Columna de Trajano
Roma, 133 d.C.

Fecha recepción Receipt date 19/09/2016 Fechas evaluación Evaluation dates 27/10/2016 & 17/11/2016 Fecha aceptación Acceptance date 11/02/2017 Fecha publicación Publication date 01/06/2017

La espiral como vórtice imaginario de la arquitectura The Spiral as Imaginary Vortex in Architecture

Diego Cano-Lasso[1], Carmen Escribano[2], Juan Carlos Garro[1], José Rojo[1], Juan Tarrés [3] y Susana Victoria[1]

[1] Escuela Politécnica Superior, Universidad CEU San Pablo, Madrid

[2] Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad CEU San Pablo, Madrid

[3] Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid

Traducción Translation Diego Cano-Lasso Carretero

Palabras clave Keywords

Espiral, vórtice, imaginario, laberinto, trazado, Fibonacci, crecimiento, logarítmico, Teodoro

Spiral, vortex, imaginary, labyrinth, trace, Fibonacci, growth, logarithmic, Theodorus

Resumen

La espiral es un vórtice imaginario, un torbellino de impulsos y pasiones que traza complejos itinerarios. Itinerarios introvertidos o expansivos, de extensión limitada o de crecimientos logarítmicos ilimitados e infinitos.

La imaginación, desarrollada en espiral o con la espiral, puede ser plataforma de toda una clave de acción, incluso en la vida misma imbricada en turbulentos sentimientos y relaciones que pueden llevar hasta el crimen. Pero en este artículo nos centramos en la espiral y la arquitectura.

A lo largo del tiempo se han levantado edificios como interpretación directa del trazado y significado del símbolo de la espiral. Sin embargo, la arquitectura puede también releer esos trazados espirales para inventar otras posibilidades de construir imaginarios. Veremos cómo, pero antes haremos una introducción a la base de la investigación. En las cuartas Jornadas Internacionales *Matemáticas Everywhere*, celebradas en Castro Urdiales en junio de 2016, presentamos en primicia una nueva espiral logarítmica que plantea innovaciones matemático-geométricas. La comunicación se centraba en las leyes loxodrómicas de la espiral y en sus formulaciones matemáticas. En este artículo hemos creído conveniente asociar la espiral a los trazados arquitectónicos y por lo tanto, es un nuevo enfoque que desarrolla otro artículo diferente que trata de sugerir la forma de habitar, desplazarse y recorrer una concavidad. Tiene un doble objetivo: la presentación de la nueva espiral y la aplicación de este tipo de trazados a la arquitectura. Se analiza como a partir del trazado espiral determinados arquitectos han construido imaginarios y relaciones entre ellos, fuentes inspiradoras de nuevos trazados y relaciones.

Abstract

A spiral is an imaginary vortex, a whirlwind of impulses and passions that traces complex itineraries. Introverted or expansive itineraries, of limited extension or logarithmic growths, finite or infinite.

The imagination, developed in spiral or with the spiral, can act as the platform for a complete action, including the complex realm of emotions and relationships that might lead to crime. Nevertheless, this article focuses only on the spiral in architecture.

In history there are examples of buildings that have been erected as a direct interpretation of the trace and meaning of the spiral symbol. Nonetheless, architecture can also serve as a tool to reread those spiral traces and invent other possibilities of imaginary structures. We are going to analyze these, but first we are going to give an introduction to the base of this investigation: During the 4th International Convention *Mathematics Everywhere*, which took place in Castro Urdiales in July 2016, we presented for the first time a new logarithmic spiral that proposes mathematical and geometrical innovations. The communication focused on the loxodromic laws of the spiral and its mathematical formulations. In this article we have deemed important to link the spiral to the architectural traces and consequently it is a different article suggesting a new way of living, traveling and moving a concavity. Two goals: To present a new type of spiral and the application of these type of traces to architecture. It is analyzed how certain architects have constructed imaginaries and relations between them based in the spiral tracing, inspiring sources of new paths and relationships.

La espiral es un vórtice imaginario, un torbellino de impulsos y pasiones que traza diversos y complejos caminos para idear obras de arte, en general y literatura, arquitectura o matemática, en particular, con una nueva clave de modulación y ritmo. Ideaciones inspiradas y recorridas por una suerte de caminos introvertidos o expansivos; cóncavos o convexos; de extensión limitada y concreta o de crecimientos logarítmicos ilimitados e infinitos.

La imaginación desarrollada con la espiral, puede ser por tanto, plataforma de toda una clave de acción en diversos campos culturales, incluso en la vida misma imbricada en turbulentos sentimientos y relaciones que pueden llevar hasta el crimen pasional o al generalizado, en lo que comúnmente se denomina espiral de violencia. Centrémonos en la arquitectura, pero antes hagamos una introducción a la base de la investigación.

En la IV edición de las Jornadas Internacionales *Matemáticas Everywhere* celebradas en Castro Urdiales los días 17 y 18 de junio de 2016, presentamos en primicia una nueva espiral logarítmica que plantea innovaciones matemático-geométricas como en su día, salvando las distancias, plantearon Teodoro, Platón, Arquímedes, Ulam, Sacks, Fermat, etc. por medio de espirales por todos estudiadas. La comunicación se centraba en las leyes loxodrómicas de la espiral y en sus formulaciones matemáticas. En este artículo hemos creído conveniente asociar la espiral a los trazados arquitectónicos con un nuevo enfoque, eludiendo aspectos y formulaciones de la espiral creada.

Esta espiral nació de nuestra curiosidad geométrica y del interés por las proporciones, las matemáticas y de cómo éstas sirven en nuestro entorno universitario para establecer relaciones con otras áreas de conocimiento como la física, la hidráulica, la mecánica, la bioquímica y por supuesto, la arquitectura y la ingeniería. Estos desarrollos se piensa que son de gran utilidad para el progreso de otros campos científicos o profesionales, pues de ellos surgirán diversas aplicaciones y claves de relectura. Las relaciones establecidas serán la base de elaboraciones geométricas con fundamentos modulares de proporción y de medida, no solo en el campo de la arquitectura.

The spiral is an imaginary vortex, a whirlwind of impulses and passions tracing diverse and complex paths and creating, with a new modulation key and rhythm, art in general and literature, architecture or mathematics in particular. Ideations inspired and traveled by chance, of introverted paths or expansive, concave or convex of limited extension and actual or of logarithmic growth, limited or infinite.

Subsequently, the imagination developed with the spiral can serve as a platform for a key of action in diverse cultural fields, even in the realm of complex emotions and relationships that can lead to the generic or passion crime commonly known as spiral of violence. Lets focus in architecture, but first let's make an introduction to the base of the research.

During the 4th edition the International Convention *Mathematics Everywhere*, which took place in Castro Urdiales in July 2016, we presented for the first time to the public a new logarithmic spiral that proposes geometrical and mathematical innovations, like the ones proposed by Plato, Theodorus, Archimedes, Ulam Sacks, Fermat, etc. The communication focused on the loxodromic laws of the spiral and its mathematical formulations. In this article we have deemed important to associate the spiral to the architectural traces with a new focus, avoiding the aspects and formulations of the spiral itself.

