Manim com a eina de visualització matemàtica

TREBALL DE FINAL DE MÀSTER

Autor/a: Xavier Gata Aragón
Tutor/a: Francisco José Zaragoza Serrano
Màster universitari en Formació del Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes
Any: 2022

DECLARACIÓ

Declaro que el material d'aquest document, que ara presento, és fruit de la meva pròpia feina. Qualsevol ajuda rebuda d'altres persones ha estat citada i reconeguda dins d'aquest document. Faig aquesta declaració sabent que incomplir les normes relatives a la presentació de treballs pot comportar conseqüències greus. Soc conscient que el document no s'acceptarà tret que es lliuri amb aquesta declaració.

GATA ARAGON, XAVIER (FIRMA)

Firmado digitalmente por GATA ARAGON, XAVIER (FIRMA)
Fecha: 2022.05.31 03:37:02 +02'00'

Signatura: …………………………………

Xavier GATA ARAGÓN

There should be no such thing as boring mathematics

EDSGER DIJKSTRA

Resum

La visualització és essencial en la educació, i especialment en la didàctica de les Matemàtiques. Aquest treball busca portar la visualització a l'aula a través de l'aplicació d'una eina innovadora, *Manim*. *Manim* presenta una plataforma ideal per visualitzar conceptes avançats del currículum de Matemàtiques. En aquest treball es proposa una intervenció amb aquesta eina com a protagonista en una classe de Matemàtiques II de Batxillerat de l'Institut Pons d'Icart de Tarragona.

Abstract

Visualization is essential in education, specially in the teaching of Mathematics. This thesis seeks to bring visualization to the classroom through the application of an innovative tool, *Manim*. *Manim* presents an ideal platform to visualize advanced concepts of the Mathematics curriculum. This thesis proposes an intervention is with this tool as the protagonist in a Mathematics II baccalaureate class of Mathematics II at the Institut Pons d'Icart in Tarragona.

Resumen

La visualización es esencial en la educación, y especialmente en la didáctica de las Matemáticas. Este trabajo busca llevar la visualización al aula a través de la aplicación de una herramienta innovadora, *Manim*. *Manim* presenta una plataforma ideal para visualizar conceptos avanzados del currículo de Matemáticas. En este trabajo se propone una intervención con esta herramienta como protagonista en una clase de Matemáticas II de Bachillerato del Instituto Pons d'Icart de Tarragona.

Palabras claves / Paraules clau / Keywords

visualització – Manim – innovació – batxillerat – treball de final de màster

Sumari

Índex de figures

Índex de taules

Introducció

Les Matemàtiques són habitualment associades als nombres, a les xifres que els representen i a les operacions que podem fer entre ells i que ens permeten obtenir resultats útils per alguna tasca en concret. Tot i així, i si bé durant la major part de l'aprenentatge matemàtic dels alumnes a la ESO i el Batxillerat es produeix llegint o escrivint símbols matemàtics, els primers passos que es donen en el procés no requereixen de cap pissarra o full.

Comencem a aprendre Matemàtiques de forma estrictament visual, comptant els dits de la mà o amb peces geomètriques que s'encaixen en forats que les imiten. Aquesta estratègia de còmput digital acompanya alguns alumnes més enllà de la primària, i evidencia el fet que algunes persones tenen un grau d'aprenentatge visual superior a d'altres tipus d'aprenentatge.

En arribar a l'adolescència, l'aprenentatge dels alumnes passa de concret a abstracte, i aquest canvi els permet, en la major part, arribar a copsar conceptes complexos sense la necessitat de visualitzar-los. Tot i així, l'aprenentatge visual és una dimensió important perquè l'assoliment d'aquests conceptes sigui significatiu i quedi gravat en l'alumne de forma indeleble. La visualització d'un concepte ajuda a associar allò abstracte amb allò concret i ambdues coses es realimenten per facilitar-ne la comprensió.

Per posar un exemple, els matemàtics del segle XVI que buscaven una fórmula per la resolució de la equació de tercer grau associaven les equacions de segon grau a una igualtat d'àrees i, per tant, van associar les de tercer grau a una igualtat de volums. Si bé no era una relació impol·luta, ja que l'aparició d'àrees i volums negatius la feia trontollar, els hi va servir per arribar a la solució d'un tipus particular d'equació de tercer grau. Així, abstracció i visualització van treballar de la mà per arribar a un nivell superior de comprensió.

La idea d'aquest treball neix de la creença ferma que aquesta connexió pot afavorir l'aprenentatge en molts dels conceptes que es treballen en les assignatures de Matemàtiques del Batxillerat. Cal, doncs, trobar una eina que permeti realitzar aquesta connexió de una forma clara i entenedora.

L'eina que s'avaluarà en aquest treball és *Manim*, una plataforma gratuïta i de codi obert que acobla diferents programaris (*python*, *ffmpeg*, *LaTeX*…). Va néixer com un projecte personal de Grant Sanderson per implementar-la en el seu canal de Youtube, 3Blue1Brown. La plataforma va ser creada per crear animacions matemàtiques precises per tal d'explicar conceptes complexos d'una forma relativament senzilla. Al voltant de *Manim* s'hi va crear una comunitat que manté i actualitza la plataforma.

Aquesta és la eina que s'avaluarà en aquest treball. Es prendrà valor de la importància de la visualització en el procés d'aprenentatge de les Matemàtiques, s'estudiarà la implementació de *Manim* com a eina alternativa de visualització i s'avaluarà si pot tenir un impacte substancial en els alumnes.

Els objectius d'aquest treball seran:

- Constatar la importància de la visualització de les matemàtiques en la seva docència al Batxillerat
- Estudiar la viabilitat de *Manim* com una eina alternativa i suplementària per a la docència de les Matemàtiques al Batxillerat
- Avaluar l'impacte de l'ús d'animacions produïdes amb *Manim* en el l'aprenentatge de les Matemàtiques al Batxillerat

1. Marc teòric

La visió és un aspecte central de l'ésser humà en termes biològics i socioculturals, com apunta Arcavi (2003). De fet, Sinnet et al. (2007) afirmen la dominància del sentit visual sobre la resta d'estímuls, i postulen que els éssers humans confiem més en la percepció visual que en qualsevol altra. En relació a la dependència visual, Friasse i Piaget (1973), com es va citar a Monge (2013), manifesten que no ens ha de sorprendre que el marc de referència d'un subjecte sigui particularment visual en totes les seves circumstàncies. Això convida a pensar que la visualització, entesa com el procés de rebre una informació visual i interpretar-la, és present en molts -sinó tots- els aspectes de la nostra vida.

Com a reflexió inicial, Gutiérrez (1996, p. 3) recull una cita de Pestalozzi, que es va citar d'Antonovskii (1990), "Amic, quan miro enrera i em pregunto a mi mateix què, parlant pròpiament, he fet jo per la educació de la humanitat? – Descobreixo el següent: he establert que el més alt dels principis bàsics de la educació en reconèixer la observació sensorial-perceptiva (visualització) com la base absoluta de tota cognició"[1]. Sobre aquesta cita postula que, tot i exagerada, la visualització és un dels elements bàsics de la didàctica i que es poden trobar estudis sobre l'efecte de la visualització en camps tan desaparellats com la enginyeria, l'art, la química, la conducció, entre molts d'altres.

En aquest sentit, Torres (2009) afirma que aquests estudis han contribuït a la conformació des d'enfocaments diversos de un marc teòric-pràctic ampli sobre la visualització, i assenyala que el procés de visualització té tres grans objectius: descriure, explorar i analitzar les dades, per tal de descobrir i ampliar coneixement.

Segons Burkhard (2004), la majoria d'activitats del nostre cervell es dediquen al processament i anàlisis de les imatges visuals i, per tant, aquestes és processen abans que el text. A més, processar imatges visuals requereix menys energia per ser consumides. En particular, les representacions visuals són millors que les produïdes per seqüències verbals en: il·lustrar relacions, identificar patrons, presentar alhora informació global i detallada i per comunicar diversos tipus de coneixement.

1.1. La visualització del coneixement

Per emmarcar aquest treball, es consideraran estudis sobre la visualització de la informació i la visualització del coneixement. La visualització de la informació s'entén

[1] Aquesta cita s'ha traduït de l'anglès, com apareix a Gutiérrez (1996, p. 3).

com el procés en que s'utilitzen estímuls externs per produir capacitats cognitives internes (Ware, 2012), el procés de generació de models mentals a partir de dades que produeixin més informació sobre aquestes dades (Spence, 2014), o bé, l'ús de gràfiques interactives per presentar i recolzar la interacció.

La visualització del coneixement integra la visualització de la informació, a banda de l'art cognitiu, l'administració del coneixement, l'arquitectura de la informació i les ciències de la comunicació (Burkhard i Meier, 2005). Més enllà de transportar fets, la visualització del coneixement té com a objectiu la transferència d'idees, experiències, actituds, valors, expectatives, perspectives, opinions i prediccions de manera que siguin utilitzades per recordar, construir i aplicar aquestes idees de manera correcta (Monge, 2013).

Eppler i Burkhard (2005) assenyalen que la visualització del coneixement combina mètodes de visualització de la informació, tècniques didàctiques, cognició visual i investigació en la comunicació visual i examina metodologies per reduir la sobrecàrrega d'informació, la interpretació errònia i el mal ús de la informació.

Així, segons Burkhard (2004) la diferència entre la visualització de la informació i la visualització del coneixement radica en com s'utilitzen les habilitats innates de l'ésser humà: la segona té com a objectiu principal la tramesa d'informació entre individus, per exemple, en relacionar noves idees amb conceptes ja assolit, com és el cas de la metàfora visual.

La metàfora visual és efectiva per realitzar aquesta tramesa de coneixement, segons Eppler (2003), i presenta una sèrie d'avantatges: contribueix a presentar noves perspectives, ajuda a processar l'aprenentatge, focalitza l'atenció de l'espectador i estructura i coordina la comunicació.

L'aparició de la visualització del coneixement apareix, segons Burkhard (2004), de la necessitat de resoldre dificultats en la tramesa de coneixements, en particular: la profunditat de la informació, els temps límit de transmissió, els diferent escenaris en el que es pot situar i la rellevància de informació.

Burkhard (2005) estructura la visualització del coneixement en quatre perspectives, que Burkhard i Meier (2005) consideren necessàries per permetre als investigadors integrar les ciències de comunicació en el context.

La primera perspectiva respon a la pregunta "Per què el coneixement ha de ser visualitzat?", i defineix l'objectiu. Aquesta perspectiva, anomenada de tipus funcional, es pot descompondre en sis funcions de la representació visual (d'ara en endavant RV), resumides en l'acrònim CARMEN (Burkhard, 2005).

- *Coordinació:* Les RV ajuden a coordinar els individus en els processos de comunicació. Té un benefici social.
- *Atenció:* Les RV criden l'atenció, condueixen emocions, i permeten establir patrons i tendències. Té un benefici cognitiu.
- *Record:* Les RV milloren el record i la memòria i enforteixen l'aplicació de nou coneixement. Té un benefici cognitiu.
- *Motivació:* Les RV inspiren, motiven, activen i donen energia a l'audiència, que s'insereix en la interpretació i la exploració gràfica. Té un benefici emocional.
- *Elaboració:* Les RV enforteixen la elaboració del coneixement en equip, i promouen la comprensió i apreciació dels conceptes i idees. Té un benefici cognitiu.
- *Noves idees:* Les RV contribueixen a la creació de noves idees, ja que hi figuren detalls del context i il·lustren relacions entre objectes. Permeten revelar connexions prèvies que restaven amagades i condueixen a noves iniciatives a partir de la experiència.

La segona perspectiva respon a la pregunta "Quin tipus de coneixement ha de ser visualitzat?", i defineix el contingut. Aquesta perspectiva identifica cinc tipus de coneixement a ser transmès en funció de quina pregunta responen.

- *Coneixement declaratiu:* Què saber?, es refereix als fets.
- *Coneixement procedimental:* Com saber?, es refereix als processos.
- *Coneixement experimental:* Per què saber?, es refereix a les causes.
- *Coneixement d'orientació:* On saber?, es refereix a les fonts de coneixement.
- *Coneixement individual:* Qui sap?, es refereix als experts.

La tercera perspectiva respon a la pregunta "A qui està dirigit?", i defineix al receptor. És necessari conèixer el seu context cognitiu, i si és un receptor individual, grupal, una xarxa o una organització, per tal d'escollir la metodologia de visualització adequada per la tramesa de coneixement.

La quarta perspectiva respon a la pregunta "Quin és el millor mètode per visualitzar el coneixement?", i defineix el medi. Classifica en set les RA que es poden utilitzar en els processos de visualització:

    - *Esbossos:* Representen la idea principal i les característiques claus i raonament i l'argumentació; són atmosfèrics, versàtils i d'accés universal;

són ràpids de crear i de visualitzar; mantenen l'atenció; i concedeixen espai per la interpretació pròpia, de manera que enforteixen la creativitat.

- *Diagrames:* Són descripcions esquemàtiques de idees abstractes que estructuren la informació i il·lustren relacions entre conceptes.
- *Mapes de coneixement:* Segueixen convencions cartogràfiques per referenciar el coneixement. Contribueixen a presentar tant una vista global com de detall, permeten estructurar la informació, establir una història comuna i facilitar l'accés a la informació.
- *Imatges:* Condueixen emocions, són inspiradores, atraients, motivants i energitzants. Poden ser compreses en menys d'un minut i recordades per anys. Aquest efecte pot ser utilitzat en la tramesa de coneixement per mitjà de la metàfora visual. Són instantànies, ràpides, altament instructives i faciliten l'aprenentatge. Contribueixen a cridar l'atenció del receptor, a conduir emocions, millorar el record i a iniciar discussions.
- *Objecte:* La exploració en l'espai tridimensional permet la experimentació amb materials, puntualitzar sobre informació d'interès. Contribueixen a atrapar el receptor, ajuden a l'aprenentatge mitjançant una pressió constant i permeten la integració de interfícies digitals.
- *Visualització interactiva:* Permeten l'accés, exploració i judici de diversos tipus d'informació. Es recolza en l'ordinador i permet a l'usuari el control, interacció i manipulació de diferents tipus d'informació de manera que enforteix la creació i la tramesa de coneixement. Fascinen al receptor, habiliten la col·laboració interactiva a través del temps i l'espai, permet la representació i exploració de dades complexes i la creació de noves idees.
- *Històries:* Són visualitzacions imaginàries que són eficients en la tramesa i disseminació del coneixement a través del temps i l'espai. Complementa els altres sis formats visuals i és important per establir una visió comuna, una Història Mútua, per tal de motivar i activar als subjectes receptors.

Amb tot això, s'han de tenir en compte els perills de la visualització. Eppler i Burkhard (2004) assenyalen com a desavantatges els possibles malentesos de la interpretació de diagrames i mapes, les restriccions en el temps i la distorsió de la realitat per una interpretació deficient. La persona responsable de la tramesa de coneixement ha d'entendre totes les variables que participen en aquesta i transmetre coneixement rellevant, en un context, moment i forma adequats pel receptor.

