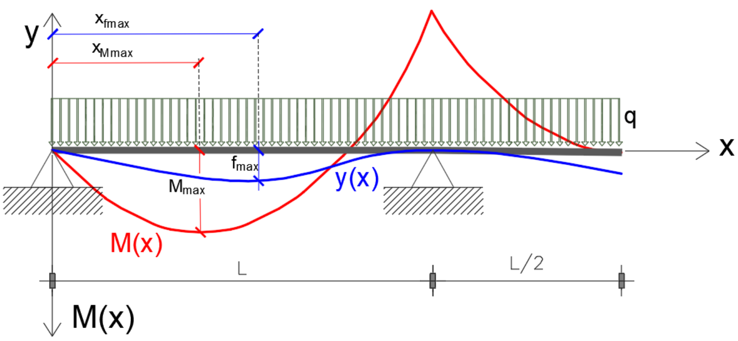
GRADO EN ARQUITECTURA

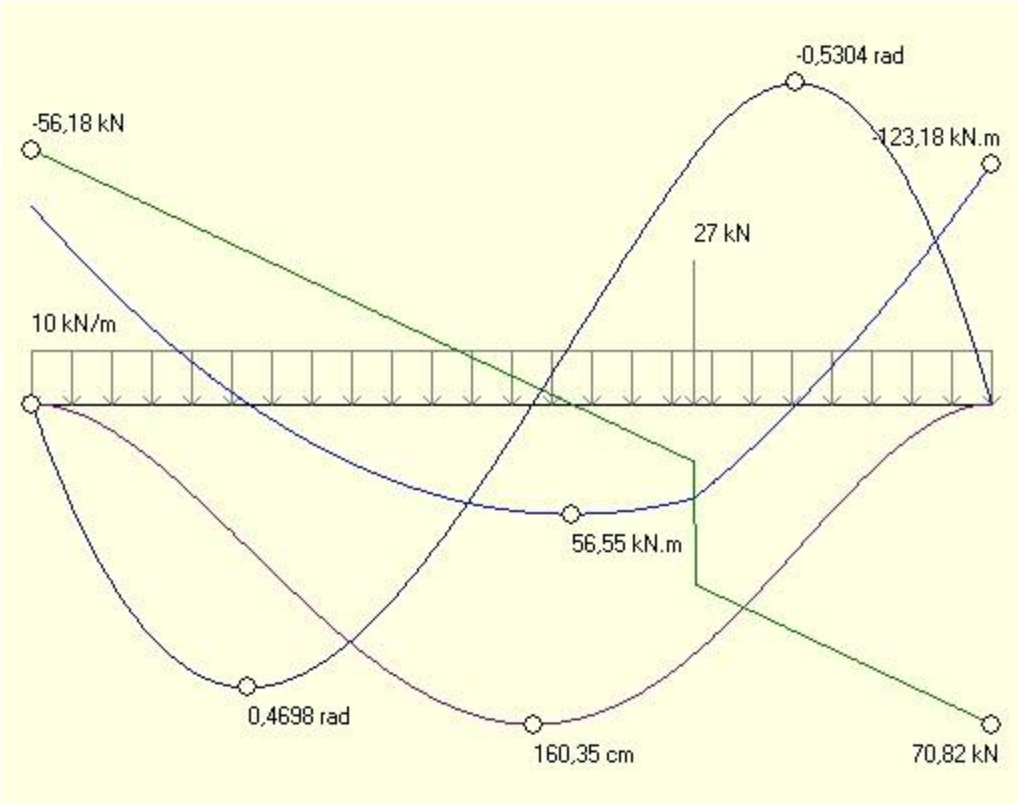
EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS APLICADOS AL ANALISIS ESTRUCTURAL DE VIGAS



F. Hernando, M. Castilla Octubre 2018

Los conocimientos matemáticos y el dominio del análisis de funciones resultan imprescindibles para el estudio del comportamiento estructural de las vigas simples y continuas.

En ellas, los esfuerzos de flexión y corte y las posiciones y giros de su deformada elástica son variables en cada sección. En la figura se representa un ejemplo de las funciones que representan sus valores a lo largo de la viga.



Estas funciones está relacionadas entre sí: La función de giros (en azul oscuro) es la derivada de la deformada elástica (en violeta). A su vez, los esfuerzos de flexión (en azul claro) corresponden a la función derivada de la de giros, los esfuerzos de corte (en verde) son la derivada de los esfuerzos de flexión y la función de cargas (en gris) es la derivada de los esfuerzos de corte.

En sentido inverso, a partir de la función de cargas aplicadas, se pueden obtener mediante sucesivos pasos de integración, los esfuerzos de corte, de flexión, los giros y la deformación elástica producida por dichas cargas. En este proceso es muy útil el conocimiento matemático de distintos procedimientos simplificados de integración.