This new spiral was born from our curiosity for geometry and our interest for the mathematical proportions and how this serves in our university environment to establish relations across different fields such as physics, hydraulics, mechanics, Aunque nos centraremos en la aplicación de la espiral en la arquitectura, antes haremos algunas consideraciones que en el mencionado congreso no se hicieron, que creemos importantes en la elaboración de espirales y explicaremos una vez más la construcción de la espiral innovada en nuestra universidad.

La progresión de esta espiral gira en torno a la proporción que se tiene como la más perfecta trazada por el hombre, la del número de oro, utilizada para levantar monumentos icónicos. El teorema *canophi* describe y define la formación, seriación y crecimiento de la progresión logarítmica de nuestra espiral de mismo nombre. Pero el trabajo geométrico quedaba incompleto sin una formulación matemática y a ello se debe la relación entre disciplinas y la formación de un equipo con el objetivo de desarrollar el trabajo con una base científica. Las conversaciones e interés común por el tema entre matemáticos y arquitectos han propiciado una serie de estudios que centran la investigación para relacionar esta espiral con otras espirales conocidas, para posteriormente hacer aplicaciones sobre la misma en el campo universitario y de la arquitectura, objetivo particular de este artículo. Este trabajo, finalmente, nos llevó a concluir con un desarrollo geométrico de proyecciones estereográficas que demuestran que los puntos de la espiral discreta inicial formarán parte de una loxodroma, aunque ese estudio no se explicita en este artículo por cuestión de extensión del texto.

Esta nueva espiral logarítmica resulta de un nuevo análisis basado en el número de oro que como es sabido, es el número emblemático de la llamada divina proporción. (1) Es un número irracional, representado por la letra griega φ (*phi*) o Φ (*Phi*) (en mayúscula), en honor al escultor griego Fidias. Esta proporción se encuentra tanto en figuras geométricas como en la naturaleza y su ecuación se expresa de la siguiente manera: $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803398874988\ldots$ o lo que es lo mismo, como sumatorio de dos términos constantes: $1/2$ y $\sqrt{5}/2$.

Una de las propiedades de perfección aritmética del número de oro es que su cuadrado ($\Phi^2 = 2{,}61803398874988\ldots$) y su inverso ($1/\Phi = 0{,}61803398874988\ldots$) tienen las mismas infinitas cifras decimales que el propio número. Al conte-

biochemistry and of course, architecture and engineering. These developments can be useful in the progress of other scientific fields, as diverse applications will emerge from the different interpretations. The established relationships will be the base for geometrical forms with modular fundamentals in terms of proportions and measurements, not only in the architectural field.

Although the focus here is in the application of the spiral to architecture, some considerations that were not made during the convention are important to remark at this point. These considerations are fundamental in the creation of spirals and will help in the explanation of the spiral created in our university.

The progression of this spiral revolves around the most perfect proportion ever traced by humankind, the golden ratio, used to create iconic monuments. The *canophi* spiral theory shares the formation and growth of the logarithmic progression with our spiral, but the geometrical work is incomplete as there is not a mathematical formula to explain it. The transversal knowledge shared by other disciplines can open new ways of understanding the spiral with a scientific base. The conversations and common interest for the subject shared by mathematicians and architects have started a series of studies that focus the investigation in relating this spiral with other known spirals and apply them in the architectural field. Finally, this work took us to conclude with the geometrical development of stereographic projections demonstrating that the points forming the initial spiral will be part of a loxodrome, although this is not reflected in this paper due to the extension of the text.

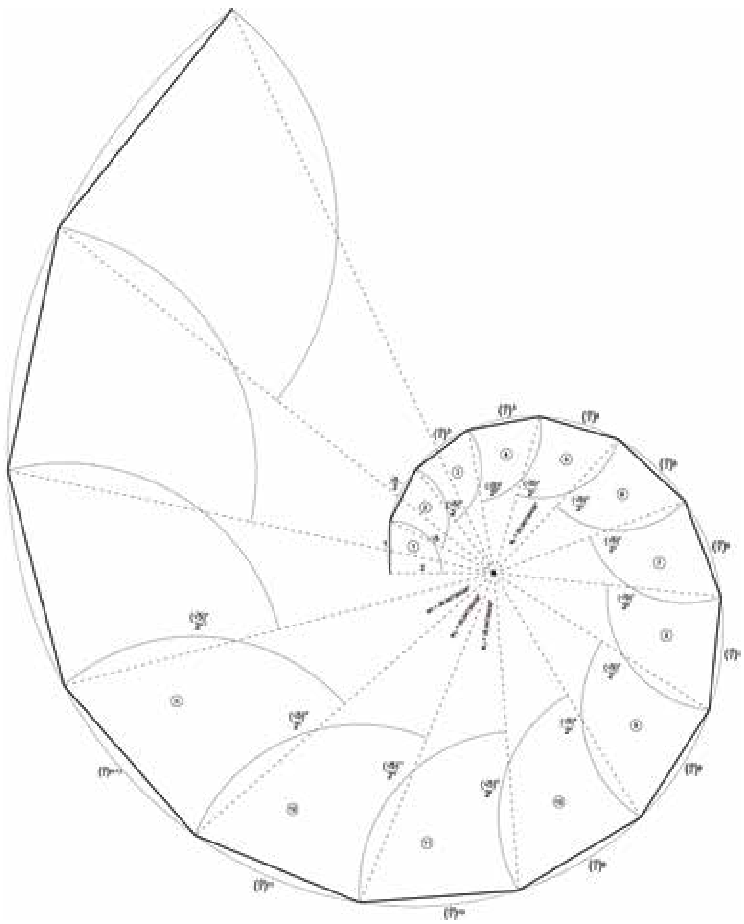


Fig. 1. Trazado de la espiral *canophi*.

The new logarithmic spiral is the consequence of a new study based in the golden ratio, which is commonly known as the emblematic number of the divine proportion. (1) It is an irrational number, represented by the Greek symbol φ (phi) or Φ (Phi) (in capital), in honor of Phidias the sculptor. This proportion is found in geometrical figures as well as in nature and the following represents its equation: $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803398874988\ldots$ It is the sum between two constant values: $1/2$ and $\sqrt{5}/2$.

One of the properties making the arithmetic perfection of the golden ratio is that its square value ($\Phi 2 = 2{,}61803398874988...$) and its inverse ($1/\Phi = 0{,}61803398874988...$) contain the same infinite decimal values than the golden value itself. The spiral we are presenting here contains, in its formation, the most significant value of the golden number *phi* $\sqrt{5}/2$ thus we have called it the *canophi* spiral. (Fig.1)

To build the spiral we start from a right triangle with sides of 1 and 2 in length respectively. Therefore, the hypotenuse is $\sqrt{5}$. We build an adjacent right triangle with long side the length of the hypotenuse of the initial triangle and the second side half length of the other side, like in the initial triangle. The process to build the consecutive adjacent triangles will be the same.