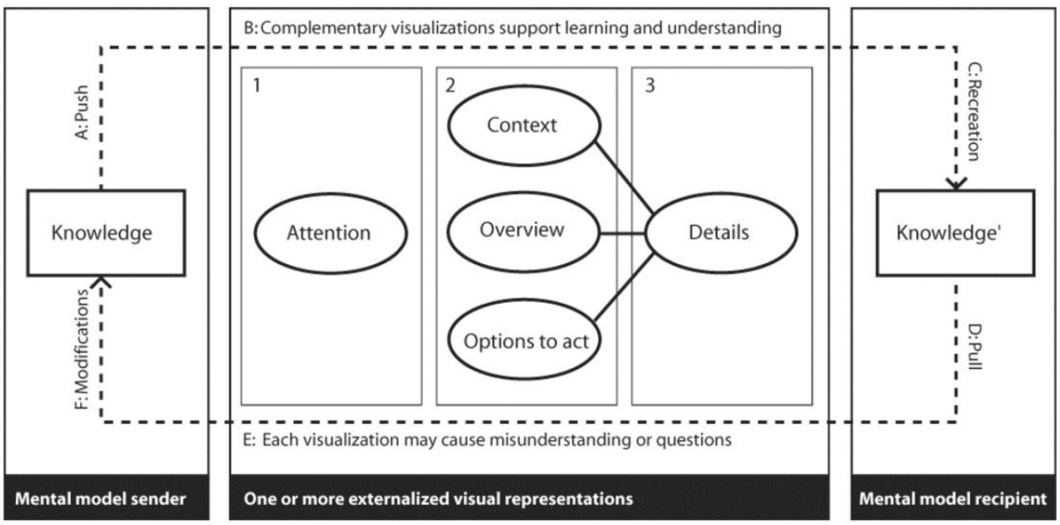
Aquesta tramesa demanda habilitat i experiència, i és per aquest motiu que Burkhard i Meier (2005) estableixen un model general de visualització per recolzar els que manquen d'aquestes característiques i amb la fi de facilitar la mediació entre els investigadors. El troben necessari perquè complementa la estructura de la visualització i en combinació amb aquesta estructura es poden assolir els objectius de la visualització del coneixement.

El model es divideix en tres parts: emissor, medi i receptor. Les tres fases estan enllaçades i interactuen entre sí en cercle comunicatiu (Burkhard, 2005).

Burkhard i Meier (2005) expliciten que aquest model suposa un procés iteratiu intra- i interpersonal: Comença amb un emissor que vol transmetre coneixement (*Knowledge*) a un receptor (A). El seu model mental de coneixement (*mental model sender*) s'externalitza en diverses RV explícites i complementàries (B), que poden ser dividides en tres subprocessos (1,2,3) seguint una seqüència temporal: Primer, l'emissor necessita atreure l'atenció (1) del receptor. En segon terme, l'emissor necessita il·lustrar el context, produir una visió general i presentar opcions per actuar (2). És llavors quan l'emissor podrà indicar detalls del coneixement (D), idealment en diàleg dinàmic amb l'emissor, que reconstruirà (3) un coneixement (*Knowledge'*) basat en les RV complementàries i la seva pròpia imatge mental (*mental model recipient*). Degut a les suposicions, creences o antecedents del receptor, es poden produir malentesos o inferències errònies (E), que poden conduir a una reconstrucció inadequada del coneixement. De forma iterativa, l'emissor refina o afegeix noves RV (F), fins que la tramesa de coneixement es considera adequada.

Figura 1.

Model de visualització del coneixement



Nota: Font: Burkhard i Meier (2005, p. 484).

El model pretén introduir les característiques rellevants que han de ser considerades quan s'utilitzen RV en la tramesa i creació de coneixements, però s'han de tenir en compte certes consideracions (Burkhard i Meier, 2005):

> En primer lloc, un dissenyador ha d'entendre i avaluar la qualitat de la informació i comprovar si la informació és completa, fiable i rellevant per al destinatari a qui s'adreça. Aleshores, s'hauria de concentrar en el rerefons social, cultural i educatiu del destinatari i conèixer les seves necessitats personals i/o funcionals. Llavors, el dissenyador hauria d'abordar el context i presentar tant la visió general com els detalls de la informació i, idealment, opcions per actuar - opcions de com pot podem aplicar el coneixement. En fer-ho, la visualització s'hauria de comprimir als missatges bàsics o continguts i ser coherent pel que fa a la lògica, la manera d'interactuar amb ella, i a l'ús d'elements visuals. Elements com el color, la forma, la mida, els símbols o els tipus de lletra han de ser similars per a tipus de dades similars en les RV. En fer-ho, és important evitar possibles interpretacions errònies, ús indegut o malentès: en situacions ambigües, el text hauria d'ajudar a aclarir el missatge, i les decoracions o l'ús innecessari d'elements com ara clip-arts o colors massa intensos perquè poden distreure el receptor. En tasques motivacionals, les RV s'han de dissenyar per incentivar la reflexió, i per animar el receptor a elaborar el seu propi coneixement. Per fer-ho, les RV ajuden a difondre i establir una visió compartida (p. 484).[2]

1.2. La visualització en la didàctica de la Matemàtica

Des del moment en que la matemàtica apareix de forma rellevant en la societat humana a mans dels pitagòrics, la visualització va ser associada com un component innat a la disciplina (de Guzmán, 1996). Al llarg dels segles, la visualització ha tingut un paper preponderant: el càlcul del segle XVII neix amb un component fonamentalment visual (de Guzmán, 1996).

Tot i així, de Guzmán (1996) assenyala que durant el segle XX la visualització va ser relegada a un paper secundari, i n'identifica possibles causes: l'aritmetització de l'anàlisi per part de Weierstrass, l'aparició de la geometria no euclidiana, i la teoria de conjunts de Cantor. Tot això va produir que la formalització de la matemàtica fos necessària per adduir-li seguretat, i això es va reflectir en l'educació.

L'interès en la visualització en la didàctica de les matemàtiques comença a partir de seminaris per caracteritzar la visualització de la mà de psicòlegs rellevants com Denis, Kosslyn, Krutetskii, Paivio Shepard, Yakimanskaya, i d'altres (Gutiérrez, 2018). Tot i així, Gutiérrez (2018), assenyala que els investigadors en didàctica de la Matemàtica van focalitzar la visualització en el seu camp de coneixement, i van obrir nous enfocaments que esdevingueren constructes teòrics específics, com els proposats per

[2] Aquesta cita s'ha traduït de l'anglès, com apareix a Burkhard i Meier (2005, p. 484).

Bishop, Clements, Gutiérrez, Mitchelmore, Presmeg o Wheatley al llarg de les dècades dels anys vuitanta i noranta.

Gutiérrez (2018) puntualitza que l'ús de la visualització i de les estratègies visuals a l'escola s'associen el l'aprenentatge i l'ensenyament de la geometria, tot i que qualsevol contingut matemàtic pot afavorir-se d'algun suport de representació visual.

Al llarg dels anys, i a partir de la dècada dels anys vuitanta, la visualització ha estat considerada de maneres diferents.

Per Bishop (1983), citat per Quesada (2014), la visualització no és només important en sí mateixa, sinó també pels tipus de processos que intervenen, que són necessaris. Hershkowitz (1990) afirma que la visualització es refereix, en general, a l'habilitat de representar, transformar, generar, comunicar, documentar i reflexionar sobre la informació visual. Zimmerman i Cunningham (1991), citats per Quesada (2014), la defineixen com el procés de formar imatges (mentalment, amb llapis i paper o amb l'ajuda de tecnologia) i utilitzar-les a la fi del descobriment i el coneixement matemàtic.

En termes més concrets, Zazkis et al. (1996) entenen la visualització com l'acte pel qual s'estableix una forta connexió entre la construcció interna i quelcom a què accedim per mitjà dels sentits. Hershkowitz et al (1996, p. 163) indiquen que "s'entén la visualització com la transferència d'objectes, conceptes, fenòmens, processos i les seves representacions visuals i viceversa, inclosa la transferència de un tipus de representació visual a un altra"[3].

Gutiérrez (1996) considera la visualització com l'activitat de raonament basada en l'ús de elements visuals o espacials, bé de forma mental o física, per tal de resoldre problemes o provar alguna propietat. A més, identifica quatre elements que hi intervenen: imatges mentals, representacions externes, processos de visualització i habilitats de visualització.

Per Alsina et al. (1997), visualitzar és tenir la capacitat de produir imatges que il·lustrin o representin conceptes, propietats o situacions determinades, i també la capacitat de realitzar lectures visuals a partir de representacions determinades. Ho resumeixen com associar una imatge figurada a un concepte o procediment.

Plasencia (2000) defineix el terme com els processos que s'involucren quan les persones construeixen, transformen i relacionen imatges mentals visuals, i en els que la ment té un paper actiu a través de translacions, transformacions, dibuixos i altres processos similars.

[3] Aquesta cita s'ha traduït de l'anglès, com apareix a Herskhkowitz et al (1996, p. 163).

Per Arcavi (2003) la visualització és la capacitat, el procés i el producte de la creació, la interpretació, l'ús i la reflexió sobre figures, imatges, diagrames, a la ment, al paper o amb eines tecnològiques, amb el propòsit de representar i comunicar informació, reflexionant sobre el desenvolupament d'idees prèviament desconegudes i el coneixement avançat.

Per Duval (1999), la visualització es refereix a una activitat cognitiva intrínsecament semiòtica. Duval (1994) parla de diversos tipus de representacions: mentals i semiòtiques. La primera abasta les imatges i concepcions que té l'individu sobre un objecte matemàtic; les semiòtiques estan compostes per signes d'un sistema de representació. Ambdues permeten estudiar el procés de comprensió dels objectes, relacions i operacions de les Matemàtiques.

Les representacions semiòtiques pertanyen a sistemes que tenen la seva estructura pròpia i les seves limitacions de significat i funcionament, i poden ser caracteritzades en funció de les activitats cognitives de l'estudiant (Duval, 2004). En aquest sentit, afirma que les representacions són necessàries tant per fins comunicatius com pel desenvolupament de les activitats cognitives del pensament. A més, Duval (2004) planteja que en la formació d'una representació s'han de considerar dos aspectes essencials: la selecció de la representació i el seu ús. Ambdós aspectes es regeixen per regles de formació.

- *Conversió:* La transformació d'una representació d'una forma en un altra
- *Processament:* Transformació dins d'una mateixa forma de representació

Duval (2006) afegeix que no és possible accedir als objectes matemàtics sinó és per mitjà de les seves representacions: "L'única forma d'accedir i treballar-hi és a través de signes i representacions semiòtiques" (p. 157). Duval (1999) declara que és pot entendre sense visualitzar. Per Duval (2006), aprendre Matemàtiques implica reconèixer un mateix objecte matemàtic en les seves diferents representacions, ja que cadascuna per sí sola és parcial (Duval, 1999), i no confondre'l en cap d'elles. D'aquí apareix la necessitat de treballar cada objecte amb registres de representació diversos i aprendre a reconèixer el més adequat a cada context.

La visualització ha estat considerada per diversos autors com a necessària o útil per la cognició matemàtica. Konyalioglu et al. (2005) van presentar a la seva conclusió que la visualització en el procés d'ensenyament incrementa l'aprenentatge conceptual de l'estudiant. Arcavi (2003) argumenta que la visualització posada al servei de la resolució de problemes pot anar més enllà del seu paper procedimental i inspirar una solució general i creativa.

Tanmateix, la investigació de Soto Andrade (2008) apunta que, malgrat que el raonament visual està contemplat en els currículums de Matemàtiques, en general, els professors el presenten com un argument auxiliar o introductori.

1.3. L'ús d'eines TIC per la visualització de la matemàtica

La investigació centrada en la visualització a experimentat un ressorgiment en els últims anys. Fernández (2013) ho addueix a dues raons principal. La primera està relacionada amb la presentació de conceptes, formes, relacions i propietats a través de nous elements i entorns d'aprenentatge, propis d'un món que ha esdevingut cada cop més tecnològic. Aquests avenços s'han traduït en eines matemàtiques i científiques molt potents que infereixen dinamisme a moltes entitats que abans es presentaven per mitjà de taules, fórmules i símbols. Per altra banda, aquests canvis condueixen a canvis en els recursos semiòtics i en les representacions, que conviden a investigar sobre els processos visuals que i tenen lloc (Rivera, 2011 que va ser citat per Fernández, 2013).

La segona raó són els canvis en la concepció de la naturalesa de la matemàtica, entesa com una cerca de patrons, i la visualització és una eina fundamental per reconèixer aquests patrons (Hershkowitz et al, 1996).

Segons Gutiérrez (1996), el software que permet veure diferents representacions de sòlids en pantalla i poder transformar-los, afavoreix la creació i manipulació de imatges mentals. En un estudi que examinava els processos de visualització dels estudiants per construir imatges visuals dinàmiques en 3D, Pittalis et al (2009), consideren que l'aprenentatge en aquests entorns combina representacions simbòliques, estàtiques i dinàmiques que poden ser modificades de forma interactiva, i conclouen que aquest tipus de software té un gran potencial en la millora de l'aprenentatge.

Christou et al (2007) afirmen que el software de geometria dinàmica en 3D proveu una varietat de riquesa visual d'imatges espacials, que no es pot aconseguir amb representacions estàtiques en paper i, en alguns casos, en l'espai físic.

Pratt i Davidson (2003) asseguren que també en geometria plana, l'us de geometria dinàmica i software adient pot facilitar la construcció i definició de conceptes. Alhora, permet desenvolupar connexions entre figures, formant relacions jeràrquiques entre formes i facilitant el pas entre nivells de Van Hiele (De Villiers, 1998; Markoulus i Potari, 1996, que va ser citat per Fernández, 2013).

La combinació de tasques 2D i 3D sobre figures geomètriques per mitjà d'eines tecnològiques permet potenciar el desenvolupament del coneixement espacial i millorar les seves habilitats de raonament visual (Jones et al, 2016). La interacció dinàmica amb la tecnologia ajuda a l'estudiant a construir les seves habilitats algèbriques en donar-li significat (Kaput, 1992) i promouen les seves capacitats per formular, validar i refusar conjectures (Arzarello et al, 2011).

A més, Sinclair i Yerushalmy (2016) defensen que els sistemes computacionals incrementen la motivació i la confiança dels alumnes, ja que permet validar les tasques i promouen la discussió en el si de l'aula.

Cal apuntar, que aquest tipus de software no té una intencionalitat didàctica en el seu disseny, i no proposen en sí mateixos activitats d'aprenentatge (Mota et al, 2013), sinó que és el docent qui ha de desenvolupar aplicacions que incloguin objectius d'aprenentatge relacionats amb la visualització espacial (Hoyos et al, 2021).

2. Context de la proposta d'intervenció

2.1. Contextualització del grup-classe on es realitza la intervenció

La intervenció es du a terme en el centre on estic realitzant les pràctiques, l'Institut Pons d'Icart. El centre identifica els seus trets d'identitat en el Pla Educatiu de Centre (Institut Pons d'Icart, 2021):

> L´ Institut Pons d'Icart de Tarragona va ser inaugurat l'any 1978 sobre l'antic Convent de Sant Francesc, situat a la Rambla Vella i del qual només en queda el Claustre.
>
> Lluís Pons d' Icart [1518/20 - 1578] fou el primer arqueòleg tarragoní. Es tenen poques dades sobre les primeres etapes de la vida del personatge que dona nom al nostre Institut.
>
> L' Institut, amb més de 40 anys d'història, està ubicat al centre històric de la ciutat, a la Rambla Vella, en un lloc privilegiat, proper a les institucions i als principals equipaments culturals: Serveis Territorials d'Educació, Arxiu històric provincial, Conservatori de Música, Biblioteca pública, Teatre Metropol, Teatre de Tarragona, Palau de Congressos, Escola Municipal de Música, Auditori del Camp de Mart, Museus, Sales d'Exposicions, etc. Això el fa singular i de fàcil accés.
>
> Tarragona és una ciutat oberta al mar que atreu, cada cop més, gent de tot el món, per la seva situació geogràfica, pel seu clima i per les diferents possibilitats que ofereix, tant culturals com d'oci, propiciant, així, un procés d´expansió urbanística i demogràfica.
>
> L' Institut Pons d'Icart és un centre públic que depèn del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, del tipus B (Institut de 16 fins a 21 grups) d'estructura lineal, amb 3 línies completes d' ESO i 3.5 de Batxillerat. Tenim 4 modalitats de Batxillerat: Ciències i Tecnologia, Humanitats, Ciències socials i Arts escèniques.