Como se puede apreciar en la figura, los máximos, mínimos y puntos de inflexión de estas funciones se producen donde se anulan las correspondiente primeras y segundas derivadas, el salto en el esfuerzo de corte provoca un cambio brusco de pendiente en el esfuerzo de flexión, etc. La obtención de estos valores críticos se basa en las propiedades del análisis funcional.

Los ejercicios aquí planteados se dirigen a estudiantes de matemáticas de primeros cursos y pretenden la aplicación práctica de los conocimientos que adquieren de análisis de funciones sobre situaciones reales de estudio de comportamientos estructurales.

Su resolución se basa exclusivamente en consideraciones matemáticas. No se precisa ningún conocimiento anterior de estructuras. Los enunciados ya incorporan este conocimiento con objeto de que se pueda practicar solamente la operativa matemática.

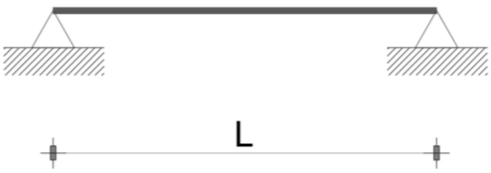
Esta operativa es la que se va a requerir en cursos superiores, cuando se aborde el estudio de sistemas estructurales, y por ello resulta particularmente útil e interesante su planteamiento en los cursos previos de matemáticas.

Indice de ejercicios

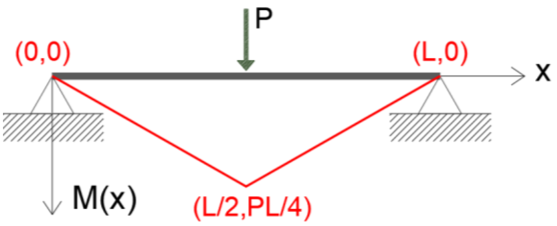
Ejercicio	Apartado	Operativa matemática
V01	A	Determinación de rectas en forma explícita
	B	Determinación de parábolas en forma explícita
V02	A	Proceso de integración indefinida
	B	Determinación de constantes de integración
	C	Determinación de la función integral
	D	Obtención del valor central
V03	A	Área de una parábola mediante integración definida
	B	Aplicación al cálculo del giro en un extremo
	C	Verificación del valor en la función derivada
V04	A	Determinación de parábolas en forma explícita
	B	Proceso de integración indefinida
	C	Determinación de constantes de integración
	D	Determinación de la función integral
	E	Obtención del valor central
V05	A	Área de una parábola mediante integración definida
	B	Aplicación al cálculo del giro en un extremo
	C	Verificación del valor en la función derivada
V06	A	Posición y valor de máximos relativos
	B	Determinación de la función integral
	C	Posición y valor de máximos relativos. Cálculo de raíces
	D	Valor de máximos relativos
V07	A	Posición y valor de máximos relativos
	B	Determinación de la función integral
	C	Obtención de valores extremos en su función derivada
V08	A	Proceso de integración indefinida en un intervalo
	B	Proceso de integración indefinida en un intervalo
V09	A	Integración geométrica del producto de dos funciones
V10	A	Integración por Simpson de polinomios de grado inferior a 4

Ejercicio V01

La viga horizontal de la figura, de longitud **L** y apoyada en sus extremos, tiene una sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y está formada por un material con módulo de elasticidad **E**.



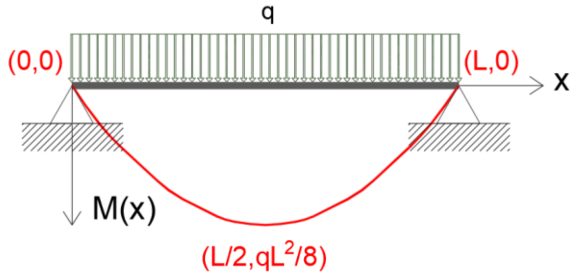
Cuando se carga con una carga vertical puntual **P** en su punto medio, en cada una de sus secciones se produce un esfuerzo interno de flexión diferente. En la siguiente figura se representa la función del valor de este esfuerzo **M(x)** correspondiente a la sección situada a la distancia **x** del origen.



Se aprecia en ella que esta variación es lineal por tramos. En el intervalo izquierdo **(0, L/2)** M(x) pasa por los puntos **(0, 0)** y **(L/2, PL/4)** y en el tramo derecho por los puntos **(L/2, PL/4)** y **(L, 0)**

a) Se pide la expresión de M(x) en su forma explícita, para cada tramo, en los ejes indicados (el sentido positivo del eje de ordenadas es descendente).