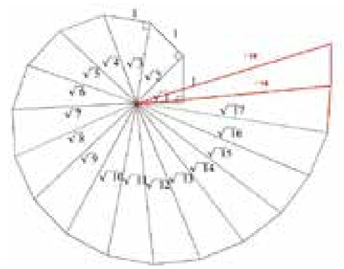
The spiral obtained from this process follows the same principle than the construction of the Theodorus Spiral (Fig. 2) (2) in which, starting from the isosceles right triangle with sides of length 1, consecutive scalene triangles are formed ner en su formación, esta espiral que presentamos, el término más significativo del número de oro, *phi* $\sqrt{5}/2$, se la ha denominado espiral *canophi.* (Fig. 1)

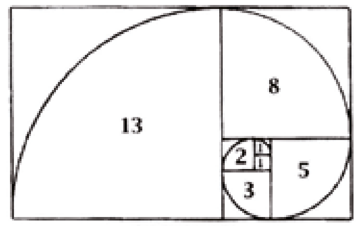
En su construcción partimos de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 1 y 2. Por tanto, su hipotenusa es $\sqrt{5}$. Construimos un triángulo rectángulo adyacente que tiene como cateto largo la hipotenusa del triángulo inicial y cuyo segundo cateto mide la mitad del primero, como en el primer triángulo construido. El proceso de construcción de los consecutivos triángulos rectángulos adyacentes será el mismo.

La espiral discreta así obtenida sigue el mismo principio de construcción de la espiral de Teodoro, (Fig. 2) (2) en la que partiendo de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitudes 1, se van formando triángulos rectángulos escalenos que tienen como cateto largo la hipotenusa del triángulo precedente y por otro cateto, siempre la longitud 1. Así, de las longitudes de las hipotenusas va resultando la progresión de todas las raíces cuadradas: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$,… $\sqrt{(17\ldots)}$. Esta sucesión de vértices de la serie de triángulos forman parte de una espiral de Arquímedes. A pesar de haberse perdido todas las obras de Teodoro, Platón en su diálogo Teeteto incluye referencias a él y a su trabajo, en el que se supone que demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas hasta la 17 por medio de la espiral.

Volviendo a nuestra espiral, queda enunciado el teorema *canophi* de la siguiente manera: en una serie de triángulos en los que la relación de catetos es 2:1 y a su vez, el cateto mayor es la hipotenusa del triángulo que le precede, se cumple en toda la serie de triángulos que cada uno de sus tres lados son los correspondientes del triángulo que le precede multiplicados por la constante $\sqrt{5}/2$, que es constante significativa del número de oro, siendo esta constante la diagonal del rectángulo formado a partir del medio cuadrado con lados 1 y 1/2 que sirve de base para la construcción geométrica del rectángulo áureo.

Es decir, la sucesión de longitudes de los catetos largos es: 2 , $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5})^2/2$, $(\sqrt{5})^3/2^2$, $(\sqrt{5})^4/2^3$, … $(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}$ y la de los catetos cortos 1, $\sqrt{5}/2$,





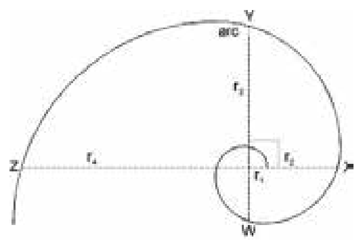


Fig. 2 (arriba). Espiral de Teodoro.
Fig. 3 (centro). Sucesión de Fibonacci
Fig. 4 (abajo). Espiral logarítmica de Fibonacci.

with the long side the length of the hypotenuse of the previous triangle and the other side always length 1. This way, the lengths of the hypotenuses results in the progression of all the principal square roots: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$,… $\sqrt{(17\ldots)}$. The sequence of vertices of the triangles forms an Archimedes spiral. Despite every work by Theodorus was lost, Plato in his dialogue Teeteto includes references to his work, in which he demonstrated through the spiral the irrationality of the first seventeen square roots.

Going back to our spiral, the *canophi* theorem is explained as follows: in a series of triangles in which the relation between the sides is always 2:1 and at the same time, the longest side is the hypotenuse of the preceding triangle, the constant in the series is that every side of all triangles is the length of the preceding triangle multiplied by the value $\sqrt{5}/2$. This value is also constant in the golden ratio. This constant also appears in the diagonal of the rectangle formed from the half square of sides 1 and 1/2 in length, that is the base for the geometrical construction of the square with a golden ratio.

That is to say, the sequence of lengths of the long sides is 2, $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5})^2/2$, $(\sqrt{5})^3/2^2$, $(\sqrt{5})^4/2^3$,… $(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}$… the sequence of the short sides is 1, $\sqrt{5}/2$, $(\sqrt{5}/2)^2$, $(\sqrt{5}/2)^3$, $(\sqrt{5}/2)^4$,… $(\sqrt{5}/2)^{(n-1)}$ and the sequence of the hypotenuses is $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5})^2/2$, $(\sqrt{5})^3/2^2$, $(\sqrt{5})^4/2^3$, …$(\sqrt{5})^n/2^{(n-1)}$... In order to angles: if φ_n is the angle of n-triangle (or spiral section), therefore: $\tan \varphi_n = (\sqrt{5}/2)^{(n-1)}/ [(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}]$. Therefore, angle φ_n of triangle n is: $\varphi_n = \arctan (\sqrt{5}/2)^{(n-1)}/ [(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}] = \arctan 2^{(n-2)}/2^{(n-1)} = \arctan ½ = 26º33’54”$. A logarithmic continuous spiral can interpolate the new vertices that form this spiral.

$(\sqrt{5}/2)^2$, $(\sqrt{5}/2)^3$, $(\sqrt{5}/2)^4$,… $(\sqrt{5}/2)^{(n-1)}$, mientras que la sucesión de las longitudes de las hipotenusas es: $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5})^2/2$, $(\sqrt{5})^3/2^2$, $(\sqrt{5})^4/2^3$, …$(\sqrt{5})^n/2^{(n-1)}$. En cuanto a los ángulos, si φ_n es el ángulo del n-ésimo triángulo (o sector de espiral), entonces: tan $\varphi_n = (\sqrt{5}/2)^{(n-1)}/[(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}]$. Por lo tanto, el ángulo φ_n del triángulo n es: φ_n=arctan $(\sqrt{5}/2)^{(n-1)}/[(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}]$ = arctan $[2^{(n-2)}/2^{(n-1)}]$ = arctan ½ = 26º33’54”. Los nuevos vértices que constituyen esta espiral discreta pueden ser interpolados por una espiral continua de tipo logarítmico.

