaciones que entran en la definición del error son independientes, tal varianza viene dada por

$$\text{var}(e_{t+k}) = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{k-1}^2) \sigma_a^2$$

y depende, por tanto, de dos factores:

1. de la varianza de las innovaciones (σ_a^2): cuanto mayor sea la volatilidad intrínseca de la serie (σ_a), mayor será la dificultad de predecir su futuro;

2. de los coeficientes ψ_j , que representan el tipo de dependencia dinámica de la variable: cuanto mayores sean en valor absoluto, mayor es la varianza de e_{t+k} . A este factor se le conoce como el *factor estructural del error de predicción*.

¿A qué es igual la varianza del error de predicción con k periodos de antelación cuando k es suficientemente grande, o lo que es lo mismo, en cuánto se evalúa la dificultad de predecir correctamente un futuro lejano? Se pueden distinguir principalmente dos tipos de situaciones.

A) Si el fenómeno es estacionario, los coeficientes ψ_j tienden a cero cuando j tiende a infinito; la condición de estacionariedad (2.2.5) implica que la expresión

$$1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots$$

converge a una constante, y el factor estructural de $\text{var}(e_{t+k})$ está acotado: no importa lo alejado en el futuro que se prediga, llega un momento en que las sucesivas ψ_j^2 que se añaden son aproximadamente iguales a cero.

Como la otra componente de la varianza de e_{t+k} , σ_a^2 , también es finita por definición, la varianza del error de predicción con k periodos de antelación es siempre finita en procesos estacionarios:

$$\text{var}(e_{t+k}) < \infty.$$

En consecuencia, en un mundo estacionario la incertidumbre con respecto al futuro está siempre acotada: éste es una propiedad importante de los procesos estacionarios.

B) Por el contrario, si el fenómeno es no estacionario, los coeficientes ψ_j no tienden a cero.

B.1) Si la no estacionariedad está provocada por la presencia de una única raíz unitaria (Δ), la sucesión ψ_j tiende a una constante a medida que j tiende a infinito; por tanto, a medida que k aumenta la parte de $\text{var}(e_{t+k})$ que se debe a la dependencia dinámica incluye cada vez más términos, y aunque los términos adicionales sean finitos, al no ser cero su suma tiende a infinito.

B.2) Si hay dos raíces unitarias positivas (Δ^2 o $\Delta\Delta_{1,2}$) los coeficientes ψ_j tienden a $\pm\infty$ de forma lineal, y con más razón el factor estructural provoca que la varianza de e_{t+k} tienda a infinito a medida que se predice para un horizonte más lejano.

En conclusión, si el mundo es no estacionario la incertidumbre sobre el futuro nunca está acotada: cuanto más lejano en el tiempo se predice, mayor será la incertidumbre asociada a esa predicción. Es importante recalcar que esa conclusión es válida para cualquier tipo de no estacionariedad, incluso para la más sencilla, la correspondiente a variables integradas de primer orden, en las que el crecimiento es estacionario.

Esta característica teórica de los modelos ARIMA parece coherente con lo que se observa al estudiar fenómenos económicos reales, ya que no se puede pretender tener la misma incertidumbre si se hace una predicción para el año 1993, para el 2000 o para el 2100: en este último caso la incertidumbre es tan grande que la predicción deja de ser útil. Por lo tanto este resultado para la varianza del error de predicción no es caprichoso ni un mero formulismo matemático, sino que es una propiedad deseable para un modelo que intente captar este aspecto esencial del mundo económico.

Con frecuencia se afirma que los modelos ARIMA predicen mal a largo plazo. Del desarrollo anterior se deduce que no es que la predicción sea mala en sí, sino que la varianza del error de predicción es muy grande; ello se debe a las propias características del fenómeno que se estudia, y los modelos ARIMA no hacen más que reflejarla.