> La llengua vehicular i d'aprenentatge del centre és el català. La llengua castellana i la llengua anglesa s'estudien durant tot el nivell educatiu. Els alumnes tenen la possibilitat de triar una segona llengua estrangera (francès o alemany).
>
> L' Institut Pons d'Icart, actualment, compta amb 558 alumnes, repartits entre 356 alumnes a l'ESO i 212 al batxillerat, procedents en gran majoria de les nostres escoles adscrites. Quant al Batxillerat, l'institut es nodreix d'una bona part dels alumnes del centre i d'una altra, de les escoles concertades properes (p.3).

El centre on es realitzarà la intervenció considera les noves tecnologies com un aspecte puntal del seu pla educatiu. En el seu PEC (Institut Pons d'Icart, 2021), identifiquen una comissió TAC que:

> (...) fomenta l'ús de les Noves Tecnologies entre el professorat, essent aquestes un element vertebrador de la gestió administrativa del centre escolar.
>
> La comissió TAC impulsa i vetlla perquè la Competència Transversal d'àmbit digital es treballi en totes les àrees i nivells de l'ESO.
>
> Som conscients que el món laboral, en constant transformació, s'acosta a l'alumnat per mitjà de les Noves Tecnologies, el domini de les quals s'integra com a element curricular i respon a la diversitat per la seva versatilitat, i es concreta, tant a l'ESO com al Batxillerat, en opcions de contingut, de suport metodològic d'activitats i/o de matèries (p. 9).

La intervenció es realitza en un dels dos grups de Batxillerat que realitzen l'assignatura de Matemàtiques de Batxillerat en la modalitat de Ciències i Tecnologia, en particular els qui han escollit un itinerari de Ciències. L'altre grup servirà de grup de control per l'avaluació de la intervenció.

En la contextualització de la intervenció s'ha de considerar que l'historial acadèmic i l'aplicació del currículum d'aquest grup, com el de tots els centres de Catalunya i del món educatiu internacional, s'han vist condicionats per l'efecte de la COVID19. Fa tres cursos, quan els alumnes cursaven el quart curs de la ESO, la COVID19 va produir un trencament de la seva rutina acadèmica i va conduir a la improvisació en el desenvolupament de la tasca docent. Va haver-hi un canvi sobtat a un model de classes no presencial als que els docents no estaven preparats ni acostumats, amb la corresponent reducció de la idoneïtat del procés d'ensenyament-aprenentatge.

Fa dos cursos, quan els alumnes cursaven el primer curs de Batxillerat, el Departament d'Educació va optar per la distribució dels grups en dos subgrups que assistien de forma presencial i no presencial de forma alternativa per tal de reduir el volum d'alumnes a l'aula.

Aquesta inestabilitat en la metodologia del procés d'ensenyament-aprenentatge, pel qual no estaven preparats ni docents ni alumnes, va dificultar la normalitat del desenvolupament del currículum. Per tant, els alumnes no han arribat a aquest segon curs de Batxillerat amb una base de coneixement prou sòlida com s'espera a aquestes alçades de la seva educació.

Aquest aspecte del seu itinerari ha afectat especialment a la construcció dels conceptes més que no pas a la operativitat matemàtica necessària a l'hora de desenvolupar els exercicis i problemes que se'ls hi plantegen dins del currículum. La comprensió conceptual dels elements matemàtics del currículum de Batxillerat és molt important per poder entendre i analitzar els enunciats.

El currículum de Matemàtiques del Batxillerat considera la introducció dels conceptes de derivada i primitiva durant el primer curs. Tanmateix, per qüestions de temporització, aquest grup-classe no va poder arribar a aquesta part del temari. Això suposa una dificultat afegida a l'hora d'encarar aquests conceptes matemàtics que són nous i demanden una abstracció superior a la majoria que figuren als currículums de Matemàtiques d'ESO i Batxillerat.

2.2. Conceptes clau de límits, derivades i integrals al Batxillerat

En general, els alumnes d'ESO i Batxillerat que cursen assignatures de Matemàtiques acostumen a tenir majors dificultats amb els continguts conceptuals del currículum que amb els continguts procedimentals. Fernández (2013) identifica dues particularitats de les Matemàtiques que presenten complicacions en l'aprenentatge dels alumnes: el seu paper en la modelització i representació de la realitat i en la traducció constant de la simbologia matemàtica al llenguatge natural.

En el seu estudi, Fernández (2013) identifica que gairebé un 60% dels alumnes enquestats identifiquen els conceptes i el plantejament i resolució de problemes com els elements més difícils de les Matemàtiques.

En la seva intervenció, que realitza sobre les primeres nocions del càlcul diferencial, identifica que la dificultat més gran que es troba en els alumnes és la de comprendre què és i per a què serveix la derivada d'una funció. Paradoxalment, en general els alumnes saben aplicar els algorismes pel seu càlcul però no comprenen per què ho fan.

En el grup-classe on es realitza la intervenció, aquest serà un punt fonamental ja que durant el primer curs de Batxillerat no van poder arribar a aquesta part del temari, i els conceptes previs de límits i continuïtat no es van poder veure amb la profunditat necessària per assentar una base sòlida de cara a enfrontar conceptes més avançats.

En termes de la derivada, Inglada i Font (2005) identifiquen un conflicte de com alguns llibres de text deixen la interpretació de la definició formal de la derivada, amb el concepte de límit, a càrrec de l'alumne. Així, recomanen una seqüència prèvia a la introducció d'aquest concepte per tal de facilitar el salt conceptual que ha de fer l'alumnat.

Contreras (2003) resol en el seu estudi que el concepte de la derivada en un punt és sovint desconegut per l'alumnat després de l'ensenyament. Els alumnes acostumen a associar la derivada a la pendent de la recta tangent però ho fan de forma operativa i sovint no entenen que construeixen quan resolen exercicis sobre el càlcul d'equacions de rectes tangents. A més, presenten dificultats en relacionar la idea de variació amb la del pendent de la recta tangent.

A més, Contreras (2003) identifica que la derivada entesa com a raó de canvi és desplaçada envers altres concepcions, ja que si bé s'utilitza per introduir el concepte a través de la definició i la taxa de variació, es deixa de banda en la recapitulació final de molts manuals i, especialment, en els exàmens de Selectivitat.

En termes de la integral definida, Contreras et al (2010) assenyalen la existència de quatre configuracions epistèmiques de la integral definida:

- Entesa com la determinació de l'àrea entre la funció entre una corba i l'eix d'abscisses. Els càlculs de longituds, àrees i volums que hi associem fan referència a un context geomètric estàtic.
- Entesa com la idea fonamental del càlcul, és a dir, la determinació dels resultats i efectes de canvis o processos. La integral definida ens permet determinar el resultats d'aquests processos de canvi.
- Entesa com a la inversa de la derivada, operació amb la que comparteix una relació d'origen des de la seva concepció, a mans de Newton i Leibniz.
- Entesa com una aproximació a través del concepte límit, formalitzada per Cauchy, a través de la suma d'àrees que representen la partició d'un interval.

Analitzant la influència de la integral definida en les proves d'accés a la universitat, Contreras et al (2010) identifiquen que la integral definida apareix en un 77% de les proves, de les quals un 94% es contempla només la configuració epistèmica de la integral entesa de forma geomètrica. Això va en detriment de les altres configuracions i de la creença de Duval (2000) que "aprendre un objecte matemàtic significa coordinar els diversos sistemes de representació semiòtica del mateix"[4].

[4] La cita textual s'ha traduït de l'anglès al català des de la font.

2.3. Manim com a eina de visualització matemàtica

El nom de *Manim* ve de l'anglès *mathematical animation engine* i va ser creat per Grant Sanderson per tal construir animacions matemàtiques d'alta precisió. *Manim* utilitza el llenguatge de programació *Python* com el seu nucli, en el que integra *LaTeX* per escriptura de textos i fórmules matemàtiques, *Cairo* per la construcció de figures i gràfics i *FFmpeg* que s'encarrega de compilar-ho tot en format d'animació *(*The Manim Community Dev Team, 2022*)*.

Originalment, Sanderson va crear *Manim* a nivell personal per produir vídeos pel seu canal de Youtube 3blue1brown, centrat en la descoberta i la curiositat matemàtica. En Grant va estudiar Matemàtiques i Ciències de la Computació a Stanford, i va treballar a Khan Academy fins el 2016, on va centrar la seva atenció en el seu canal de Youtube (Sanderson 2022f; Sanderson 2022g).

Sanderson va desenvolupar *Manim* com un projecte unipersonal per tal produir vídeos pel seu canal de Youtube 3blue1brown, centrat en la descoberta i la curiositat matemàtica, des del 2015 al 2018. Al 2018 va obrir-ho en codi obert per tal que aquells usuaris que el volguessin utilitzar en tinguessin la oportunitat. A finals de 2019, Sanderson va començar a treballar en una nova branca del programa, amb una renderització més ràpida, que a partir de 2021 va esdevenir la branca per defecte del seu repositori. En paral·lel, a principis de 2020, un grup de desenvolupadors va fer un *fork* de Manim del qual se n'ha creat una comunitat que el manté i desenvolupa (Hackl, 2022; Sanderson 2022f; Sanderson 2022g).

Existeixen, per tant, tres versions del programa: la versió original *ManimCairo*, la versió que utilitza en Grant Sanderson per desenvolupar els vídeos *ManimGL*, i la versió suportada per la comunitat *ManimCE (The Manim Community Dev Team, 2022)*.

Manim és una eina molt interessant per fer ús de la visualització per millorar la didàctica de les matemàtiques. El propi Sanderson (Lex, 2020, 1h49m5s) apunta a altres eines que poden assolir la necessitat de la visualització a nivells més senzills, com Desmos, Geogebra i Grapher per fer figures; matplotlib i Mathematica per fer gràfics. Sanderson (Lex, 2020, 15m24s) identifica les diferències de Manim amb aquestes altres eines el potencial per unes animacions més estètiques i, sobretot, que es construeixen de forma programàtica.

Aquesta característica és la més rellevant i la que condueix la decisió d'estudiar Manim com a eina educativa; tot i així, cal remarcar, que no es considera una eina absoluta de visualització, sinó que es projecta com una eina complementària a les que ja s'utilitzen.

Sanderson (2021) identifica quatre casos en que ell considera que les animacions programàtiques ajuden a entendre les matemàtiques:

- Quan quelcom sobre el resultat de l'animació és inesperat, és a dir, bé qui produeix l'animació o bé qui la interpreta té o pot tenir una expectativa errònia degut a que aquest resultat és contra intuïtiu (per exemple, l'estudi del caos)
- Quan volem construir un medi d'explicació alternatiu a l'habitual, que permet traduir entre diferents representacions semiòtiques i que es pot adaptar al concepte particular que es vol explicar
- Quan la construcció de l'animació permet realitzar tests i comprovar hipòtesis per part del programador, és a dir, quan l'alumne escriu el codi que li permet desenvolupar l'animació

Aquest treball vol centrar l'atenció especialment en el segon punt, és a dir, en la construcció d'animacions per tal de crear un medi en el que un concepte matemàtic es pugui visualitzar a través de la representació i transformació de registres semiòtics diversos. Lex i Sanderson identifiquen que l'ús d'una animació programàtica, que permet produir una animació en la que es pot jugar i retocar variables que mostren una evolució o una transformació, pot tenir efectes similars a la interacció guiada dels alumnes amb alguna aplicació que ho permeti, com Geogebra (Lex, 2020).

En el cas particular del càlcul infinitesimal, Tall (2009) defensa el seu caràcter dinàmic i com, per tant, s'ha d'ensenyar de forma dinàmica. L'ensenyament tradicional de les Matemàtiques a l'aula s'ha dut a terme amb el recolzament de la pissarra i, per tant, a través d'un medi essencialment estàtic. Tot i l'adveniment de les noves tecnologies i degut sobretot a la manca de formació del professorat en entorns de *software* dinàmic, l'autor d'aquest treball considera que la pissarra encara és un de les eines puntals en l'ensenyament de conceptes matemàtics que precisarien d'un enfoc més dinàmic.

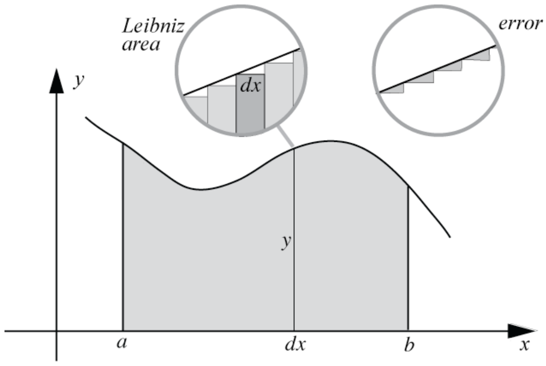
Tall (2009) relaciona aquest dinamisme amb la construcció de corbes amb la dimensió del temps, els efectes d'ampliació i canvi d'escala per avaluar punt de la gràfica des de diferents perspectives i l'èmfasi visual de certes parts de la funció per destacar-ne algun aspecte. Totes aquestes accions són difícils o impossibles d'aplicar en un medi estàtic.

Manim suposa una plataforma en que totes aquestes accions hi estan integrades, especialment tenint en compte que es tracta d'una eina especialment dissenyada per construir animacions matemàtiques en les que s'hi poden programar tots els aspectes.

D’aquesta manera, en el cas del càlcul infinitesimal, i seguint les indicacions de Tall (2009), podem ampliar un punt de la gràfica per avaluar el valor d’un infinitèsim i, fins i tot, seguir-lo per avaluar com varia el quocient entre infinitèsims al llarg de la gràfica. Podem construir una animació en la que ampliar un punt en que s’avalua el límit per arribar al concepte de continuïtat de forma natural. Podem dividir l’àrea sota la corba en rectangles, i fer-los cada cop més petits, enfocant en l’error d’aproximació per mostrar de forma intuïtiva la integral definida de Leibniz, com podem veure en la Figura 2.

Figura 2.

Visualització de l’error de l’àrea de Leibniz de forma ampliada



Nota: Font: Tall (2009, p. 8).

Manim permet un nombre molt elevat (i que creix de forma constant) d’operacions amb les que visualitzar conceptes matemàtics abstractes a través de la construcció d’animacions programàtiques.

3. Proposta d’intervenció

La intervenció comptarà de quatre animacions que introduiran conceptes avançats d’anàlisi diferencial i de límits. Queda fora de l’abast d’aquest treball la elaboració de les animacions i s’adaptaran de la sèrie de vídeos “*The essence of Calculus*” de *3Blue1Brown* a *Youtube* (Sanderson, 2017a; Sanderson, 2017b; Sanderson, 2017c; Sanderson, 2017d; Sanderson, 2022a; Sanderson, 2022b; Sanderson, 2022c; Sanderson, 2022d; Sanderson, 2022e).