Otras propiedades de crecimiento de la espiral *canophi* son las siguientes: el crecimiento del radio de la espiral hasta un cierto triángulo n es: Δ r= $[(\sqrt{5})^n/(\ 2^{(n-1)}\ )]$ - $[(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}]$. Las elaboraciones geométricas que pueden descubrirse con la aplicación del número de oro son de gran utilidad para el conocimiento de determinados órdenes que se producen en la naturaleza. Así, en la sucesión de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597…) (Fig. 3) (3) el cociente, en la sucesión creciente, entre dos términos consecutivos se va aproximando al número de oro, adquiriendo total exactitud en el límite infinito de la sucesión. Su representación geométrica es una espiral logarítmica. (Fig. 4) (3)

También la espiral de Ulam, (Fig. 5) (4) creada por el matemático Stanisław Ulam en 1963, que es una representación gráfica en forma de espiral cuadrada, sigue una determinada disposición de números y sirve para la representación de patrones y fractales de gran utilidad geométrica. Seleccionando solo los números primos, (4) Ulam descubrió que estos tendían a alinearse a lo largo de líneas diagonales mostrando una serie de patrones diferentes al disponerse numeraciones con más densidad en unas diagonales que en otras. (Figs. 6 y 7) (4)

Otra espiral, la de Sacks, (5) es una variante de la espiral de Ulam. Fue trazada en 1994 por Robert Sacks. Se diferencia de la espiral de Ulam en que los puntos se sitúan sobre una espiral de Arquímedes en vez de situarlos sobre una espiral cuadrada. Se parte del cero que se sitúa en el

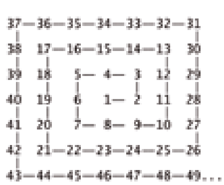
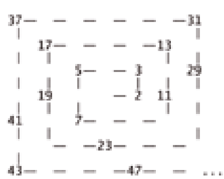
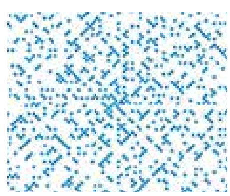
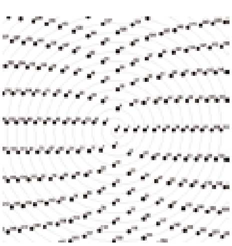
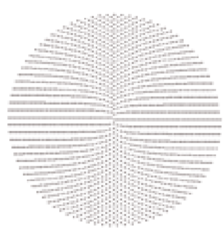




Fig. 5 (izquierda). Espiral de Ulam.
Figs. 6 y 7 (centro y derecha). Números primos a lo largo de diagonales mostrando una serie de patrones diferentes al disponerse numeraciones con más densidad en unas diagonales que en otras.


Figs. 8-10. Ejemplos de la espiral de Sacks mostrando ciertos patrones de números primos.

Diego Cano-Lasso, Carmen Escribano, Juan Carlos Garro, José Rojo, Juan Tarrés y Susana Victoria.
La espiral como vórtice imaginario de la arquitectura The Spiral as Imaginary Vortex in Architecture 223-237 pp.

centro del espiral. Algunas curvas que comienzan en el origen parecen tener una gran densidad de números primos; una de estas curvas, por ejemplo, contiene números del tipo $n^2 + n + 41$, que es un polinomio abundante en números primos que descubriera Leonhard Euler en 1774. [ver nota 5] (Figs. 8-10)

Un ejemplo de la presencia de estas curvas en el orden de la naturaleza nos lo ofrece la observación de los flósculos de un girasol, cuyas disposiciones siguen curvas direccionales de espirales de Sacks, cumpliendo la sucesión de Fibonacci. El girasol del gráfico contiene 55 espirales en sentido antihorario y 89 en sentido horario. Tanto el 55 como el 89 son números de la sucesión de Fibonacci. (6) En relación con lo anterior, el artista Damien Hirst construye una elaboración plástica de vórtices de puntos de colores en función de densidades, basada en la espiral de Sacks. (Fig. 11) Se presenta también otra gráfica de experiencia cinética (Fig. 12) (7) y la del diseño de la portada del álbum de Pink-Floyd. (Fig. 13)

Una espiral muy utilizada en trazados es la espiral de Fermat, (8) también conocida como espiral parabólica. Es una curva que responde a la siguiente ecuación: $r = \pm\theta^{1/2}$ siendo un caso particular de la espiral de Arquímedes. Tiene doble hélice y en ella se basan buena parte de los laberintos trazados en la historia. Por ejemplo, el trazado del mapa de Jericó del siglo XIV en la *Biblia Farhi* de Elisha ben Avraham Crescas, (Fig. 14) es una variante de la espiral de Fermat.

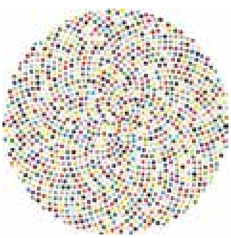


Fig. 11 (izquierda). Hirst, Damien: Elaboración plástica.
Fig. 12 (centro). Experiencia cinético-daltónica con espirales de Sacks.
Fig. 13 (derecha). Diseño para el álbum de Pink-Floyd.

Alternative growth properties of the canophi spiral are the following: the radius of the spiral grows up to a maximum n value of the triangle: $\Delta r= [(\sqrt{5})^n/(2^{(n-1)})] - [(\sqrt{5})^{(n-1)}/2^{(n-2)}]$. The geometrical growth that can be discovered by the application of the golden ratio can be very useful in the understanding of certain natural laws. In the Fibonacci sequence 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597… (Fig. 3) (3) the quotient in the growing sequence between two consecutive values tends to the golden value, reaching it in the infinite limit of the sequence. Its geometrical representation is a logarithmic spiral. (Fig. 4) (3)

In a similar logic, the Ulam Spiral (Fig. 5) (4) created by the mathematician Stanislaw Ulam in 1963 is a graphic representation of a square spiral that follows a specific arrangement of values and serves to the representation of patterns and fractals. Selecting just the prime numbers, (4) Ulam discovered that these tend to align around diagonal lines showing a series of different patterns due to the change of density around the diagonals. (Figs. 6 & 7) (4)

Another spiral, discovered by Sacks, (5) is a variant of the Ulam spiral. Robert Sacks traced it in 1994. The difference with the Ulam spiral is that Sacks places the values over an Archimedes spiral instead of using a square spiral. The start is the value zero, in the center of the spiral. Some curves which start in the origin appear to have a great density of prime numbers; one of these curves, for instance, contains numbers of the nature $n^2 + n + 41$ which is a common polynomial in prime numbers discovered by Leonhard Euler in 1774. (Figs. 8-10) [see note 5]

Aplicación arquitectónica. Presentada la espiral *canophi* y realizado un recorrido por una serie de elaboraciones matemáticas y de trazados de célebres geómetras en relación con la espiral, las seriaciones y la proporción, vamos a analizar como los arquitectos pueden también releer esos trazados, pues ciertas arquitecturas, quizás las de mayor contenido simbólico, se han basado en geometrías espirales para crear un repertorio inagotable de ideas y formas. La espiral, como vórtice imaginario, construye formas dinámicas y continuas de mucha trascendencia en la fluidez de la comunicación espacial. Las arquitecturas imaginadas con estos trazados definen, a su vez, imaginarios en la forma de habitar, desplazarse y recorrer. ¿Cómo habitar una concavidad deslizante, desplazarse por un *continuum* espacial o recorrer un museo de crecimiento ilimitado. Son aspectos concretos muy interesantes del imaginario arquitectónico.

Fig.14. Mapa de Jericó del siglo XIV.

Se han levantado edificios como interpretación directa del trazado y significado del símbolo de la espiral. Sin embargo, la arquitectura puede también basarse en esos trazados espirales para inventar otras posibilidades de construir imaginarios. Vamos a tratar de ofrecer respuestas positivas a las preguntas: ¿es la espiral un imaginario que construye arquitectura?, ¿cómo se reformula el imaginario espiral por medio de la arquitectura?