Si el fenómeno se intenta modelizar con una expresión de la forma $Y_t = a + bt + n_t$, donde n_t es una perturbación estacionaria, la predicción de 1993 vendrá dada por

$$\hat{Y}_{1993} = a + b \cdot 1993 + \hat{n}_{1993}$$

y el error que comete está asociado a la varianza del error de predicción de un proceso estacionario, n_t . Para simplificar, sea $n_t = a_t$, con lo que la varianza del error de predicción para 1993 será σ_a^2 ; si ahora se predice para el año 2000, la predicción es

$$\hat{Y}_{2000} = a + b \cdot 2000,$$

con una varianza del error de predicción que vuelve a ser σ_a^2 ; para el año 2100 la predicción puntual es

$$\hat{Y}_{2100} = a + b \cdot 2100,$$

con la misma varianza del error de predicción. La incertidumbre asociada a la predicción es independiente del horizonte considerado²⁸, situación desde todo punto de vista inaceptable para fenómenos económicos.

Si se está estudiando un fenómeno en que la incertidumbre aumenta a medida que se pretende predecir un futuro cada vez más lejano, es importante que el modelo utilizado no prediga con una varianza acotada: se deben utilizar modelos en los que la incertidumbre respecto al futuro sea explosiva, pues así es la realidad y todo modelo debe pretender ser un reflejo de ésta.

Esto ocurre también si se utiliza un modelo econométrico, es decir, un modelo con variables explicativas: la explosión puede ser más lenta pero también existe, pues si la variable endógena es no estacionaria lo tendrán que ser algunas o todas las variables explicativas y/o el término residual; la varianza del error de predicción de ese o esos componentes no estacionarios tenderá a infinito y, por tanto, también la varianza del error de predicción de la variable endógena.

La relevancia de este tipo de resultados para el analista económico es clara: el proceso de modelización ha de basarse en instrumentos que sean flexibles para adaptarse a condiciones cambiantes, y los modelos ARIMA lo son. Cuando se predice a medio y largo plazo se debe analizar la varianza del error de predicción, sabiendo que —dadas las características de los fenómenos económicos— no se debe esperar que sea estable ante aumentos del horizonte de predicción. Si un modelo impone de antemano que la incertidumbre esté acotada, la medición que realiza de la misma puede considerarse errónea. Se puede pretender desarrollar modelos en los que la explosión de la incertidumbre hacia el futuro sea más moderada que la de otros modelos alternativos, pero pretender que no se dé tal explosión en la incertidumbre no parece realista.

Muy relacionado con la utilización del modelo ARIMA con fines predictivos está la evaluación de una nueva observación. Por todos los supuestos que se han realizado, la distribución de Y_{t+k} condicionada a la información disponible hasta t será $N(\hat{Y}_{t+k}, \text{var}(e_{t+k}))$, es decir, una distribución normal cuya media es la predicción óptima y varian-

²⁸ Si n_t sigue un proceso ARMA general este resultado es aplicable a partir de un valor suficientemente grande de k , que depende de los coeficientes ψ_j ; pero este cambio no altera la esencia del resultado que se está comentando.

za la del error de predicción correspondiente. Por lo tanto, para $k=1$ la distribución de Y_{t+1} condicionada a la información disponible en t es $N(\hat{Y}_{t+1}, \sigma_a^2)$, ya que la varianza del error de predicción a un período es igual a la varianza de la correspondiente innovación.

Con esa distribución condicionada se puede construir un intervalo de confianza para Y_{t+1} ; si el nivel de confianza es por ejemplo del 95%, ese intervalo será

$$(\hat{Y}_{t+1} - 1,96\sigma_a, \hat{Y}_{t+1} + 1,96\sigma_a).$$

Este intervalo puede ser muy útil para evaluar el dato que llegue en $t+1$. Sin un criterio a priori, cuando llegue el dato correspondiente a $t+1$ puede ser difícil concluir si dicho dato tiene o no un componente novedoso importante, que deba dar lugar a la consideración de medidas en función de la novedad aparecida. Sin embargo, si se dispone del correspondiente intervalo de confianza, que no es más que una cuantificación de las expectativas sobre la realización en $t+1$, se concluye rápidamente si el dato incorpora un componente novedoso importante o no.