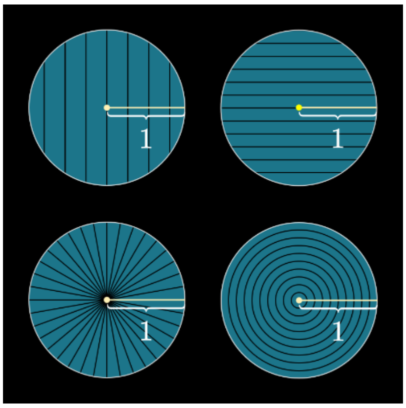
L'adaptació de les animacions implicarà retallar els continguts no matemàtics i eliminar l'àudio[5]. Les intervencions es realitzaran amb els comentaris del professor en català sobre les animacions adaptades.

3.1. Primera animació: Construcció intuïtiva dels conceptes d'integral i derivada

En la primera animació s'introdueix en primera instància el concepte d'integral definida. L'aproximació al concepte es desenvolupa de forma orgànica a través de la resolució d'un problema: com podríem calcular l'àrea d'una circumferència coneixent el seu radi?

Figura 3

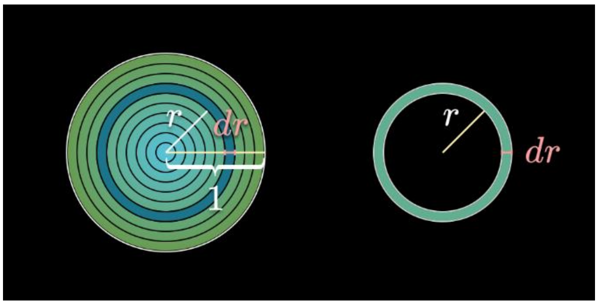
Possibles formes de dividir una circumferència.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

Figura 4

Divisió de la circumferència en anells de gruix dr.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

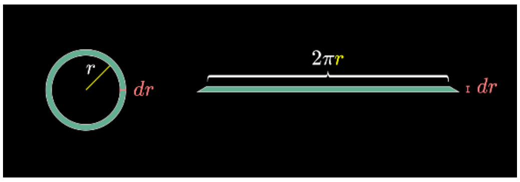
Es parteix de la premissa de desconèixer la fórmula que ens permet calcular l'àrea i es plantegen divisions de la circumferència. L'àrea de cadascuna d'aquestes divisions es pot calcular com un trapezi isòsceles, però decidim aproximar-la a un rectangle. Això permet reduir la complexitat del problema a la suma de tants rectangles com el nombre de divisions concèntriques que s'han realitzat sobre la circumferència. En augmentar el nombre de divisions, es redueix el gruix del rectangle i també l'error que cometen en l'aproximació.

---

[5] En les animacions figuren comentaris en anglès. Això no suposa un problema afegit ja que el centre treballa amb metodologia AICLE (tot i que l'assignatura de Matemàtiques II no està programada en aquesta metodologia), així que els alumnes estan acostumats a treballar en un context bilingüe. En tot cas, es traduiran pels comentaris a càrrec del professor.

Figura 5

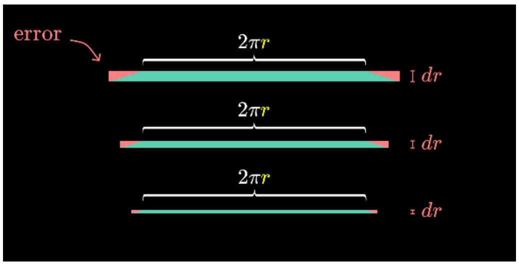
Representació dels anells com trapezis isòsceles.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

Figura 6

Reducció de l'error considerant els trapezis isòsceles com a rectangles.



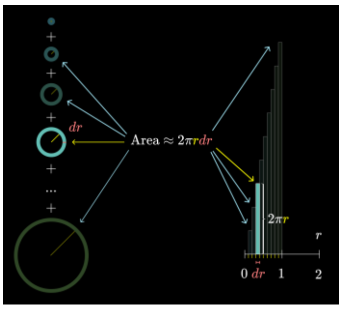
Nota: Font: Sanderson (2022a)

A partir d'aquí es planteja la resolució del problema com la suma de totes les divisions de la circumferència a mesura que augmentem aquest nombre, és a dir, en reduïm el gruix fer-lo tendir a 0.

Tot seguit, es col·loquen tots aquest rectangles sobre uns eixos cartesians, de manera que es pot visualitzar com, a mesura que fem tendir el gruix dels rectangles a 0, conformen un triangle amb base R i amb altura equivalent al perímetre de la circumferència, 2πR. S'arriba a l'àrea sota la recta representada per les alçades de cada rectangle com A= πR^2.

Figura 7

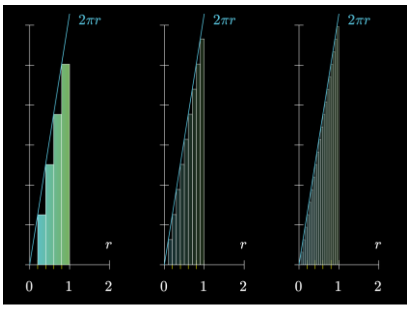
Aproximació dels anells en rectangles isòsceles sobre uns eixos coordinats.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

Figura 8

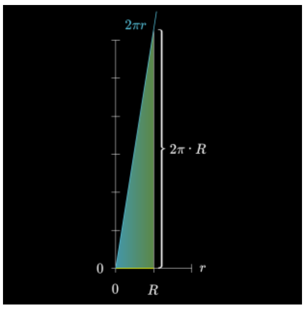
Reducció del gruix dr dels rectangles i aproximació de la seva suma a l'àrea total d'un triangle.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

Figura 9

Representació de l'àrea total de la circumferència com un triangle de base R i alçada 2πR.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

A partir d'aquí, es generalitza que podem calcular l'àrea sota la corba de qualsevol funció trobant una nova funció, la integral, estretament relacionada amb la primera. Encara més important, podem observar que quan en anàlisi ens trobem amb un problema que implica la suma de molts valors petits podem utilitzar aquesta funció per trobar-ne la solució haurem de recórrer a la integral.

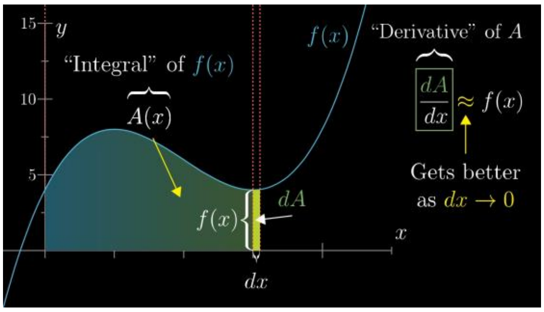
A partir d'aquestes gràfiques podem observar que un petit canvi de la variable independent resulta en un canvi en la funció àrea sota la corba. Podem aproximar aquest increment d'àrea a un rectangle, i aquesta aproximació es cada cop més bona per canvis cada cop més petits de la variable independent. Això ens permet trobar una relació entre la variació de l'àrea i la variable independent de manera que s'observa que el quocient entre ambdues el podem aproximar a la funció original, i aquesta aproximació millora a mesura que la variació de la variable independent tendeix a 0.

Això permet construir una concepció intuïtiva de què representa la derivada (aquest quocient entre la funció àrea, trobada a través de la integral, i la variable independent) i la seva estreta relació amb la integral.

A través d'aquesta relació podem presentar el teorema fonamental del càlcul des d'una perspectiva àmplia del concepte.

Figura 10.

Visualització del concepte intuïtiu d'"integral" i de "derivada" d'una funció.



Nota: Font: Sanderson (2022a)

3.2. Segona animació: La paradoxa de la derivada

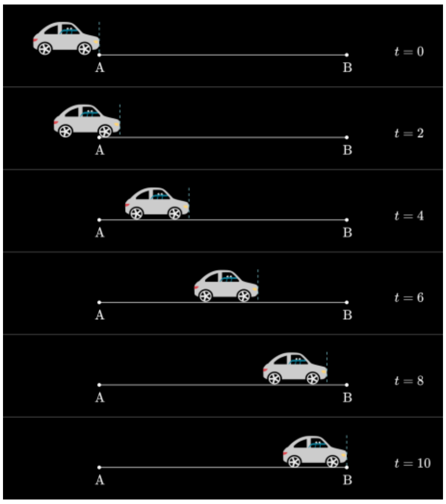
En la segona animació, es desenvolupa el concepte de derivada. Sovint la derivada s'interpreta com un la taxa de variació instantània. Tanmateix, això presenta una paradoxa en el fet que un canvi necessita de múltiples punts en el temps per ser avaluat, i el concepte d'instantani representa un únic moment en el temps.

Per arribar als conceptes d'una forma natural, és presenta un cas de la vida real en què ens interessa saber la taxa de variació d'una magnitud: la velocitat d'un cotxe.

Podem representar la posició instantània en uns eixos cartesians, de manera que es pot avaluar com varia aquesta posició al llarg del temps.

Figura 11

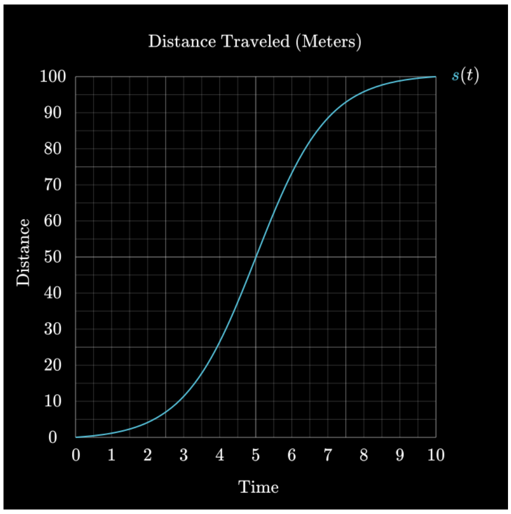
Representació de la posició del cotxe en diversos instants de la seva trajectòria.



Nota: Font: Sanderson (2022b)

Figura 12

Representació de la distància recorreguda pel cotxe en funció del temps.

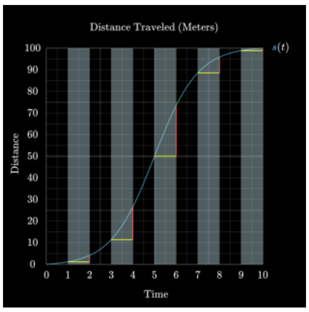


Nota: Font: Sanderson (2022b)

Podem avaluar la taxa de variació respecte del temps, és a dir quant pugem (o baixem) a la gràfica a mesura que avancem. Si avaluem aquesta mesura de variació per a temps petits (en aquest cas, 0.1 segons), podem relacionar-la amb el temps amb una gràfica.

Figura 13

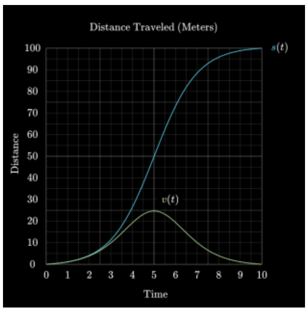
Visualització de la variació de la distància i el temps per intervals de 1 segon.



Nota: Font: Sanderson (2022b)

Figura 14

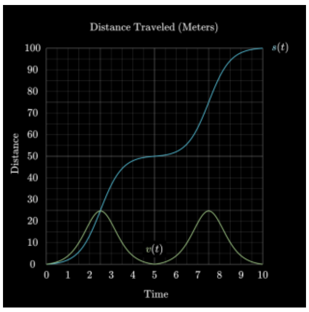
Visualització de la funció v(t) a partir d'avaluar la taxa de variació de la funció s(t) per dt=0.1s.



Nota: Font: Sanderson (2022b)

Figura 15

Visualització de la funció v(t) a mesura que canvia la funció s(t).



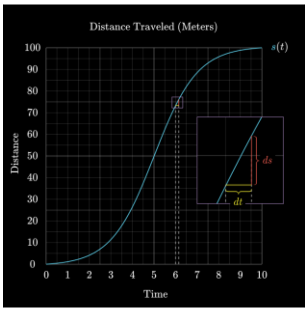
Nota: Font: Sanderson (2022b)

Aquesta relació, entre la taxa de variació avaluada per un temps tan petit com vulguem, ens introdueix el concepte de derivada. La derivada, per tant, és la variació de la imatge de una funció (ds, en el nostre cas) respecte d'una petita variació (*dt*, en el nostre cas), quan aquesta petita variació tendeix a 0. És important aclarir que aquesta variació no és 0, ni és infinitament petita, sinó que té un valor finit que tendeix a 0.

Si bé la taxa de variació ens donava la pendent de una recta que passa pels dos punts dels quals n'avaluem a variació, si fem tendir a 0 aquesta diferència, obtenim la pendent d'una recta tangent a la corba en el punt on s'avalua. Aquest valor és la millor aproximació constant de la variació de la funció en l'entorn d'un punt.

Figura 16

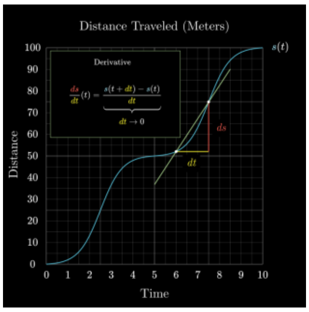
Visualització de la taxa de variació per intervals molt petits de temps amb una eina d'augment.



Nota: Font: Sanderson (2022b)

Figura 17

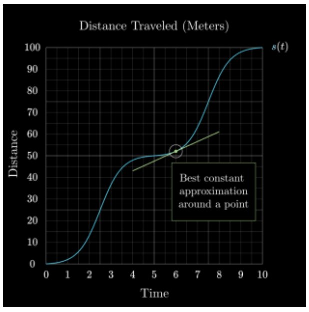
Visualització de la definició de la derivada com la taxa de variació quan els intervals de temps s'apropen a 0 (dt→0).



Nota: Font: Sanderson (2022b)

Figura 18

Visualització del valor de la derivada en un punt com a pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt.

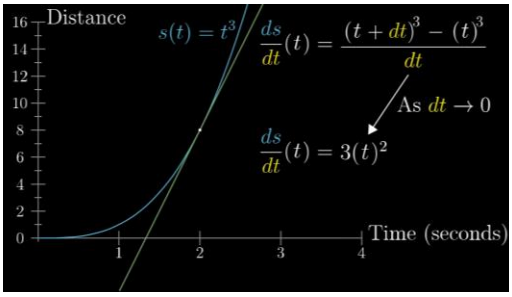


Nota: Font: Sanderson (2022b)

Aquest mateix estudi el podem generalitzar per qualsevol funció. Com a exemple, podem estudiar quin seria la taxa de variació instantània per $s(t)=t^3$. Ho estudiem en $t=2s$, i això en permet generalitzar una expressió que depèn de *dt*. Si fem tendir aquesta diferència a 0, és quan arribem a la expressió de la derivada de la funció.

Figura 19

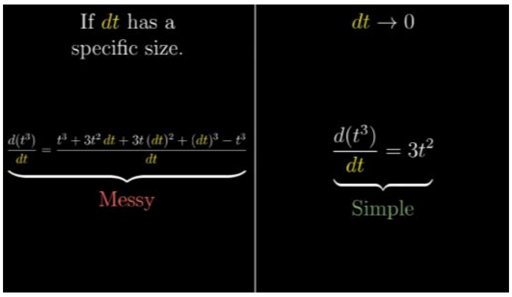
Avaluació de la taxa de variació quan dt→0 de la funció s(t)=t³.