En relación con la primera pregunta podemos encontrar ejemplos de espiral con sentido directo del trazado y significado en arquitecturas de la antigüedad, reinterpretando los zigurats babilónicos –como el alminar de 55 metros de altura de la Mezquita de Samarra en Iraq, (Fig. 15) construida en el año 852– o en visiones bíblicas como la tan representada y mítica Torre de Babel, en su versión de hélice simple o en la de doble hélice.

Posteriormente muchos arquitectos han utilizado el imaginario de la espiral como vórtice energético y pasional de generación de la idea, empleando la expresión del croquis inicial como primera intuición de una arquitectura que conquistando un centro gravitacional de energía, se desplaza y dilata paulatinamente como una onda expansiva. Los primeros croquis de la Endless House de Kiesler o de Pietilä para la Biblioteca Tampere (Fig. 17) son ejemplos

An example of the presence of these curves in the natural order is the floret of a sunflower, which's organization follows directional curves of Sacks spirals, meeting the Fibonacci rules. The sunflower of the image below contains 55 spirals anticlockwise and 89 spirals clockwise. Both the 55 and 89 are numbers of the Fibonacci series. (6) In relation with the above, the artist Damien Hirst designed an image of vortices of color dots, following densities and based on the Sacks spiral. (Fig. 11) We are showing a kinetics image (Fig. 12) (7) and another designed for a Pink Floyd album. (Fig. 13)

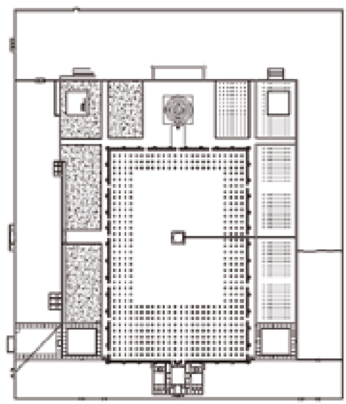
A very used spiral in patterns is the Fermat spiral, (8) also known as the parabolic spiral. It is a curve that follows the equation: $r = \pm\theta^{1/2}$ this being a particular variation of the Archimedes spiral. It contains a double helix and many labyrinths are based on it. For instance, the tracing of the Jericho map from 14th century in the *Farhi Bible* of Elisha ben Avraham Crescas (Fig. 14) is a variation of the Fermat spiral.

Architectural Application. Having presented the *canophi* spiral and gone through a series of mathematical equations related to the spiral by celebrated mathematicians, we are going to analyze how architects can also reinterpret these patterns, as sometimes architecture, specially the symbolic architecture, follows spiral geometries to form a never-ending library of ideas and forms. The spiral, as an imaginary vortex, builds dynamic and continuous forms of big transcendence in the fluidity of spatial communication. The imagined architectures through these patterns define at the same time new ways of inhabiting, moving and displacing. How to inhabit a sliding concavity? How de movimientos centrífugos de la espiral clásica, donde la energía se expande hacia el exterior de la forma.

Sin embargo, como ya se ha dicho, la arquitectura puede distorsionar o releer esos trazados espirales para inventar nuevas posibilidades de construir imaginarios. Giusseppe Terragni, en el Danteum traduce en arquitectura la estructura y contenido del poema de Dante *La Divina Comedia*, y lo hace formulando analogías entre el monumento arquitectónico y la obra literaria, a través de estancias que se refieren al infierno, purgatorio y paraíso del poema, presentando el desarrollo ascensional con base en el número de oro y las proporciones que genera. El recorrido tiene un trazado de espiral cuadrada *sui generis* y es un caso en el que la arquitectura reformula y retroalimenta el imaginario espiral, realizando una metáfora construida de una obra literaria. No es muy habitual que la metáfora sea imagen real de lo irreal o imaginado; habitualmente sucede lo contrario.

En el proyecto Diez viviendas para artistas (Fig. 18) de Fernando Higueras, la espiral queda disuelta en fragmentos de segmentos concretos y limitados, como si de una implosión de energía de un núcleo central se tratara. Recuerda conceptos que utiliza Paul Klee para definir la posición relativa y marcas de densidades de puntos en el espacio, teorías de tanta influencia en el campo arquitectónico. También es interesante la nueva interpretación de la espiral cuadrada de Ulam que plantea Sou Fujimoto en la Biblioteca de Musashino, (Fig. 19) recreando el espacio continuo e infinito del teórico Museo de Crecimiento Ilimitado de Le Corbusier, estudio que el propio Le Corbusier lleva a la práctica en el Museo Nacional de Arte Occidental de Tokio, un hermoso espectáculo de claridad en su recorrido. Pero a diferencia del museo de Le Corbusier, Fujimoto fragmenta los muros de estanterías de libros intermitentemente, al igual que hizo Higueras, lo que permite desplazamientos libres en otras direcciones, además del propio de la espiral que ofrece un juego de dilataciones y compresiones que desvirtúan las ortogonalidades, pero sin llegar a un planteamiento orgánico. En estas obras se observan también ciertas relaciones con el Danteum. La tendencia y ley de crecimiento de esas referencias, basadas en la sucesión de Fibonacci y en la proporción áurea, contrastan radicalmente con la posición espacial de la *Casa*

Fig.15 Mezquita de Samarra. Planta



to move along a spatial *continuum*? How to follow a museum of unlimited growth? These are specific aspects of the architectural imaginary.

Buildings have been erected as a direct interpretation of the meaning and pattern of the spiral. Nevertheless, architecture can also be based on these spiral patterns to invent other imaginary construction possibilities. Let's try to offer positive answers to the questions: is the spiral an imaginary that builds architecture? How can the spiral imaginary be reformulated through architecture?

In relation to the first question, we can find examples of the spiral, with direct link to its tracing and meaning, in ancient architecture. A good example of this is the Babylonian Zigurats like the alminar of 55 meters in height. Also in this category, the Samarra Mosque in Irak (Fig. 15) built in 852 A.C. as well as the Babel Tower as a simple or double helix.

Architects have commonly used the imaginary of the spiral as energetic vortex to generate ideas. These ideas often start in the sketch of a spiral. The line traced by the architect evolves around a gravitational vortex; displacing and expanding like a wave. The initial sketches for the Endless House made by F. Kiesler or the ones for the Tampere Library by Pietilä (Fig. 17) are examples of centrifugal movements of the classic spiral in which the energy expands towards the exterior of the form.

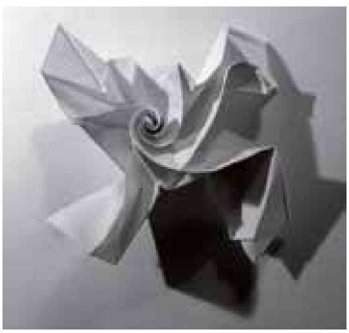
girando en el espacio (Fig. 20) de Klee, torbellino que revolotea libremente sin ser sus transparencias y densidades del todo ajenas al punto central de máxima energía de una espiral y a la obra de Higueras.