Si Y_{t+1} cae dentro de ese intervalo, el efecto de a_{t+1} ha sido pequeño, y la evolución del fenómeno ha sido la esperada; si Y_{t+1} cae fuera del intervalo, el efecto de la innovación ha sido relevante, y ha apartado a la variable de forma significativa de su trayectoria previsible²⁹.

2.10. Utilidad de los modelos ARIMA en el análisis económico

En el capítulo anterior se decía que el universo económico es multivariante, por lo que es preciso considerar todo el vector de variables y con él un modelo multiecuacional absolutamente general. Ahora bien, bajo ciertas condiciones muy generales, que se suelen cumplir en muchas de las situaciones que se encuentran en la práctica, este modelo econométrico implica que cada variable que en él aparece está generada por un modelo ARIMA-IA.

De ahí que los modelos ARIMA o ARIMA-IA no sean modelos arbitrarios, cajas negras cuya única utilidad es la predicción, sino que son modelos ligados con la forma final de un modelo econométrico simultáneo global.

Por lo tanto, y a diferencia de los modelos de alisado exponencial,

existe una conexión entre la modelización ARIMA de un fenómeno y el tipo de modelos que constituye la base de todo análisis económico. Los modelos ARIMA son consistentes, en el sentido de que son coherentes con el análisis basado en un sistema multiecuacional global y, por ello, una vez estimado un modelo ARIMA es factible utilizarlo para describir las características económicas del fenómeno correspondiente. Sin embargo, un modelo ARIMA no es un instrumento plenamente eficiente, al no considerar la relación del fenómeno en que se centra el interés del analista con otras magnitudes económicas.

Puesto que los parámetros del modelo ARIMA recogen las características del fenómeno, es conveniente analizar qué interpretación puede darse a dichos parámetros.

Antes de entrar en el detalle, se puede adelantar que el aspecto más importante de la relación entre los modelos econométricos globales y los modelos ARIMA radica en que éstos también recogen una representación válida del estado de equilibrio o crecimiento equilibrado del fenómeno que representan. En la medida que los modelos ARIMA son una forma final de los modelos econométricos, el largo plazo derivado de una modelización ARIMA no puede estar en contradicción con el que se deriva de un modelo econométrico. Así, es posible caracterizar de forma consistente este importante aspecto de los fenómenos económicos sin necesidad de construir un modelo econométrico, sino sólo utilizando correctamente la información contenida en el modelo univariante.

Los principales puntos de interés en todo modelo ARIMA son:

1. La *desviación típica de las innovaciones*, σ_a : mide la impredecibilidad de la variable. Se ha visto que cuando se predice el valor para $t+k$ con información hasta t se comete un error de predicción cuya varianza es

$$\text{var}(e_{t+k}) = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{k-1}^2) \sigma_a^2.$$

Si $k=1$

$$\text{var}(e_{t+1}) = \sigma_a^2$$

y este parámetro da una idea de la dificultad de predecir el fenómeno de interés con un período de antelación: cuanto mayor sea σ_a^2 , mayor será el correspondiente intervalo de confianza para un mismo nivel de confianza.

Si se quieren comparar distintas variables entre sí, como tipos de interés a plazos diversos, o ventas de distintos productos o en distintas áreas geográficas de una misma empresa, etc., su ordenación

²⁹ Véase por ejemplo Cancelo (1989).

en función del valor de σ_a resulta muy útil, ya que supone ordenarlos en función de su variabilidad³⁰.

2. Los *parámetros del análisis de intervención*: cuantifican los efectos de acontecimientos especiales, permitiendo calibrar su incidencia sobre el fenómeno estudiado.