Nota: Font: Sanderson (2017b, 13m11s)

Figura 20

Comparativa entre l'avaluació de la taxa de variació en s(t)=t³ per un dt qualsevol i per dt→0.



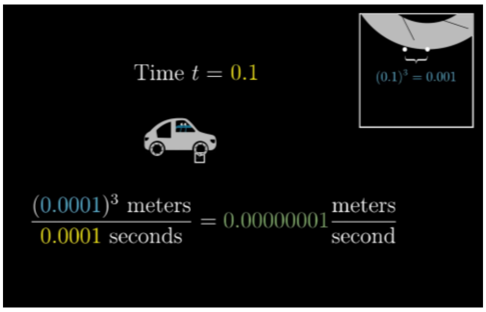
Nota: Font: Sanderson (2017b, 14m10s)

Finalment, un cop entesa que la derivada representa la taxa de variació per un interval de temps que tendeix a 0, podem enfrontar una nova pregunta que ens condueix a una paradoxa. Quan comença a moure's el cotxe?

L'estudi de la derivada ens dona que la velocitat del cotxe en l'instant inicial és 0. Tanmateix, aquesta no és sinó la millor aproximació constant a aquesta variació, perquè per qualsevol interval de temps finit, aquesta variació és, si bé molt petita, no nula.

Figura 21.

Visualització de la velocitat del cotxe des de la posició inicial quan fem tendir el temps final a 0 segons.



Nota: Font: Sanderson (2017b, 16m16s)

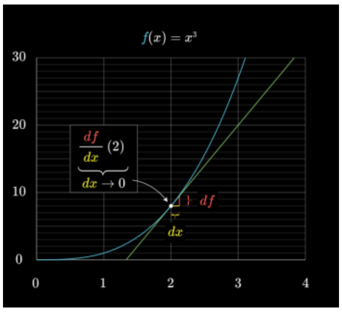
3.3. Tercera animació: La definició formal de la derivada, els límits i la regla de l'Hôpital

Tot i que en la segona animació es contextualitza la derivada i la seva interpretació, en aquesta tercera animació es defineix de manera formal, amb l'ús de la nomenclatura habitual.

Recordem que la derivada representa la variació de la imatge d'una funció respecte d'una variació de la variable independent, quan aquesta última tendeix a 0.

Figura 22.

Visualització de la derivada de f(x)=x^3 en x=2.

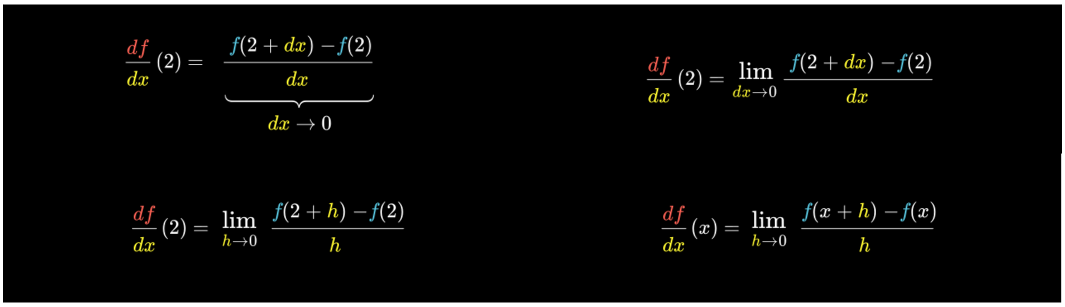


Nota: Font: Sanderson (2022c)

Podem formalitzar això amb la nomenclatura dels límits. Cal apuntar que els termes diferencials ja s'associen a fer-los tendir a 0, i és per aquest motiu que aquesta "empenta" que fem a la variable independent l'associem amb la lletra *h.*

Figura 23.

Evolució de la derivada (d'esquerra a dreta; de dalt a baix) de la taxa de variació a la seva definició formal.

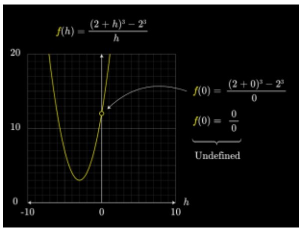


Nota: Font: Adaptat de Sanderson (2022c)

Això ens porta a introduir el concepte de límit. Si avaluem a el valor de la funció dins del límit de la derivada quan x=2, podem observar que no està definida per *h=0* (simbolitzat per un forat en aquest punt). Si ens hi apropem, podem veure que tan si ens apropem a aquest punt per la esquerra o per la dreta, el valor de la imatge de la funció tendeix a 12.

Figura 24

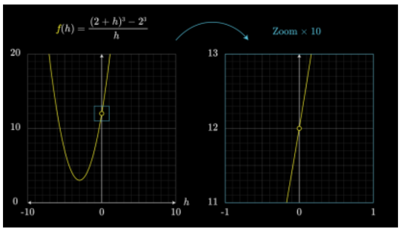
Avaluació de la taxa de variació de f(x)=x³ en x=2 per h=0.



Nota: Font: Sanderson (2022d)

Figura 25

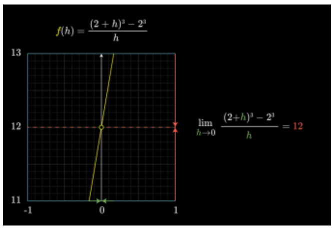
Visualització del forat a la gràfica en la expressió de la taxa de variació f(x)=x³ en x=2 per h=0 amb una eina d'augment.



Nota: Font: Sanderson (2022d)

Figura 24

Avaluació del límit de la taxa de variació de f(x)=x³ en x=2 quan h→0.

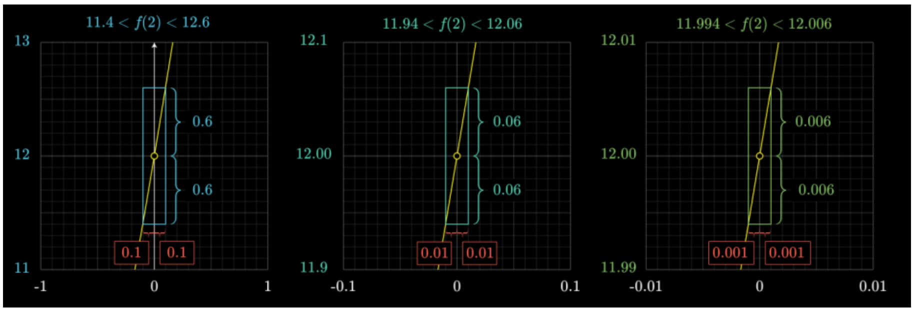


Nota: Font: Sanderson (2022d)

Però què vol dir apropar-se? Podríem definir-ho com que, per un interval de la variable independent, que podem agafar tan petit com vulguem, podem trobar un interval de les imatges associades tan petit com vulguem, que es tanca cada cop més al voltant d'un valor determinat (en aquest cas, 12).

Figura 27.

Visualització exemplar de com podem trobar un interval tant petit com vulguem que inclogui la el valor al que s'apropa la funció, per un interval de la variable independent arbitràriament petit.



Nota: Font: Sanderson (2022d)

Considerem un altra funció. Podem observar que podem escollir un interval de valors de la variable dependent tan petit com vulguem, tanmateix, l'interval d'imatges associades té un valor mínim que no es pot fer més petit. Tenim un salt on no podem tancar l'interval d'imatges al voltant d'un valor determinat.

Figura 28.

Avaluació de la imatge i el límit d'un altra funció d'exemple.

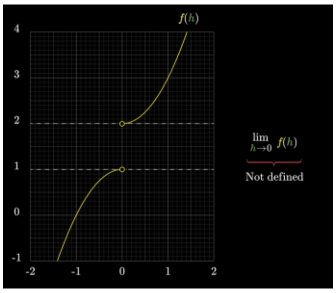
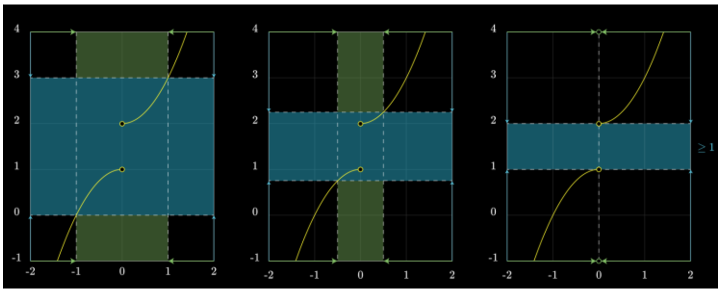


Figura 29.

Visualització dels intervals de la variable independent i la imatge de la funció d'exemple.

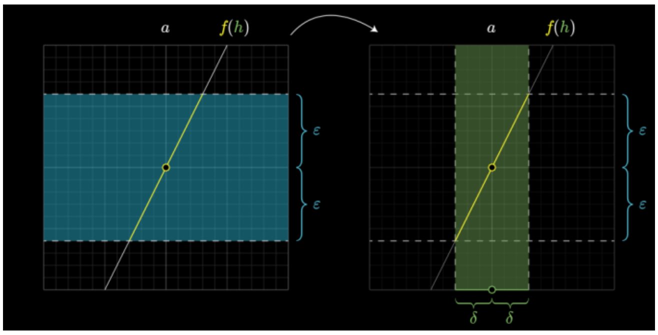


Nota: Font: Sanderson (2022d)

A partir d'aquestes observacions podem introduir la nomenclatura formal. Anomenem ε a la distància a una imatge determinada i δ a la distància al valor de la variable independent que associem a aquesta imatge. Es pot dir que existeix el límit quan per un valor de la variable independent, podem escollir un valor de ε, sempre podem trobar una distància δ tal que l'interval entre els extrems d'aquestes distàncies sempre correspon a una imatge a una distància ε d'un valor determinat, que correspon amb el límit.

Figura 30.

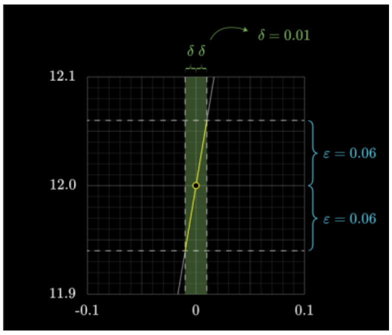
Visualització de les distàncies ε i δ en la funció f(h) respecte de h=a per avaluar-ne el límit.



Nota: Font: Sanderson (2022d)

Figura 31.

Visualització de les distàncies ε i δ respecte de h=0 en la funció taxa de variació de f(x)=x^3 en avaluada en x=2.

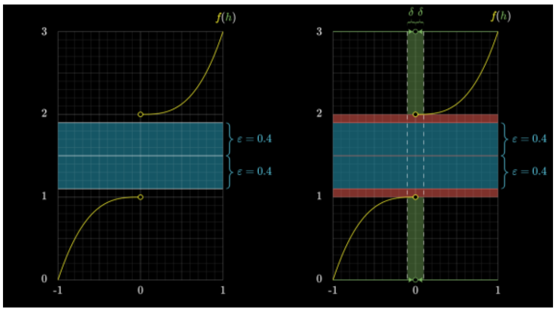


Nota: Font: Sanderson (2022d)

En la segona funció que havíem vist, podem veure com això no és possible. Per una determinada distància ε, en aquest cas 0.4, per molt petit que fem l'interval de la variable independent, l'interval de imatges sempre és massa gran.

Figura 32.

Visualització de les distàncies ε i δ respecte de h=0 de la funció d'exemple, que no té límit en aquest punt.

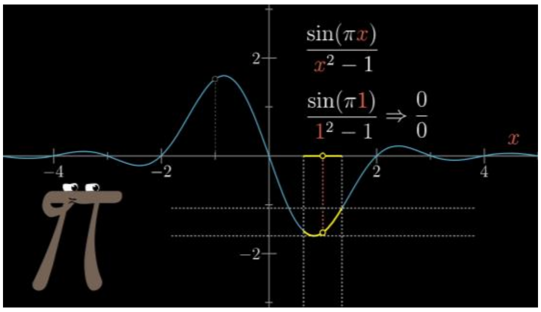


Nota: Font: Sanderson (2022d)

De vegades pot ser complex avaluar segons quins límits. Podem agafar la funció $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$ com a exemple. Si la avaluem en *x=1* podem veure que ens trobem un quocient indeterminat 0/0. Tanmateix, segons els conceptes vist amb anterioritat, hauríem de poder trobat el valor del límit de la funció quan tendeix a *x=1*.

Figura 33.

Visualització de la funció $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$*, avaluada en x=1, on no està definida.*

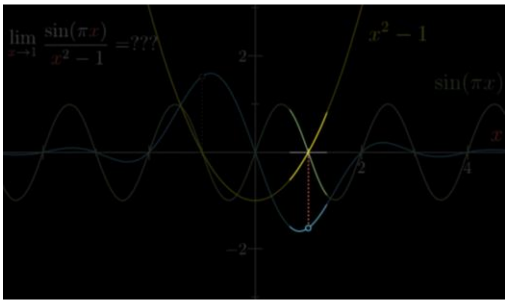


Nota: Font: Sanderson (2017c, 10m56s)

Per entendre com avaluar-lo, grafiquem la funció que apareix al numerador, *P(x)=sin(πx),* i la funció que apareix al denominador, *Q(x)=x²-1*. Podem avaluar la variació d'aquestes funcions al voltant de *x=1*, a través dels conceptes que hem vist sobre la derivada. Això en permet observar que aquesta variació és proporcional a la variació de la variable independent, *dx*. Per tant, podem trobar una aproximació per aquest límit, però si tenim en compte que podem agafar valors de *dx* tan petits com volguem, el límit no només serà aproximadament aquell valor, sinó que serà exactament aquest valor.

Figura 34.

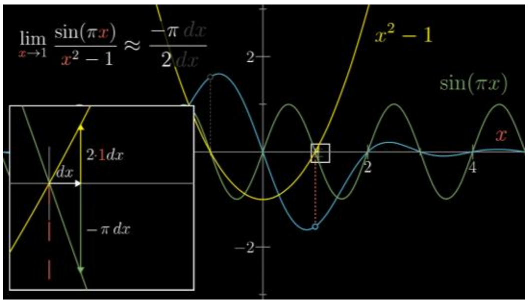
Visualització de les funcions P(x), Q(x)=x^2-1 i $f(x)$, emfatitzant l'entorn de x=1.



Nota: Font: Sanderson (2017c, 11m59s)

Figura 35.

Avaluació de la variació de les funcions P(x) i Q(x) per una variació dx de la variable independent, amb l'ajuda d'una eina d'augment, i del límit de la funció f(x) a partir d'aquestes variacions.

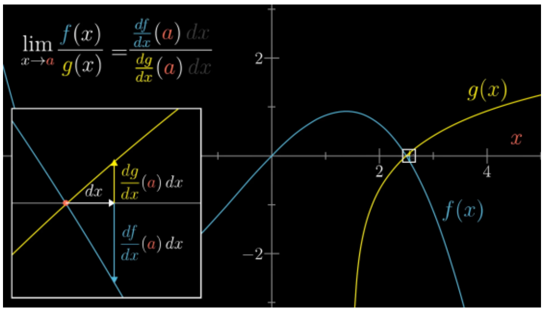


Nota: Font: Sanderson (2017c, 13m54s)

Podem generalitzar per qualsevol quocient entre funcions, sempre que per ambdues existeix el límit quan tendim a un valor de *x* determinat. Aquesta eina, anomenada "regla de l'Hôpital", és especialment útil quan ambdues funcions tenen imatge 0 en el punt on volem estudiar el límit.