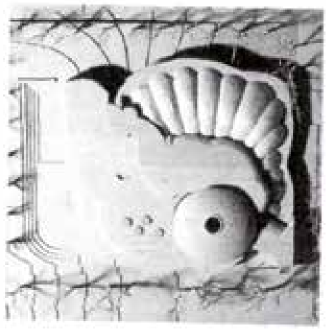
Habitar la concavidad de una espiral ha sido un recurso utilizado en algunas ocasiones, quizás como imitación de lo que sucede en la naturaleza con los gasterópodos. El Apartamento evolutivo en espiral, (1965) (Fig. 21) de Guy Rottier es una idea teórica de este propositivo arquitecto y la Casa para los artistas Eugene y Nancy Bavinger (1950-55) en Oklahoma, de Bruce Goff, una propuesta construida; es el caso de dos arquitecturas habitando con máxima introversión una concavidad.

La convexidad se habita de otro modo, al otro lado del muro que limita con la concavidad. Entonces surgen crecimientos o añadidos a la forma global como prótesis parasítica. Pueden ser ejemplos de apropiarse de la convexidad, las casas en Phoenix, Arizona, (1950) (Figs. 22) de Frank Lloyd Wright que, no siendo ejemplos exactos de una espiral, pueden compartir leyes de un trazado limitado o fragmentado de ella.

La espiral también nos remite al laberinto con hermosos trazados asociados a jardines históricos, como el del Chateau de Choisy; a elementos

Fig. 17. Pietilä, R. Biblioteca Tampere.
Fig. 18. Higueras, Fernando: Diez viviendas para artistas.
Fig. 19. Fujimoto, Sou. Biblioteca de Musashino.



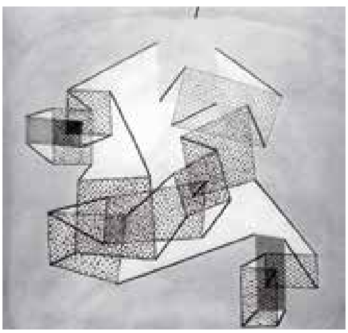


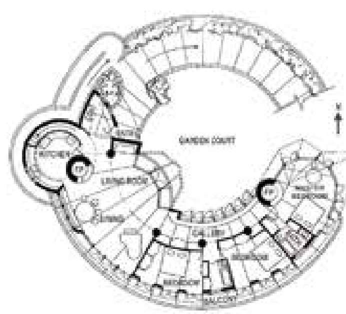
Despite these obvious connections, architecture can distort or serve as interpretation of spiral patterns to invent new ways of building. Terragni, in the Danteum translates to architecture the structure and content of a Dante poem, the *Divine Comedy*; and he does it formulating analogies between the architectonic monument and the literary piece through spaces that relate to hell, purgatory and paradise, presenting the ascension based in the golden ratio. The spiral path is square *sui generis* and it is an example in which architecture reinvents the spiral through a metaphor built from a literary piece. It is not common for the metaphor to become the image of the real or surreal or imaginary, normally it is the other way around.

In the project for Ten Dwellings for Artists (Fig.18) by Higueras, the spiral is dissolved in fragments of specific limited segments, as the result of an implosion of energy from a central core. It resembles concepts used by Klee to define the relative position and stakes of densities in space, theories of influence in the architecture field. Also interesting is the new interpretation of the square spiral of Ulam posed by Fujimoto in the Musashino Library, (Fig. 19) recreating the continuous and infinite space of Le Corbusier's Unlimited Growth Museum, which Le Corbusier himself puts into practice at the National Museum of Western Art in Tokyo, a beautiful spectacle of clarity in its journey. But unlike Le Corbusier's museum, Fujimoto fragments the walls of bookshelves intermittently, as Higueras did, which allows free movement in other directions, in addition to the spiral itself, which offers a set of dilations and compressions that distort the orthogonalities, but without arriving at an organic approach. In these works, also, certain relations with the Danteum are observed. The tendency and law of growth of these references, escultóricos como el Laberinto de la Trienal de Milán (Fig. 23) o al laberinto psicológico que recrea Stanley Kubrick en la película *El resplandor*. Si consideramos elementos arquitectónicos concretos, como pueden ser las rampas —mecanismos efectivos de máxima fluencia de comunicación continua— apreciamos que su dinamismo se asocia fácilmente al movimiento en espiral. Ejemplos de ello son la Torre-Garaje de doble hélice y forma cónica de Buckminster Fuller, proyecto de 1927; el Terminal de la TWA, de Eero Saarinen o el Ayuntamiento de Londres, de Norman Foster. También el monumento escultórico de Tatlin, dedicado a la III Internacional, se apoya en dos trazados helicoidales. Muchos otros ejemplos valiosos como el Museo Guggenheim de Nueva York o la joyería en San Francisco de Wright pueden ilustrar estos trazados.

También pueden sugerirse efectos giratorios por medio de ciertas operaciones, en formas con las mismas cualidades en distintos ejes, adosando piezas tangencialmente o haciéndolas cabalgar sobre la estática forma concéntrica inicial. O recurriendo a penetraciones tangenciales o radiales insertadas en orientaciones opuestas. Con estos y otros mecanismos se acentúa el dinamismo y puede convertirse una forma isótropa en una forma deslizante y giratoria, tensionada por un juego de tracciones. Arne Jacobsen y Fleming Lassen, manejando estos recursos en la Casa del Futuro

Fig. 20. Klee, Paul: *Casa girando en el espacio*. 1930.
Fig. 21. Rotter, Guy: Apartamento Evolutivo en Espiral.
Figs. 22. Lloyd Wright, Frank: Casas en Phoenix, Arizona, (1950).





based on the succession of Fibonacci and the golden ratio, contrast radically with the spatial position of *House Spinning in Space* (Fig. 20) of Klee, a whirlwind that flutters freely without its transparencies and densities being entirely alien to the central point of maximum energy of a spiral and to the work of Higueras.

To inhabit the concavity of a spiral has been a resource sometimes used, perhaps as an imitation of what happens in nature with the gastropods. Guy Rottier's Evolving Spiral Apartment (1965) (Fig. 21) is a theoretical idea of this proposing architect and the House for artists Eugene and Nancy Bavinger (1950-55) in Oklahoma, by Bruce Goff, a built proposal; are the cases of two architectures inhabiting a concavity with maximum introversion.

The convexity is otherwise inhabited, on the other side of the wall that borders with the concavity. Then growth or added to the global form as a parasitic prosthesis. Examples of convexity may be the houses in Phoenix, Arizona, (1950) (Fig. 22) of Wright, which is not the exact example of a spiral but it can share laws of a limited or fragmented tracing of it.

The spiral also leads us to the labyrinth with beautiful tracings associated with historic gardens such as the Chateau de Choisy, sculptural elements such as the Labyrinth of the Milan Triennale (Fig. 23) or the psychological labyrinth that Stanley Kubrick recreates In the film *The Shining*. If we consider concrete architectural elements, such as ramps, effective mechanisms of maximum flow of continuous communication, we appreciate that its

Fig. 23. Laberinto de la Trienal de Milán.
Fig. 24. Hadid, Zaha: Pabellón de Música Bach en Manchester.