Entre estos parámetros debemos mencionar expresamente los *parámetros asociados a la modelización de efectos estacionales especiales*: permiten medir hasta qué punto la serie es sensible a las fiestas, Semana Santa, efectos de calendario, etc; estos aspectos serán desarrollados con detalle en el capítulo cuatro.

3. El *análisis de la estructura estacionaria* permite evaluar el tiempo necesario para que el fenómeno económico alcance la nueva trayectoria de equilibrio a largo plazo.

Así, por ejemplo, sea un modelo del tipo $\Delta Y_t = a_t$: si en el momento $t-1$ el sistema está en equilibrio y en t sufre una perturbación a_t , el nuevo valor de equilibrio a largo plazo es Y_t , precisamente el valor que toma la variable en el mismo momento t . En este caso el nuevo equilibrio se alcanza de forma instantánea al sufrir la perturbación.

En cambio, si el modelo es

$$\phi_p(L) \Delta Y_t = \theta_q(L) a_t$$

la perturbación en t lleva a un nuevo equilibrio a largo plazo dado por $b_0^{(q)}$; teóricamente ese nuevo equilibrio sólo se alcanzará en $t + \infty$, si bien existe un valor k a partir del cual la diferencia entre \hat{Y}_{t+k} y $b_0^{(q)}$ es tan pequeña como se quiera.

¿De qué depende ese valor de k ? Básicamente del orden q del polinomio $\theta_q(L)$ y de las raíces de $\phi_p(L)$: cuanto mayor sea aquél y cuanto mayores sean los módulos de las inversas de éstas mayor será k , retardando así el momento en que se alcanza esa situación de «cuasi equilibrio» a largo plazo. Para determinar k en este caso bastaría con hacer predicciones con un horizonte muy amplio, de varios años con series mensuales, y ver a partir de qué momento se estabiliza la predicción.

Obsérvese que existen variables para las que resulta muy importante, incluso tanto o más que la predicción en sí, determinar el tiempo en el que se estabilizará el valor de la variable, en ausencia de nuevas perturbaciones. Así, por ejemplo, en el control monetario es tan necesario predecir los multiplicadores monetarios, que suelen ser variables integradas $I(1, 0)$, como determinar el número de decenas que tardará en estabilizarse el valor del multiplicador.

³⁰ Véase, por ejemplo, Espasa (1982) para una aplicación a tipos de interés y Revilla et al. (1989) para la actividad industrial.

4. *Estructura cíclica*: en determinadas ocasiones el movimiento hacia el nuevo equilibrio no se realiza de forma monótona, sino mediante un ciclo de amplitud decreciente en el tiempo. En ese caso suele ser de interés calcular las características de ese ciclo y relacionarlo con la información de carácter general sobre el sistema. Para ello se comprueba si la parte autorregresiva del modelo contiene raíces complejas con módulo mayor que la unidad, ya que las características de los ciclos se reflejan en estas raíces.

5. *Caracterización de la situación de equilibrio a largo plazo*, aspecto que ha sido ampliamente discutido en la sección 2.8.

En resumen, aun siendo menos eficientes que los modelos econométricos, un modelo ARIMA bien explotado puede proporcionar una información de gran valor para el analista económico.

Además, se debe señalar que cuando se dice que un modelo univariante es menos eficiente que un modelo econométrico se está adoptando un punto de vista estrictamente teórico, que en el análisis aplicado requiere alguna matización; se está suponiendo implícitamente que *a*) el modelo econométrico está correctamente planteado y estimado, y *b*) que se conocen los verdaderos valores de las variables explicativas.

Como se verá en el siguiente capítulo construir un modelo econométrico es mucho más difícil que elaborar un modelo univariante; por ello es posible que la condición *a*) no se cumpla, y la comparación favorezca al modelo ARIMA. Pero, aun en el supuesto de que el modelo econométrico esté correctamente elaborado, puede suceder que a la hora de predecir se desconozcan los valores de las variables explicativas, y haya que obtener las predicciones de la variable dependiente empleando predicciones de aquéllas. Lógicamente en este caso la calidad de la predicción econométrica se deteriora y pudiera llegar a ser peor que la predicción univariante.