Figura 36.

Visualització del límit d'una funció $\frac{f(x)}{g(x)}$ quan x→a a través de la derivada avaluada en x=a.



Nota: Font: Sanderson (2017c, 15m40)

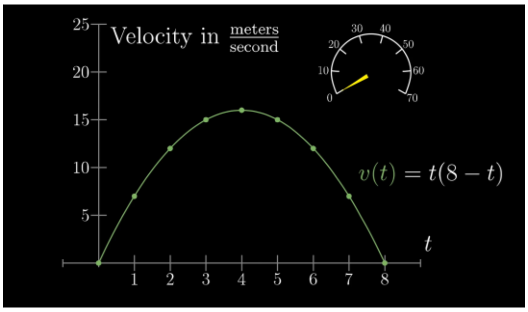
3.4. Quarta animació: La integració i el teorema fonamental del càlcul

En aquesta quarta animació es desenvolupa el concepte d'integral una mica més enllà del concepte intuïtiu introduït a la primera animació.

Comencem considerant un cotxe del qual en sabem la velocitat, però no la distància que recorre. Podem considerar diversos punts on relacionem la velocitat que duu respecte el temps que ha passat des del moment inicial, i aproximar una funció a aquesta relació. Sabem d'explicacions anteriors que la funció velocitat la podem trobar d'avaluar el canvi de posició respecte intervals de temps que tendeixen a 0, és a dir, amb la derivada. Així, podem pensar que si trobem una funció, la derivada de la qual sigui la funció a la que hem aproximat la velocitat, *v(t)=t(8-t)*, podem trobar la expressió de la posició respecte del temps, *s(t)*.

Figura 37.

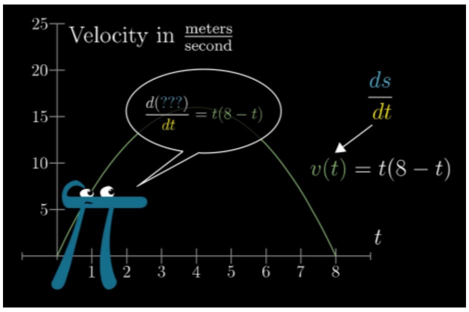
Aproximació de la funció velocitat pel cas considerat.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 1m45s)

Figura 38.

Interpretació de la velocitat com la derivada de la funció distància.

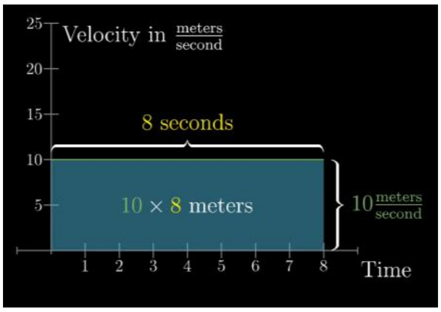


Nota: Font: Sanderson(2017d, 2m17s)

Abans d'això, podem plantejar una situació més senzilla com, per exemple, que la velocitat del cotxe fos constant. En aquest cas, la funció velocitat és una funció constant, i l'àrea sota aquesta per l'interval de temps que s'estudia és un rectangle amb l'interval de temps a la base i la velocitat a l'altura. Així, podem avaluar la distància amb el càlcul d'aquesta àrea. Així, si considerem que en el moviment inicial la velocitat és manté constant durant intervals de temps d'un segon, podríem avaluar la distància recorreguda aproximada amb la suma de les àrees de les funcions constants en aquest instant. Evidentment, cometrem un error de càlcul si utilitzem aquest mètode, però si considerem intervals de temps cada cop més petits, aquest error disminueix considerablement.

Figura 39.

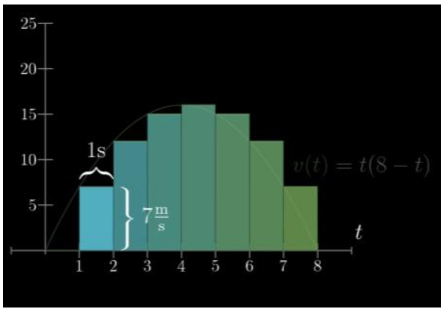
Avaluació de la distància recorreguda com àrea sota la corba en el cas de velocitat constant.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 2m58s)

Figura 40.

Aproximació al càlcul de la distància recorreguda a través de funcions constants en intervals dt d'1 segon.

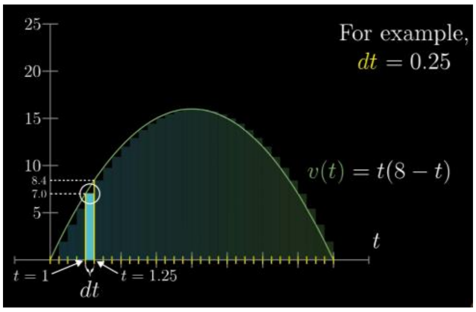


Nota: Font: Sanderson (2017d, 4m8s)

Això ens porta a pensar que el càlcul de la distància recorreguda a partir de la velocitat és anàleg a avaluar l'àrea sota la funció *v(t)*. Introduïm un nou símbol, ∫, per representar la suma d'aquestes àrees *v(t)dt* quan dt tendeix a 0, és a dir, la integral de *v(t)* en l'interval de temps considerat. L'ús d'aquesta nomenclatura, a diferència del símbol de sumatori ∑, respon a que aquesta suma no és una suma qualsevol d'un nombre determinat d'elements, sinó que porta implícita la noció que dt tendeix a 0. De fet, dt actua com a factor i com a divisor de l'interval de temps que considerem.

Figura 41.

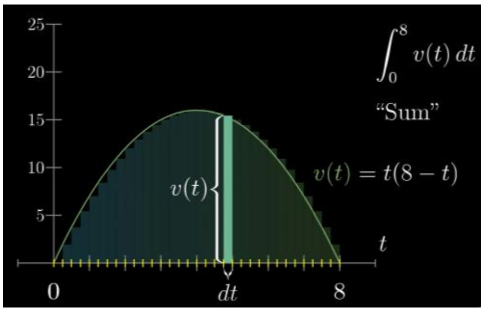
Aproximació al càlcul de la distància recorreguda a través de funcions constants en intervals dt de 0.25 segons considerant la velocitat inicial de l'interval.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 5m4s)

Figura 42.

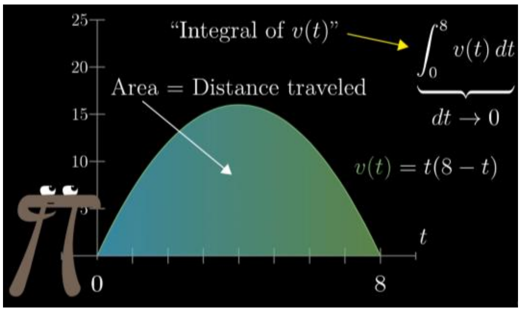
Interpretació de la suma de les àrees com a la integral de v(t) respecte del temps per l'interval tϵ[0,8].



Nota: Font: Sanderson (2017d, 7m2s)

Figura 43.

Visualització de la integral de v(t) com àrea sota la corba per avaluar la distància recorreguda del moviment.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 8m25s).

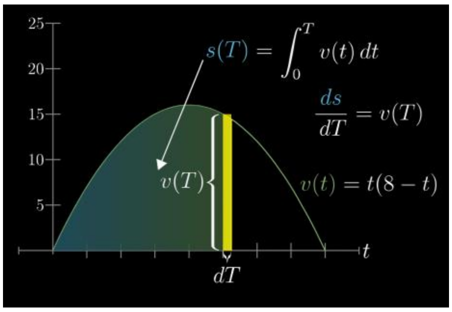
Aquesta metodologia per trobar la solució a un problema com a l'àrea sota la funció, a través de dividir aquesta àrea per intervals de la variable independent i quan aquests tendeixen a 0 és un dels elements fonamentals del càlcul. Molts problemes matemàtics de naturaleses molt diferents es poden resoldre a través de la suma de un gran nombre de petites coses, i la integral és una eina perfecta per això.

Si escollim una variable *Tϵ[0,8]* en el nostre problema, podem avaluar l'àrea sota la funció des de *t=0* fins *t=T* com la integral de *v(t)* entre aquests valors. El resultat d'això ens donaria una funció de la distància recorreguda respecte d'aquesta variable *T*. Quina seria la derivada s'aquesta funció de distància?

Podem pensar en què passa si avaluem un interval *dT*. Per aquest interval, trobaríem un àrea *ds*, de base *dT* i altura v(T). És fàcil veure que la expressió a la que podem arribar és que la *v(T)* representa la derivada de *s(T)* respecte de *T*.

Figura 44.

Interpretació de la funció s(T) com la integral de v(t) respecte del temps per l'interval tϵ[0,T], i la v(T) com la derivada de s(T) respecte de T.

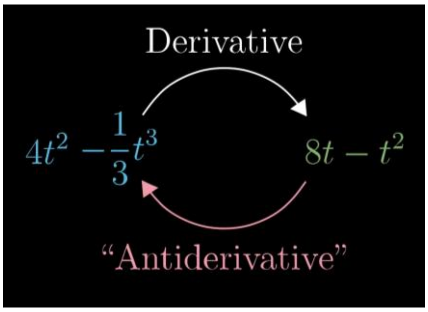


Nota: Font: Sanderson (2017d, 11m0s).

Això ens retorna a l'inici de l'animació: per trobar la funció distància haurem de trobar una funció tal que la seva derivada sigui la funció velocitat.

Figura 45.

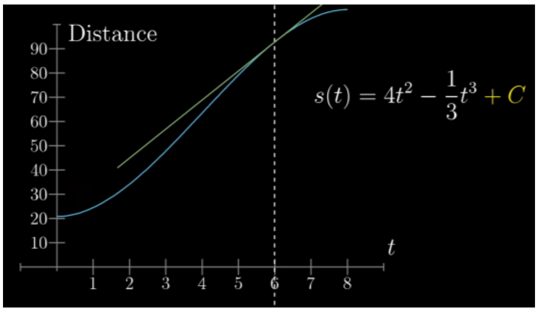
Avaluació de la funció distància com una primitiva de la funció velocitat.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 12m26s)

Figura 46.

Visualització de la funció distància i la seva recta tangent a t=6.



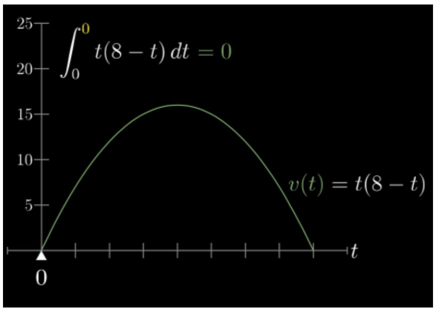
Nota: Font: Sanderson (2017d, 12m58s)

De fet, en podem trobar infinites, donat que una constant a la funció distància no varia la seva derivada. Podem pensar-ho en termes que si desplacem la funció distància amunt i avall, la pendent de la seva recta tangent en un punt determinat no varia.

Com avaluem aquesta constant en expressió de la integral? Hem de pensar que si avaluem la integral de *t=0* fins a *t=0*, el resultat ha de ser nul ja que l'àrea sota la corba és 0. Si avaluem la integral des de *t=0* a *t=T*, avaluem la funció primitiva, aquella que derivada ens donaria la funció que volem integrar, avaluada en T i li restem aquesta primitiva avaluada en 0. En aquest últim pas és on considerem aquesta constant de la que havíem de considerar.

Figura 47.

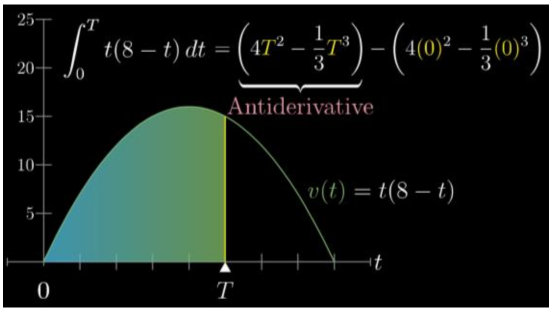
Avaluació de la integral de la velocitat respecte del temps en l'interval tϵ[0,0].



Nota: Font: Sanderson (2017d, 13m25s)

Figura 48.

Avaluació de la integral de la velocitat respecte del temps en l'interval tϵ[0,T].

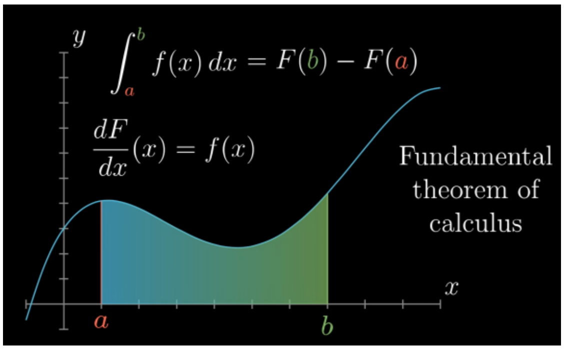


Nota: Font: Sanderson (2017d, 13m42s)

Tot això ens porta al teorema fonamental del càlcul, que relaciona de forma intrínseca la integració i la derivació.

Figura 49.

Visualització de la relació entre derivació i integració en el teorema fonamental del càlcul.

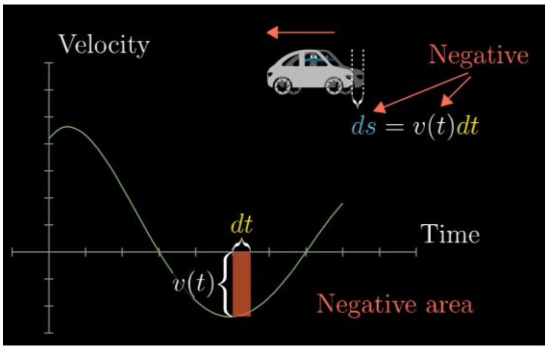


Nota: Font: Sanderson (2017d, 15m38s).

Un últim punt a considerar és el de les àrees negatives. En el nostre cas d'exemple, què passa si el cotxe fa marxa enrere? En aquest cas, és evident que podrem avaluar el canvi en la funció distància a través de l'àrea de la funció velocitat respecte l'interval de temps considerat. Tanmateix, com la velocitat és negativa, l'àrea considerada queda per sota de l'eix d'abscisses. Aquesta àrea, si l'avaluem amb una integral, resultarà negativa, la qual cosa respecta el fet que la distància recorreguda serà negativa. Així, la integral no avalua exactament l'àrea sota la corba, sinó l'àrea amb el seu signe corresponent.

Figura 50.

Visualització de l'àrea d'una funció amb valor negatiu.



Nota: Font: Sanderson (2017d, 18m22s).

4. Avaluació i resultats

En aquest projecte d'innovació es vol avaluar la proposta d'intervenció a partir de tres eines diferents. Per una banda, és important reconèixer si aquesta metodologia ha suposat un increment en la seguretat de l'alumnat a l'hora d'entendre els continguts. Per aquest motiu, es proposa la realització d'una autoavaluació mitjançant una rúbrica on l'alumnat mesurar la seva percepció respecte l'aprenentatge que ha assolit durant les classes.