(1927), reproducen con sencillez el efecto dinámico de una espiral en una forma circular.

Ya con las leyes de la espiral, en el Pabellón de Música Bach en Manchester (Fig. 24) Zaha Hadid —arquitecto que ha interpretado siempre en su obra el movimiento continuo como lazo de conexión— se plantea una escenografía que recrea el movimiento espiral con arquitectura textil. Pero es tanta la importancia de la espiral, que hasta forma parte de la estructura del ADN y al igual que éste contiene las instrucciones genéticas del desarrollo y funcionamiento de todos los organismos vivos, la espiral, como tal, puede contener las instrucciones sobre todo lo que concierna al movimiento y al dinamismo. La estructura de doble hélice que descubrieran Watson y Cric ha servido para hacer analogías arquitectónicas como la mencionada Torre garaje de Fuller o la cúpula del Reichstag de Foster. (Fig. 25) El mismo Modulor de Le Corbusier se construye con dobles hélices que siguen proporciones áureas en las series roja y azul. También un vacío dilatado con conexiones dinámicas de doble hélice es el concepto del Museo de la Memoria (Fig. 26) en Granada, de Campo Baeza, inspirado a su vez en la Casa de los pingüinos del Zoo de Londres de Lubetkin.

Con este recorrido arquitectónico se ha pretendido esbozar, con las limitaciones de la extensión de un artículo, cómo habitar una concavidad deslizante o desplazarse por un *continuum* espacial y siempre la espiral, de una u otra manera es la base de los trazados expuestos.

dynamism is easily associated with the spiral movement. Examples are the double helix and conical Garage Tower by Fuller, a 1927 project, the TWA Terminal by Saarinen or the London City Council by Foster. Also, the sculptural monument of Tatlin, dedicated to the III International, relies on two helical paths. Many other valuable examples such as the New York Guggenheim or the Jewelry Store in San Francisco by Wright can illustrate these tracings.

Rotating effects may also be suggested by certain operations in shapes with the same qualities on different axes. Attaching pieces tangentially or making them ride on the static concentric initial shape. Or by using tangential or radial penetrations, inserted in opposite orientations. With these and other mechanisms the dynamism is accentuated and an isotropic shape can be converted into a sliding and rotating shape, tensioned by a set of traction. Arne Jacobsen and Fleming Lassen, handling these resources in the House of the Future (1927), reproduce with simplicity the dynamic effect of a spiral in a circular form.

Already with the laws of the spiral, in the Bach Music Pavilion, in Manchester, (Fig. 24) by Zaha Hadid –an architect who has always interpreted in her work the continuous movement as a connection– a scenario is created that recreates the spiral movement with textile architecture. But the importance of the spiral is so great that it takes part in the structure of the DNA, and just as this structure contains the genetic instructions for the development and functioning of all living organisms, the spiral as such may contain the instructions on everything that concerns the movement and the dynamism. The double-

Conclusión. Para concluir y a modo de ensayo, vamos a tratar de manifestar en cuatro pasos la retroalimentación entre espiral y arquitectura. Goldschmidt, conocida como Gego, hilvana casi de cualquier manera una espiral conceptual, marcando puntos en el plano en disposición cartesiana. (Fig. 27) Intencionadamente hemos elegido este punto de partida, aparentemente muy trivial. Ya Klee o Bruno Munari hicieron experiencias previas muy enriquecedoras con trayectorias de puntos o alrededor de ellos. El plano formado por Gego es un tapiz espacial, un cuadrilátero en el que, como en el boxeo, pueden producirse acciones espaciales inesperadas, desplazamientos, giros, elongaciones, movimientos en espiral ascendentes o laterales, como un gancho al mentón o *crochet* de izquierda, siguiendo el símil pugilístico. El plano se termina colmatando de vectores quedando limitado, es decir inservible para generar nuevas acciones; entonces se rasga el lienzo, como hace Fontana para que aparezca la profundidad en tercera dimensión, de manera que esos movimientos, unidos al tiempo, queden traducidos en el espacio con un carácter laberíntico y ciertamente azaroso; con lenguaje propio de artista, es decir, de metáfora sugerente de la acción, en este caso de Shohei Matsukawa. A continuación, el arquitecto o el ingeniero elabora la metáfora escultural en una forma pura y útil. Ordena con leyes y ritmos el espontáneo y primitivo crecimiento anterior, lleno de potencialidad, y lo convierte en otra bella forma que asciende helicoidalmente en el espacio, ya sin interrupciones, formalizando lo que puede ser la Torre de Comunicaciones de Suchov, traducción de un

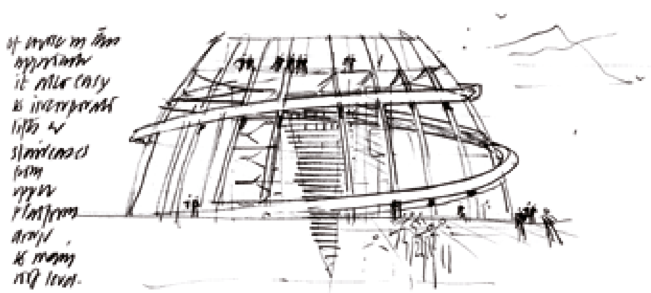


Fig. 25. Foster, Norman: Cúpula del Reichstag.

helix structure discovered by Watson and Cric has served to make architectural analogies such as the aforementioned Fuller's Garage Tower or tor Foster's Reichstag Dome. (Fig. 25) Even Le Corbusier's the Modulor is built with double propellers that follow golden proportions in the red and blue series. Also a dilated void with dynamic double-helix connections is the concept of the Museum of Memory (Fig. 26) in Granada by Campo Baeza, inspired in turn by the Penguin House at the London Zoo by Lubetkin.

This architectural route has attempted to sketch, with the limitations of the extension of an article, how to inhabit a sliding concavity or to move by a spatial *continuum*. And always the spiral, in one way or another, is the basis of the exposed paths.