La formulación dinámica de los modelos econométricos es compleja y no es extraño encontrarse con el resultado de que a corto plazo, pocos meses o trimestres de antelación, los modelos univariantes predicen mejor —con menor error cuadrático medio— que modelos econométricos. Sin embargo, si estos últimos son modelos razonablemente adecuados suelen predecir mejor que los univariantes a horizontes de un año o más, véase por ejemplo Bewley y Parry (1991). Por ello, aunque en una empresa o institución se tengan modelos econométricos es también conveniente disponer de modelos ARIMA.

2.11. Consideraciones finales sobre los modelos univariantes de series temporales aplicados a la economía

Muchas variables económicas muestran crecimiento, y en secciones precedentes se han visto tres modelos capaces de explicar tales variables. Dichos modelos, prescindiendo de posibles factores estacionales, son:

$$Y_t = a + bt + n_{1t} \quad (2.11.1)$$

$$\Delta Y_t = \mu + n_{2t} \quad (2.11.2)$$

$$\Delta^2 Y_t = n_{3t}, \quad (2.11.3)$$

en donde los términos n_{jt} ($j = 1, 2, 3$) pueden venir dados por modelos estacionarios ARMA con media cero. Se ha discutido también que de estos tres modelos el tercero es el más flexible, pues a largo plazo tiene un esquema de crecimiento lineal con parámetros que dependen de las observaciones que van apareciendo en cada momento. Es decir, su crecimiento a largo plazo es aleatorio, y no determinista como implican los otros dos modelos.

Esto parece indicar que pueden existir razones teóricas para preferir el modelo (2.11.3) sobre los otros dos cuando se trata de explicar variables económicas con crecimiento. Suponer que las variables vienen generadas por los modelos (2.11.1) o (2.11.2), implica afirmar que la Teoría Económica no tiene especial relevancia para explicar el crecimiento a largo plazo, pues éste se explica fácilmente: es constante; y en tal caso el papel de la Teoría Económica consistiría solamente en explicar las desviaciones de ese crecimiento.

En el análisis económico aplicado los modelos del tipo (2.11.1) están actualmente muy desprestigiados, pues los datos con gran frecuencia los rechazan en favor de (2.11.2) o (2.11.3). Distinguir cuál de estos dos es más apropiado resulta más complicado. En este punto, a falta de muestras muy largas en cuanto al número de años, trabajar con la máxima desagregación temporal puede ayudar mucho. Así, para series mensuales, semanales, diarias, etc., de actividad económica, y por tal se quiere decir principalmente series económicas de las que están excluidas las referentes a rentabilidad de activos financieros, precios relativos, tipos de cambio, etc, es abrumadoramente frecuente encontrar que vienen determinadas por un modelo ARIMA con dos raíces unitarias reales y positivas.

El modelo

$$(1-L)(1-L^{12})Y_t = (1-\theta_1 L)(1-\theta_{12} L^{12})a_t,$$

señalado por Box y Jenkins como especialmente útil para explicar series económicas mensuales, se ha popularizado enormemente y con mucha frecuencia resulta idóneo para explicar series de actividad económica mensuales referidas a economías nacionales diferentes. A este respecto, Koch y Rasche (1988) estiman que las nueve series mensuales de indicadores adelantados de la economía estadounidense que utiliza el Ministerio de Comercio de dicho país, vienen explicadas por modelos ARIMA que requieren doble diferenciación. En cambio, para series trimestrales no parece existir un acuerdo tan general³¹.