En segon terme, és important avaluar l'aprenentatge de l'alumnat de forma objectiva. Aquesta avaluació es realitza mitjançant una prova en la que es valoraran només coneixements conceptuals i no pas operatius, degut a que l'enfoc d'aquest projecte i de la proposta d'intervenció van dirigides a un millor assoliment d'aquesta vessant del procés d'aprenentatge. Aquesta prova s'avalua a través d'una rúbrica en la que figuren els conceptes impartits en les intervencions proposades.

Aquest dos primers mètodes d'avaluació es consideraran tant en el grup en que es realitza la intervenció amb *Manim* com en el grup de control, per observar si hi han diferències significatives entre la metodologia que proposa aquest treball i el mètode tradicional.

En últim terme, es vol avaluar la predisposició i motivació de l'alumne envers l'eina d'innovació que es presenta, és a dir, quin és l'impacte emocional d'utilitzar aquesta metodologia envers la metodologia tradicional. Aquest últim aspecte s'avaluarà mitjançant una enquesta de satisfacció a l'alumnat que ha estat partícip de la intervenció.

4.1. Rúbrica d'autoavaluació

L'autoavaluació de l'alumnat és durà a terme mitjançant una rúbrica on apareixen els conceptes principals que s'han tractat en la proposta d'intervenció, separats en tres blocs: derivació i límits, integració i anàlisi diferencial.

Dins de cada bloc s'avaluen diferents indicadors, com figuren a la Taula 1. Els alumnes escolliran el nivell d'assoliment (expert, avançat i aprenent) de cadascun dels indicadors en funció de la seva seguretat envers el concepte estudiat.

Taula 1.

Rúbrica d'autoavaluació.

Elements d'avaluació	***Indicadors***	***Nivell d'assoliment***		
		Expert	***Avançat***	***Aprenent***
Derivació i límits	*Definició formal de la derivada d'una funció en un punt*	Entenc els conceptes implícits en la definició de la derivada i conec la seva expressió	Entenc els conceptes implícits en la definició de la derivada o conec la seva definició	No entenc els conceptes implícits en la definició formal de la derivada ni conec la seva definició
	Concepció geomètrica de la derivada d'una funció en un punt	Entenc amb quin element geomètric es relaciona la derivada d'una funció en un punt i les característiques que permeten construir-lo	Entenc de forma intuïtiva amb quin element geomètric es relaciona la derivada d'una funció en un punt	No entenc amb quin element geomètric es relaciona la derivada d'una funció en un punt
	Límit de la funció en un punt	Entenc com es relacionen els símbols ε i δ amb la definició de límit de la funció en un punt	Entenc de forma intuïtiva la definició de límit de la funció en un punt	No entenc el concepte de límit de la funció en un punt
	Regla de l'Hôpital	Entenc els conceptes relacionats amb la regla de l'Hôpital i la seva utilitat	Entenc els conceptes relacionats amb la regla de l'Hôpital o la seva utilitat	No entenc els conceptes relacionats amb el teorema de l'Hôpital ni la seva utilitat
Integració	*Integral definida com àrea sota una funció*	Entenc com es relaciona el concepte d'integral amb l'àrea sota la corba i com avaluar-la	Entenc com es relaciona el concepte d'integral amb l'àrea sota una corba de forma intuïtiva	No entenc com es relaciona el concepte d'integral amb l'àrea sota una funció
	Signe de les àrees a partir de la integral	Entenc quin signe tindrà l'àrea avaluada a partir de la funció que	Entenc quin signe tindrà l'àrea avaluada a partir de la funció que s'integra	No entenc quin signe tindrà l'àrea avaluada a partir de la funció que s'integra

		s'integra i com interpretar-lo		
	Integral com a eina de resolució de problemes complexos	Entenc la utilitat de la integral en problemes complexos en Matemàtiques	Entenc la utilitat de la integral en els problemes tractats a classe	No entenc quina utilitat té la integral
Anàlisi diferencial	*Teorema fonamental del càlcul*	Entenc quins conceptes relaciona el TFC i com els relaciona	Entenc quins conceptes relaciona el TFC però no com els relaciona	No entenc quins conceptes relaciona el TFC ni com els relaciona
	Concepte d'infinitèsim	Entenc el concepte dels infinitèsims: què representen i que no representen	Entenc de forma intuïtiva el concepte dels infinitèsims	No entenc el concepte dels infinitèsims

Nota: Elaboració pròpia.

4.2. Prova i avaluació objectiva

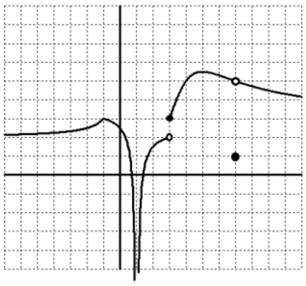
L'avaluació objectiva d'assoliment dels conceptes estudiats es realitza a través d'una prova consistent de 10 preguntes amb un enfoc purament conceptual sobre els continguts impartits a la proposta d'intervenció. L'absència de preguntes o exercicis operatius és deliberada, en tant que es vol estudiar l'efecte de la eina d'innovació en la part més feble d'aquesta part del currículum.

Les preguntes que apareixen a la prova figuren a continuació:

1) *Com relaciones la taxa de variació mitjana amb el concepte de la derivada?*
2) *Relaciona els conceptes de derivada i límit i enuncia la definició formal de derivada a través d'aquesta relació.*
3) *Quina relació tenen la derivada i la recta tangent a la funció en un punt? Fes un esquema on hi apareguin els elements que relacionen els dos conceptes.*
4) *Justifica la existència del límits de la funció següent en x=-1, x=1, x=3 i x=7.*

Figura 50.

Gràfica d'una funció amb discontinuïtats.



Nota: Font: Projecte Fressa (2015)

5) *Com podries avaluar el següent límit amb les eines que hem estudiat en aquesta unitat? Quina és la justificació matemàtica que permet aquesta regla?*

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln\,(x)}{sin\,(\pi x)}$$

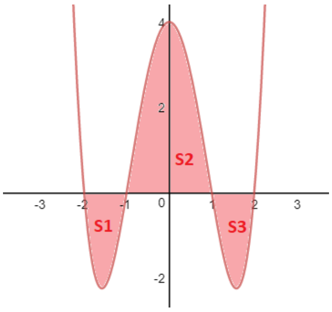
6) *La gràfica següent representa la funció $f(x)=x^4-5x+4$.*

   a) *Com es podrien avaluar el valor de les àrees representades (S1, S2, S3). Escriu-ne la expressió que utilitzaries per avaluar-les. Quin signe tindran aquestes àrees? Per què?*

   b) *Fes un esbós de la derivada d'aquesta funció.*

Figura 51.

Gràfica de la funció $f(x)=x^4-5x+4$ amb les àrees entre la corba i OX entre x=-2 i x=2 assenyalades.

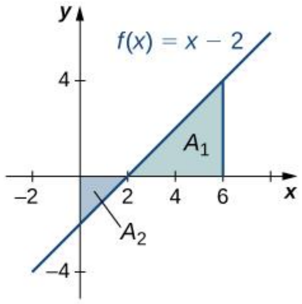


Nota: Font: Ekuatio (s.d)

7) *Fes un esbós de la funció primitiva de f(x)=x-2, representada a continuació.*

Figura 52.

Gràfica de la funció f(x)=x-2 amb les àrees entre la corba i OX entre x=0 i x=6 assenyalades.



Nota: Font: LibreTexts (2020)

8) *Enuncia el teorema fonamental del càlcul i explica quins dos conceptes relaciona i com.*

9) *Què entens pel concepte d'infinitèsim? Com es relacionen amb el concepte de derivada? I amb el concepte d'integral?*

10) *El treball que es fa sobre un objecte per l'efecte d'una força F constant que el desplaça una distància Δx és pot avaluar amb la expressió W=FΔx. Com podríem avaluar el treball si la força és variable respecte de la posició on s'aplica (per exemple, en una molla F=-kx)? Escriu la expressió que ens permetria avaluar el treball en el cas en que F=F(x).*

Aquesta prova de coneixements s'avalua per mitjà de la rúbrica d'avaluació inclosa en l'Annex I.

4.3. Enquesta de satisfacció

Per tal d'avaluar la predisposició i la motivació envers la eina d'innovació, es realitza una enquesta de satisfacció a l'alumnat. Aquesta part de l'avaluació és important per tal de valorar si *Manim* ajuda a l'alumnat a construir un enllaç emocional amb les Matemàtiques i, per tant, condueix a un aprenentatge significatiu.

Les preguntes de la enquesta figuren a continuació, presentaran cinc nivells de gradació, sent 5 totalment d'acord i 1 totalment en desacord:

1) Els coneixements previs eren suficients pel desenvolupament dels conceptes
2) L'ús de la visualització a través de la tecnologia va facilitar l'assoliment dels conceptes

3) Hi han conceptes que m'haurien estat molt difícils de comprendre amb un enfoc més tradicional

4) L'ús de la visualització a través de la tecnologia ha afavorit el meu interès per aquesta part del temari

5) M'agradaria que les classes de Matemàtiques incorporessin més sovint l'ús d'aquesta tecnologia

6) Les preguntes de la prova eren rellevants als conceptes estudiats en les sessions amb aquesta tecnologia

4.4. Anàlisi de resultats

Degut a motius relacionats amb la temporalització i la organització de la l'aula on s'havia de dur a terme la intervenció, ha estat impossible aplicar-la i, per tant, avaluar-ne els resultats.

5. Conclusions

A l'hora d'extreure conclusions sobre aquest treball, s'ha de considerar que la impossibilitat de poder realitzar les intervencions que es proposen limita l'acompliment dels objectius que s'havien plantejat a l'inici. Aquests objectius eren els següents:

- Constatar la importància de la visualització de les matemàtiques en la seva docència al Batxillerat
- Estudiar la viabilitat de *Manim* com una eina alternativa i suplementària per a la docència de les Matemàtiques al Batxillerat
- Avaluar l'impacte de l'ús d'animacions produïdes amb *Manim* en el l'aprenentatge de les Matemàtiques al Batxillerat

Respecte del primer, a través de l'estudi de la bibliografia al respecte de la visualització del coneixement i la visualització respecte la didàctica de les Matemàtiques, queda palès que la visualització és una peça essencial en qualsevol tipus d'educació. La visió és el sentit que rep primer els estímuls i, per tant, el portal d'entrada de qualsevol coneixement. Burkhard i Meier (2005) defensen que les representacions visuals complementen la tramesa de coneixement i recolzen l'aprenentatge i la comprensió dels conceptes. Malgrat la visualització queda relegada a un paper secundari durant el segle XX (de Guzmán, 1996), múltiples investigadors en didàctica de la Matemàtica, recolzant-se en psicòlegs rellevants, van focalitzar la visualització en el seu camp de coneixement a partir dels anys vuitanta i noranta. Des de llavors, la visualització es considera essencial per molts autors. Aprendre Matemàtiques, segons Duval (2006), implica reconèixer un mateix objecte matemàtic en es seves diferents representacions, i la visualització és clau en aquest sentit. Konalioglu et al. (2005) conclou que la visualització incrementa l'aprenentatge conceptual, i Arcavi (2003) argumenta que la visualització inspira solucions generals i creatives.

SI tenim en compte el context particular de Batxillerat, al currículum de Matemàtiques hi apareixen conceptes avançats, tals com el concepte de límit, la derivació i la integració (sobre els que tracta la proposta d'intervenció d'aquest treball), entre d'altres. El salt conceptual envers aquest conceptes és més senzill si es fa a través de la visualització. Tall (2009) identifica que la naturalesa dinàmica dels gràfics generats per ordinador permet la unió dels tres espai mentals de les matemàtiques: el món encarnat (conceptual), el món simbòlic (procedimental-proceptual) i el món formal (axiomàtic).

La visualització, per tant, permet sobretot construir ponts entre conceptes que faciliten el procés d'aprenentatge.

En relació al segon i al tercer objectius, aquest treball s'ha trobat amb la limitació de no haver pogut dur a la pràctica la proposta d'intervenció. Tanmateix, es valora positivament la possibilitat de dur-lo a la pràctica deguda la bona acollida dels vídeos que s'han adaptat per tal de construir l'esquelet i el cos de la intervenció. La sèrie de *Essence of Calculus* de *3Blue1Brown* compta amb més de 6 milions de visites a *Youtube*, i, en particular, els vídeos adaptats tenen una mitjana de visites per sobre dels dos milions. Tot i que aquestes dades no responen a la viabilitat didàctica de *Manim* a Batxillerat, sí que mostren un interès notable per aquest tipus de contingut.

A nivell d'opinió personal, la construcció d'animacions amb *Manim* toca molts dels punts en que els autors citats al marc teòric consideren que la visualització beneficia el procés d'aprenentatge. Si bé aquestes animacions no poden substituir altres metodologies d'ensenyament, poden participar d'una manera notable en la construcció de coneixement conceptual de les aules de Matemàtiques de Batxillerat.

6. Limitacions del treball

Al llarg del treball s'han trobat diverses limitacions de diferent naturalesa. Tot seguit, es consideren les limitacions intrínseques a la eina en que s'enfoca el treball i les limitacions extrínseques degudes als factors que han condicionat el desenvolupament del projecte.

6.1. Limitacions de la eina d'innovació

En primer terme, cal remarcar que *Manim* és una eina relativament nova i, per tant, es troba en un estat de desenvolupament embrionari. Com s'ha explicat en seccions anteriors d'aquest treball, *Manim* va néixer com a projecte personal de Grant Sanderson, i no ho va fer pensada en l'aplicació directa a l'aula sinó en la creació de contingut audiovisual de divulgació.

Aquest fet es tradueix en dos aspectes importants que limiten la seva aplicació a l'aula. Per una banda, el desenvolupament de *Manim* com a projecte multipersonal no comença fins el maig de 2020, així que porta només dos anys de desenvolupament en codi obert. El desenvolupament ha estat dut a terme per una comunitat que, malgrat gran dedicació i un nombre creixent de contribuïdors, no realitza aquesta tasca de forma professional.

D'altra banda, *Manim* no té interfície, sinó que basa la construcció de les seves animacions a través de compiladors de codi. Això presenta la necessitat de l'usuari de saber programar en *phyton,* o bé tenir nocions de programació i familiaritzar-se amb les eines específiques de *Manim* per poder construir-les.

6.2. Limitacions del projecte d'innovació

La limitació principal del projecte d'innovació ha estat la incapacitat de dur a terme la proposta d'intervenció a l'aula. El context d'intervenció de l'autor d'aquest treball era el centre de pràctiques on l'havien assignat en el marc dels estudis de Màster en els quals també s'emmarca aquest treball. La realitat de l'aula és sovint impredictible, i respon a factors que queden fora del control del professor titular i del mateix autor.

En aquest sentit, la temporalització de l'assignatura de Matemàtiques i altres factors externs van impossibilitar la realització de la proposta que s'havia projectat en aquest treball.

Un altra limitació d'aquest treball és la consideració d'una única eina d'innovació per l'aplicació de la visualització a l'aula. L'autor d'aquest treball considera que la visualització hauria de ser pal de paller en la ensenyança de les Matemàtiques a qualsevol nivell, i que la manipulació forma part d'aquest procés. *Manim* és una eina pensada per representar coneixement construït *a priori* de la intervenció, i no permet manipulació fora de la que hagi preparat el creador de les animacions. Seria interessant complementar l'aplicació de *Manim* amb eines de geometria dinàmica, com *Geogebra* o *Desmos*, que permetin la manipulació dels elements i conceptes matemàtics que s'haurien visualitzat prèviament amb *Manim*.