Conclusion. To conclude and as an essay, we will try to manifest in four steps the feedback between spiral and architecture. Goldschmidt, known as Gego, loosely stitches, almost in any way, a conceptual spiral marking points in the Cartesian plane. (Fig. 27) We have intentionally chosen this seemingly trivial point of departure. Already Klee or Bruno Munari made previous experiences very enriching with trajectories of points or around them. The plane formed by Gego is a space tapestry, a quadrilateral in which, as in boxing, unexpected spatial actions may occur, displacements, spins, elongations, spiraling, ascending or lateral movements, such as a chin hook or left crochet, following the pugilistic simile. The plane ends up collapsing with vectors and becoming limited, that is unusable to generate new actions; then the canvas is torn, as Fontana does so that depth appears, in third dimension, so that these movements, linked to time, are translated into space with a

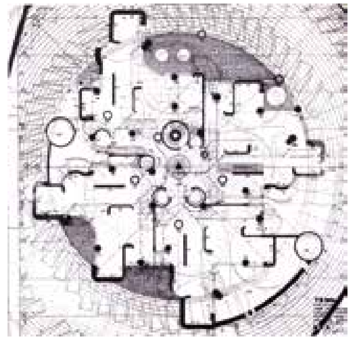


Fig. 26 (izquierda). Campo Baeza, Alberto: Museo de la Memoria en Granada.
Fig. 27 (centro). Matsukawa, Shohei. *Algorithmic Space.*
Fig. 28 (derecha). Saénz de Oíza, Francisco Javier: Torres Blancas.

crecimiento espiral convulso y apasionado en ordenada y limpia estructura de máxima eficacia mecánica. Pero la arquitectura puede también distorsionar o releer el trazado espiral para inventar nuevos imaginarios espaciales. Saénz de Oíza en Torres Blancas (Fig. 28) reelabora el torbellino de la espiral con pequeños vórtices giratorios para conformar una constelación de imantaciones con formas circulares y orgánicas apoyadas en trazos rectos. El arquitecto ha reinterpretado el imaginario espiral en un mundo limitado, dinámico y orgánico en el que todo tiene capacidad de girar y desplazarse, hasta encontrar el perfecto equilibrio y acomodo de la forma. Se vuelve a reconquistar el plano y el círculo casi se cierra.

La arquitectura devuelve la metáfora con un concepto funcional, a la espiral hilvanada que la inspiró. Con estos ejemplos se puede constatar que la espiral es un imaginario que construye arquitectura y ésta, a su vez, en muchos casos reformula el imaginario espiral apareciendo interpretaciones muy sugerentes que desencadenan un sinfín de acciones en otros campos.

¿No hay en el *Laocoonte* de El Greco un vórtice continuo de elaboraciones en espiral?

labyrinthine and certainly random character; with an artist's own language, that is, a suggestive metaphor of action, in this case Shohei Matsukawa. Next, the architect or the engineer elaborates the sculptural metaphor in a pure and useful form. He orders, with laws and rhythms, the spontaneous and primitive previous growth, full of potentiality and turns it into another beautiful form that ascends helically in space, without interruptions, formalizing what may be the communications tower of Suchov translation of a convulsive and passionate spiral growth in an orderly and clean structure of maximum mechanical efficiency. But architecture can also distort or reread the spiral pattern to invent new spatial imagery. Saénz de Oíza in Torres Blancas (Fig. 28) reworked the whirlwind of the spiral with small rotating vortices to form a constellation of magnetizations with circular and organic shapes supported in straight lines. The architect has reinterpreted the imaginary spiral in a limited, dynamic and organic world in which everything has the ability to rotate and move to find the perfect balance and accommodation of form. The plane is conquered and the circle is almost closed.

The architecture returns the metaphor, with a functional concept, to the spiral that inspired it.With these examples we can see that the spiral is an imaginary that builds architecture and this, in turn, in many cases reshapes the imaginary spiral creating very suggestive interpretations that trigger an endless number of actions in other fields.

Is there a continuous vortex of spiral elaborations in the *Laocoon* of El Greco?

NOTAS

1. HEMENWAY, P. *Divine Proportion: θ Phi in Art, Nature, and Science.* Sterling Publishing Co., 2005.
2. Gráfico extraído de [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Teodoro].
3. Gráfico extraído de [https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesión_de_Fibonacci].
4. Gráficos extraídos de [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam].
5. Gráficos extraídos de [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Sacks].
6. Gráfico extraído de GARDNER, Martin. *Circo Matemático*.
7. Gráfico extraído de [https://chromaticspiral.wordpress.com/tag/daltonism/].
8. Gráfico extraído de [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Fermat].

NOTES

1. HEMENWAY, P. *Divine Proportion: θ Phi in Art, Nature, and Science.* Sterling Publishing Co., 2005
2. Extracted from [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Teodoro].
3. Extracted from [https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesión_de_Fibonacci].
4. Extracted from [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam].
5. Extracted from [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Sacks].
6. Extracted from GARDNER, Martin. *Circo Matemático*.
7. Extracted from [https://chromaticspiral.wordpress.com/tag/daltonism/].
8. Extracted from [https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Fermat].

REFERENCIAS

Actas 4as Jornadas Internacionales *Matemáticas Everywhere*. Celebradas el 17 y 18 de junio 2016.

BRUCE, J.W.; GIBLIN, P.J. *Curves and singularities*. Cambridge University Press, 1992.

BURGIEL, H.; SALOMONE, M. 'Logarithmic Spirals and Projective Geometry in M.C.Escher's 'Path of life III''. *Journal of Humanistic Mathematics*, Vol.2 No.1, enero 2012.

COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons (Segunda Edicion).

DAVIS, J.P. *Spirals from Theodorus to Chaos*. Wellesley, Massachusetts: A.K. Peters, Ltd., 1993.

GARDNER, M. *Circo matemático*. Alianza Editorial, 1995.

GRIFFING, Steven L. *The Golden Section: an Ancient Egyptian and Grecian Proportion*. Nueva York: Elsevier, 2007.

HEMENWAY, P. *Divine Proportion: θ Phi in Art, Nature, and Science.* Sterling Publishing Co., 2005

MAINZER, Klaus. *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science.* Walter de Gruyter, 1996

MARCOTTE, J.; SALOMONE, M. 'Loxodromic Spirals in M.C.Escher's Sphere Surface'. *Journal of Humanistic Mathematics*, vol. 4, n. 2, julio 2014.

MARKOWSKY, George. *Misconceptions About The Golden Ratio*. [http://geomarkowsky.com/wordpress/wp-content/uploads/2012/05/GoldenRatio].

PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. Londres: Springer U.M.S, 2002.

REFERENCES

Actas 4as Jornadas Internacionales *Matemáticas Everywhere*. Celebradas el 17 y 18 de junio 2016.

BRUCE, J.W.; GIBLIN, P.J. *Curves and singularities*. Cambridge University Press, 1992.

BURGIEL, H.; SALOMONE, M. 'Logarithmic Spirals and Projective Geometry in M.C.Escher's 'Path of life III''. *Journal of Humanistic Mathematics*, Vol.2 No.1, January 2012.

COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons (Second edition).

DAVIS, J.P. *Spirals from Theodorus to Chaos*. Wellesley, Massachusetts: A.K. Peters, Ltd., 1993.

GARDNER, M. *Circo matemático*. Alianza Editorial, 1995.

GRIFFING, Steven L. *The Golden Section: an Ancient Egyptian and Grecian Proportion*. New York: Elsevier, 2007.

HEMENWAY, P. *Divine Proportion: θ Phi in Art, Nature, and Science.* Sterling Publishing Co., 2005

MAINZER, Klaus. *Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science.* Walter de Gruyter, 1996

MARCOTTE, J.; SALOMONE, M. 'Loxodromic Spirals in M.C.Escher's Sphere Surface'. *Journal of Humanistic Mathematics*, vol.4, n. 2, July 2014.

MARKOWSKY, George. *Misconceptions About The Golden Ratio*. [http://geomarkowsky.com/wordpress/wp-content/uploads/2012/05/GoldenRatio].

PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. London: Springer U.M.S, 2002.