Con frecuencia los autores que prefieren los modelos del tipo (2.11.2) se basan en la aplicación de contrastes estadísticos sobre la significatividad de las raíces unitarias³². Estos contrastes, que sólo son de validez asintótica, no están exentos de problemas, por lo que sería preferible contrastar el modelo (2.11.2) frente al modelo (2.11.3) a partir de las predicciones posmuestrales de cada uno de ellos. En cualquier caso, trabajos empíricos apuntan a que trabajando con el máximo nivel de información disponible, es decir, con series económicas muy desagregadas en el tiempo, la hipótesis de dos raíces unitarias difícilmente se rechaza frente a la alternativa contenida en el modelo (2.11.2).

Probablemente ambas hipótesis son falsas. Por ejemplo, Perron (1990, página 161) en el apartado de conclusiones afirma: «Estas aplicaciones (ejemplos con series reales) demuestran que la hipótesis de raíz unitaria es sensible a pequeños cambios en la especificación del componente determinista de una serie temporal. Al igual que en el trabajo previo Perron (1989), parece que muchas series temporales macroeconómicas se construyen mejor como fluctuaciones estacionarias alrededor de un componente determinista que ocasionalmente, pero raramente, cambia de forma dramática. Solamente estos cambios que se producen de una vez parecen tener efectos permanentes». El trabajo de Perron (1990) tiene el inconveniente de considerar que los cambios mencionados se producen exógenamente. Por ello, su procedimiento no intenta obtener un modelo estocástico que explique la ocurrencia de los mismos.

Sin embargo, ésta puede ser la cuestión de mayor interés en el análisis de series temporales aplicado a la economía: el desarrollo de un marco estocástico general en esta dirección constituye una de las líneas de investigación más importantes en el campo del análisis de

³¹ Por poner un ejemplo, para el caso del producto nacional bruto americano Campbell y Mankiw (1987), Cochrane (1988) o Stock y Watson (1986) favorecen el modelo (2.11.2), mientras Canovas (1992) defiende un modelo del tipo (2.11.3).

³² Para un resumen sobre la literatura econométrica sobre raíces unitarias véase Dolado et al. (1990).

series temporales económicas. En tal sentido, los modelos autorregresivos y de medias móviles autorregresivos (Self-Exciting Autoregressive Moving Average Models) —véase Tong (1990)—, en donde los parámetros del modelo cambian a tenor de una señal que es función del pasado de la serie, suponen cierto avance, y el trabajo de Potter (1990) sobre el producto interior bruto estadounidense es ciertamente interesante. No obstante, el objetivo debe dirigirse a determinar los cambios de los parámetros en función de la evolución de otras variables económicas relacionadas con la que estamos estudiando.

La aportación de Box y Jenkins, ofreciendo una familia de procesos estocásticos junto con una metodología de modelización empírica que se ha mostrado de utilidad universal para explicar gran número de series temporales no estacionarias, constituye un logro científico muy destacado. Estos modelos son lineales con parámetros fijos, pero las funciones de predicción que de ellos se derivan son funciones temporales con parámetros variables. De hecho, gran parte del éxito de los modelos ARIMA reside en esta adaptación de las funciones de predicción a las condiciones específicas del momento en que se realiza la misma.

Las hipótesis de linealidad y normalidad utilizadas en los modelos de este capítulo no son más que meras aproximaciones de las características del mundo real, que habiéndose mostrado muy útiles no representan en ningún caso un estadio final en la modelización económica. En efecto, una implicación de las dos hipótesis señaladas es, como se apuntó en la sección 2.9, que la función de densidad condicional de una variable económica respecto a su pasado es gaussiana y, por tanto, simétrica respecto a su media condicional (predicción). Ello implica, como señala Brunner (1992), que en un periodo de expansión (contracción), la probabilidad de una expansión ulterior (contracción) —en relación a la media condicional— es igual a la probabilidad de una contracción (expansión). Sin embargo, hay cierta evidencia —véase las referencias contenidas en Brunner (1992)— de que los ciclos de actividad en las economías desarrolladas no son simétricos: las expansiones suelen ser periodos largos de crecimiento moderado y las contracciones bruscas pero cortas.