7. Línies prospectives per futurs projectes

Per encetar aquest apartat voldria assenyalar que una de les línies prospectives més evidents d'aquest treball seria la de poder portar-lo a la realitat de l'aula per poder avaluar la viabilitat i l'impacte de *Manim* de forma objectiva.

Al llarg d'aquest Màster, una de les coses que se m'han fet evident és la necessitat de l'educació d'aprofitar les eines tecnològiques i les innovacions metodològiques sempre que suposin una millora del procés d'aprenentatge de l'alumne, en el context concret en que desenvolupem la nostra tasca docent. Així, és important avaluar aquestes eines per valorar que produeixen un benefici real en l'alumnat. Estic convençut que *Manim* pot arribar a ser una eina interessant en molts aspectes, i la meva responsabilitat docent em conduirà en la meva futura etapa a posar-ho en pràctica per tal de constatar aquesta intuïció.

D'altra banda, *Manim* presenta una limitació evident com a eina docent del dia a dia, de la que s'ha parlat en l'anterior apartat. *Manim* presenta una corba d'aprenentatge pronunciada, deguda la seva naturalesa programàtica. Això implica que per tal de dur-lo a l'aula, els docents han de dedicar un temps i una dedicació que resulten prohibitius per la gran majoria.

Una línia a seguir per reduir aquesta limitació seria projectar una base d'animacions construïdes per un grup reduït de docents, que estigués oberta i abastés un nombre creixent de continguts del currículum de Matemàtiques d'ESO i Batxillerat. D'aquesta manera, la construcció de l'animació no estaria a càrrec del docent que l'aplica a classe, sinó que la podria utilitzar com a material per complementar la seva metodologia docent.

Un altra possible línia per reduir aquesta limitació seria projectar el desenvolupament d'una interfície per *Manim* que reduís la complexitat de la construcció de les animacions. Si bé amb tota probabilitat caldria una tasca de formació per part del docent, fer-lo més accessible el faria una eina més atractiva per una quantitat superior de professors. Aquesta possibilitat produiria una major riquesa d'animacions per la major quantitat de docents que construirien animacions amb *Manim*, que podrien compartir amb la resta del món docent i generar una comunitat oberta i cooperativa que milloraria la qualitat de *Manim*.

Finalment, *Manim* suposa una eina que, a hores d'ara, té una aplicació passiva de cara a l'alumnat. Malgrat la manipulació dels elements i la traducció entre registres semiòtics que pot incloure el docent en les seves animacions, no permet una interacció directa de l'alumnat amb aquests elements. Una línia a seguir per a futurs projectes és la combinació de l'ús de *Manim* per introduir conceptes de forma intuïtiva amb l'us d'eines de geometria dinàmica, com *Desmos* o *Geogebra*, que permetin a l'alumne gaudir d'un aprenentatge actiu assentat sobre una bona base conceptual.

Referències

Alsina, C., Burgués, C. i Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Arzarello, F., Ferrara, F. i Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 31*(1), 20-30.

Burkhard, R. (2004). Learning from architects: the difference between knowledge visualization and information visualization. Dins *IV '04: Proceedings of the Information Visualisation, Eighth International Conference* (pp. 519-524). IEEE Computer Society.

Burkhard, R. (2005). *Knowledge Visualization: The Use of Complementary Visual Representations for the Transfer of Knowledge (Tesi Doctoral, Swiss Federal Institute of Technology).* https://www.alexandria.unisg.ch/20993/1/burkhard_knowledge_visualization_dissertation_remo_burkhard.pdf

Burkhard, R. i Meier, M. (2005). Tube Map Visualization: Evaluation of a Novel Knowledge Visualization Application for the Transfer of Knowledge in Long-Term Projects. *Journal of Universal Computer Science, 11*(4), 473-494.

Christou, C., Jones, K., Pitta-Pantazi, D., Pittalis, M., Mousolides, N., Matos, J. F., Sendova, E., Zachariades, T. i Boytchev, P. (2007). Developing student spatial ability with 3 dimensional applications. Dins *5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* CERME.

Contreras, Á. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en Bachillerato y Universidad. *Revista de educación*(331), 399-419.

Contreras, Á., Ordoñez, L. i Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 28*(3), 367-384.

de Guzmán, M. (1996). El papel de la visualización. A *El Rincón de la Pizarra* (pp. 1-23). Pirámide.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM, 17*, 121-138.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. Dins *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 3-26).

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. Dins *Proceedings of the 24th Conference of the Inter-national Group for the Psychology of Mathematics Education (tome I)* (pp. 55-69). Hiroshima University.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131. zimm

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (2a ed.).* Universidad del Valle.

Ekuatio (s.d). *Propiedades de la integral definida. Ejercicios resueltos paso a paso.* *https://ekuatio.com/propiedades-de-la-integral-definida-ejercicios-resueltos-paso-a-paso/*

Eppler, M. (2003). The Image of Insight: The Use of Visual Metaphors in the Communication of Knowledge. Dins *I-KNOW '03: 3rd International Conference on Knowledge Management Conference Proceedings*, (pp. 82-88).

Eppler, M. i Burkhard, R. (2004). Knowledge Visualization: Towards a New Discipline and its Fields of Application. *ICA Working Paper, 2/2004*.

Eppler, M. i Burkhard, R. (2005). Knowledge visualization. Dins D. Schwartz (Ed.), *Encyclopedia of Knowledge Management*, 551-560.

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. Dins *Investigación en Educación Matemática XVII*, 19-42. SEIEM.

Fernández-Lázaro, Á. (2013). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato (Treball de Fi de Màster).* Universidad Internacional de la Rioja. https://reunir.unir.net/handle/123456789/1808

Fridman, L. [Lex Fridman] (2020, agost 24). *Grant Sanderson: Math, Manim, Neural Networks & Teaching with 3Blue1Brown | Lex Fridman Podcast #118*. Youtube. https://youtu.be/U_6AYX42gkU

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. Dins L. Puig i A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3-19.

Gutiérrez, Á. (2018). Part I Commentary 2: Visualization in School Mathematics Analyzed from Two Points of View. Dins K. Mix i M. Battista (Ed.), *Visualizing Mathematics. Research in Mathematics Education.* (pp. 165-169). Springer.

Hackl, B. (2022, març 3). *Hands-On Manim Workshop.* [Presentació]. https://benjamin-hackl.at/downloads/talks/2022-03-03-manimworkshop/#/1/2/2
Hershkowitz, R., Parzysz, B. i Van Dormolen, J. (1996). Space and Shape. Dins A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick i C. Laborde (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-204).
Herskowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. Dins P. Nesher i J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 70-95). Cambrige University Press.
Hoyos-Salcedo, E., Acosta, C., Aristizabal, J., Mesa, M., Trujillo, C., Rincón, J., Gutiérrez, A. i Jaime, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(49), 123-142.
Inglada, N. i Font, V. (2004). Análisis de las definiciones de derivada de una función en un punto y función derivada de una función de los libros de texto del Bachillerato-LOGSE de catalunya, aplicando la teoría de las funciones semióticas. Dins *Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, (pp. 191-203). Universidad de Jaén.
Institut Pons d'Icart (2021). *Projecte educatiu de centre 2021-2022*. [Arxiu PDF] Institut Pons d'Icart. https://agora.xtec.cat/insponsdicart/docs/pec/?bp-attachment=PROJECTE-EDUCATIU-DE-CENTRE-2021.pdf
Jones, K. i Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning Of Geometry. Dins A. Gutiérrez, G. Leder i P. Boero (Ed.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-152). Sense Publishers.
Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics. Dins D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). MacMillan.
Konyalioglu, S., Konyalioglu, A., Ipek, A. i Isik, A. (2005). *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-9.
LibreTexts (2020, desembre 21). *5.2: The Definite Integral.* *https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_210_Calculus_I_(Professor_Dean)/Chapter_5%3A_Integration/5.2%3A_The_Definite_Integral*
Monge, J. (2013). *Visualización del conocimiento como metodología en el aprendizaje y enseñanza de la matemática.* (Tesi doctoral, Universitat de València). http://hdl.handle.net/10550/27384
Mota, J. i Laudares, J. (2013). Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot. *Bolema, 27*(46), 497-512.
Pittalis, M., Mousolides, N. i Antreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3D geometry shapes. Dins C. Barcini, P. Fortin, A. Oldknow i D. Vagost (Ed.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* University of Metz.
Plasencia, I. d. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática: un estudio de casos.* (Tesi doctoral, Universidad de La Laguna). http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21266
Pratt, D., & Davidson, I. (2003). Interactive Whiteboards and the Construction of Definitions for the Kite. Dins N. Pateman, B. J. Dourgherty, & J. Zillox (Ed.), *Proceedings of the 27th PME International Conference, 4*, (pp. 31-38).
Projecte Fressa. [@totipm] (2015, febrer 24). #matemàtiques. El programa Funcions per a Windows pot dibuixar funcions definides a trossos. lagares.org. [Tweet]. Twitter. https://twitter.com/totipm/status/570137298412695553
Sanderson, G. [3Blue1Brown]. (2017a, abril 28). *The essence of calculus*. [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/WUvTyaaNkzM
Sanderson, G. [3Blue1Brown]. (2017b, abril 29). *The paradox of the derivative* | *Chapter 2, Essence of calculus*. [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/9vKqVkMQHKk
Sanderson, G. [3Blue1Brown]. (2017c, maig 4). *Limits, L'Hôpital's rule, and epsilon delta definitions* | *Chapter 7, Essence of calculus*. [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/kfF40MiS7zA
Sanderson, G. [3Blue1Brown]. (2017d, maig 5). *Integration and the fundamental theorem of calculus* | *Chapter 8, Essence of calculus*. [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/rfG8ce4nNh0
Sanderson, G. [Grant Sanderson]. (2021, octubre 14). *When do programmatic visuals help in understanding math? 3b1b, SIGGRAPH 2021 Featured Speaker* [Vídeo]. Youtube. https://youtu.be/gvck7ssg9dE
Sanderson, G. (2022a, maig 28). *Lesson: The essence of calculus*. https://www.3blue1brown.com/lessons/essence-of-calculus
Sanderson, G. (2022b, maig 28). *Lesson: The paradox of the derivative*. https://www.3blue1brown.com/lessons/derivatives
Sanderson, G. (2022c, maig 28). *Lesson: Limits and the definition of derivatives*. https://www.3blue1brown.com/lessons/limits

Sanderson, G. (2022d, maig 28). *Lesson: (ε, δ) "epsilon delta" definitions of limits*. https://www.3blue1brown.com/lessons/epsilon-delta
Sanderson, G. (2022e, maig 28). *Lesson: L'Hôpital's rule*. https://www.3blue1brown.com/lessons/l-hopitals-rule
Sanderson, G. (2022f, maig 29). *About*. https://www.3blue1brown.com/about
Sanderson, G. (2022g, maig 29). *Contact*. https://www.3blue1brown.com/contact
Sinclair, N. i Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching. Dins A. Gutiérrez, G. Leder i P. Boero (Ed.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 235-274). Sense Publishers.
Sinnet, S., Spence, C. i Soto-Faraco, S. (2007). Visual dominance and attention: The Colavita effect revisited. *Perception & Psychophysics, 69*, 673-686.
Soto Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible…. Dins *11th International Congress of Mathematics Education.* Universidad de Chile.
Spence, R. (2014). *Information Visualization: An Introduction (3a ed.).* Springer.
Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*(4) 481–492.
The Manim Community Dev Team (2022, abril 26). *Differences between Manim Versions*. https://docs.manim.community/en/stable/installation/versions.html
Torres, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *Revista Cubana de Información en Ciencias de la Salud, 20*(6), 161-174.
Ware, C. (2012). *Information Visualization Perception for Design (3ª. Ed.).* Morgan Kaufmann.
Zazkis, R., Dubinsky, E. i Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D 4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

Annex I: Rúbrica d’avaluació de la prova de coneixements

Elements d’avaluació	Indicadors	Nivell d’assoliment			Preguntes relacionades
		Expert	Avançat	Aprenent	
Derivació i límits	*Definició formal de la derivada d’una funció en un punt*	Relaciona el concepte de derivada d’una funció en un punt com amb la taxa de variació mitjana per un interval de la variable independent que tendeix a 0 i és capaç de definir-la mitjançant el límit	Relaciona el concepte de derivada d’una funció en un punt com amb la taxa de variació mitjana per un interval de la variable independent que tendeix a 0	Relaciona el concepte de derivada d’una funció en un punt com amb la taxa de variació mitjana	1,2
	Concepció geomètrica de la derivada d’una funció en un punt	Relaciona el concepte de derivada amb la recta tangent a la corba en aquest punt, entén la seva relació amb la pendent d’aquesta recta i sap interpretar les conseqüències a la funció	Relaciona el concepte de derivada amb la recta tangent a la corba en aquest punt i entén la seva relació amb la pendent d’aquesta recta	Relaciona el concepte de derivada amb la recta tangent a la corba en aquest punt	3,6b

	Límit de la funció en un punt	Comprèn el concepte de límit i és capaç de relacionar-lo amb els conceptes ε i δ segons la seva definició formal	Comprèn el concepte de límit, valorant la existència a través de les distàncies a la variable independent i a la imatge	Comprèn intuïtivament el concepte de límit com el valor de la imatge a la que s'apropa una funció per un valor de la variable independent	2,4
	Regla de l'Hôpital	Coneix la regla de l'Hôpital com a eina per resoldre límits, reconeix les indeterminacions pels quals és útil i sap com aplicar-la	Coneix la regla de l'Hôpital com a eina per resoldre límits i sap que està relacionada amb la derivada	Coneix la regla de l'Hôpital com a eina per resoldre límits, però no sap utilitzar-la	5
Integració	*Integral definida com àrea sota una funció*	Reconeix la relació de la integral amb l'àrea sota una funció i és capaç d'utilitzar la nomenclatura que permet calcular-la	Reconeix la relació de la integral amb l'àrea sota una funció	Reconeix la relació de la integral amb un àrea	6a
	Signe de les àrees a partir de la integral	Interpreta correctament el signe de la integral de les àrees avaluades mitjançant una integral de la funció i sap justificar-lo	Interpreta correctament el signe de les àrees avaluades mitjançant una integral de la funció	Interpreta que les àrees avaluades mitjançant una integral poden tenir signes diferents	6a

	Integral com a eina de resolució de problemes complexos	Relaciona la integral amb la resolució de problemes matemàtics que es beneficien de una gran suma de petites parts i sap utilitzar-la per trobar la expressió per resoldre'ls	Relaciona la integral amb la resolució de problemes matemàtics que es beneficien de una gran suma de petites parts	Relaciona la integral amb la resolució analítica de problemes de àrees	6a,10
Anàlisi diferencial	*Teorema fonamental del càlcul*	Identifica que la derivada i la integral son operacions inverses i és capaç d'enunciar el teorema fonamental del càlcul	Identifica que la derivada i la integral són operacions inverses	Identifica una relació entre la derivada i la integral	8
	Concepte d'infinitèsim	Identifica l'infinitèsim com la diferència entre els valors d'una variable quan aquesta tendeix a 0, i es capaç de relacionar-los amb el concepte de derivada i d'integral	Identifica la relació de l'infinitèsim amb els conceptes de derivada i integral i que la seva mida és molt petita	Identifica la relació de l'infinitèsim amb els conceptes de derivada i integral	9

Nota: Elaboració pròpia.