Ciertamente las restricciones de linealidad y normalidad limitan la utilidad de los modelos ARIMA para explicar plenamente lo que sucede en el mundo real. El trabajo de Perron (1990) y de otros, véase por ejemplo Espasa (1984b), apunta a que la hipótesis de linealidad puede ser válida solamente por tramos históricos. Esto justifica la afirmación anterior de que la investigación en modelos en los que los parámetros se muevan por umbrales, en función de información posiblemente no contenida en la historia de la serie estudiada, puede

producir resultados especialmente útiles en aplicaciones económicas.

De lo anterior se desprende que la investigación en el campo de series temporales puede producir en un futuro próximo clases de modelos más generales para explicar las series económicas, y no en vano se ha advertido anteriormente que todo modelo es mejorable. En este sentido el analista deberá estar atento a los desarrollos futuros en el campo de la modelización de series temporales. Pero incidiendo en la utilidad del modelo y en el servicio que presta a quien pueda acceder a sus resultados, se puede concluir señalando que los modelos ARIMA ampliados con análisis de intervención (ARIMA-IA), estudiados en este capítulo, constituyen hoy en día uno de los instrumentos disponibles más útiles en el análisis económico. En particular, en la formulación de los mismos, los modelos que implican transformaciones estacionarias con media nula parecen más indicados para explicar variables económicas, pues son más flexibles para adaptarse a los cambios que experimenta la variable estudiada.

Apéndice

EL OPERADOR Δ_{12}

Se ha visto anteriormente como

$$\Delta_{12} = (1 - L^{12}) = (1 - L)(1 + L + L^2 + \dots + L^{11}) = \Delta U_{11}(L)$$

De aquí se comprueba que las raíces de Δ_{12} son: 1, -1 y

$$\begin{aligned} &\cos(2\pi/12) \pm i \operatorname{sen}(2\pi/12) \\ &\cos(2\pi/6) \pm i \operatorname{sen}(2\pi/6) \\ &\cos(2\pi/4) \pm i \operatorname{sen}(2\pi/4) \\ &\cos(2\pi/3) \pm i \operatorname{sen}(2\pi/3) \\ &\cos(2\pi/2,4) \pm i \operatorname{sen}(2\pi/2,4) \end{aligned}$$

En Δ_{12} hay dos raíces reales y cinco pares de complejas conjugadas; sin embargo en todos los casos su módulo es la unidad, y por lo tanto las doce raíces tienen en común que su contribución a la función de predicción no tiende a cero. Concretamente para cada par de complejas conjugadas esa contribución es

$$[\beta_1^{(j)} \cos(k\lambda_j) + \beta_2^{(j)} \operatorname{sen}(k\lambda_j)] 1^k$$

Una forma alternativa de expresar estas raíces es viendo que

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (1 - L^{12}) = \\ &= (1 - L)(1 + L)(1 - L + L^2)(1 - \sqrt{3}L + L^2)(1 + L^2)(1 + L + L^2)(1 + \sqrt{3}L + L^2). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que cada par de complejas conjugadas induce un movimiento sinusoidal de amplitud constante y con distintos

periodos relacionados con el ciclo estacional: el cuadro A.1 resume estos resultados. A lo que figura en dicho cuadro hay que añadir que la raíz -1 induce un movimiento oscilatorio impropio, que se puede interpretar como un ciclo de período dos.

CUADRO A.1. Ciclos inducidos por las raíces complejas de Δ_{12}

Factor	Raíces (Coordenadas polares)	Amplitud	Período (Meses)
$1 - \sqrt{3}L + L^2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right)$	1	12
$1 - L + L^2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)$	1	6
$1 + L^2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)$	1	4
$1 + L + L^2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	1	3
$1 + \sqrt{3}L + L^2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{2,4}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2,4}\right)$	1	2,4