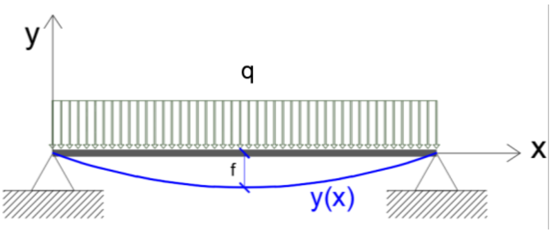
Cuando la viga se carga con una carga vertical uniformemente repartida de valor **q**, la función **M(x)** es una parábola de segundo grado y eje vertical que pasa por los puntos **(0, 0)** y **(0, L)** y tiene su vértice en el punto **(L/2, qL^2/8)**



b) *Se pide la expresión de M(x) en su forma explícita, en los ejes indicados (el sentido positivo del eje de ordenadas es descendente).*

Ejercicio V02

La carga repartida q sobre la viga del ejercicio V01 provoca la deformación indicada en la figura y representada por la función de su elástica **y(x)**:



La expresión de y(x) se puede obtener a partir de la ecuación $\mathbf{d^2y(x)/dx^2 = M(x)/EI}$ siendo M(x) la función obtenida en el apartado b) del ejercicio V01. Considerando todo ello se pide:

a) *La realización de dos etapas de integración indefinida y la determinación de* ***y(x)*** *en función de las constantes* ***q, L, E, I,*** *la variable* ***x*** *y las dos constantes de integración* C_1 *y* C_2.

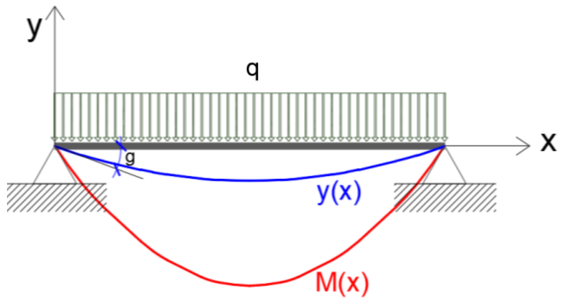
b) *La obtención de los valores de* C_1 *y* C_2 *imponiendo la condición de que y(x) pase por los puntos* ***(0, 0)*** *y* ***(L, 0)*** *correspondientes a los apoyos extremos.*

c) *La sustitución de* C_1 *y* C_2 *en* ***y(x)*** *y su expresión final en función de* ***q, L, E, I, x***

d) *El valor del desplazamiento máximo* ***f*** *(flecha) que se produce, por simetría, en la mitad de la viga.*

Ejercicio V03

La deformación elástica provocada por la carga repartida q sobre la viga del ejercicio V01 presenta un giro en su extremo izquierdo de valor g, tal como se indica en la figura:



Este giro puede calcularse mediante el cociente entre el área de la parábola **M(x)** (calculada en V01) dividido por la constante 2EI y con signo negativo (se consideran positivos los giros antihorarios). Sabiendo esto, se pide:

a) *La determinación del área **A** de la parábola mediante integración en el intervalo (0,L)*

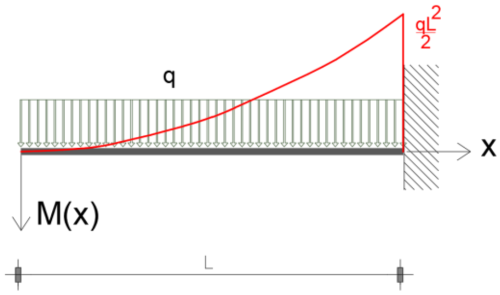
b) *El valor del giro **g** en el extremo izquierdo de la viga*

c) *La comprobación de que dicho giro corresponde a la derivada en el origen de la función **y(x)** de la elástica (obtenida en el ejercicio V02)*

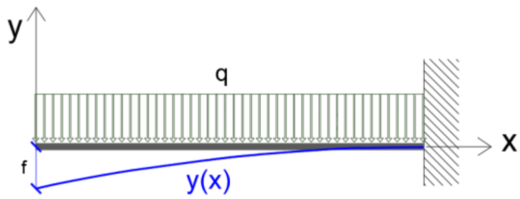
Ejercicio V04

Se considera una viga en ménsula de longitud **L** y empotrada en su extremo derecho. La viga tiene una sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y está formada por un material con módulo de elasticidad **E**.

Una carga uniformemente repartida de valor q provoca una intensidad del esfuerzo de flexión **M(x)** en cada sección situada a una distancia x del origen. Esta función M(x) es una parábola de segundo grado con valor nulo y pendiente horizontal en el extremo libre (el izquierdo) y valor negativo $-qL^2/2$ en el extremo empotrado (el derecho), tal como se muestra en la figura:



Esa solicitación interna provoca la deformación elástica indicada y representada por la función **y(x)**, con un valor máximo de su flecha **f** en el extremo libre.



Considerando la ecuación de la elástica $d^2y(x)/dx^2 = M(x)/EI$, se pide:

a) *La expresión explícita de la parábola M(x) con las condiciones indicadas*

b) *La realización de dos etapas de integración indefinida y la determinación de* ***y(x)*** *en función de las constantes* ***q, L, E, I,*** *la variable* ***x*** *y las constantes de integración* C_1 *y* C_2.

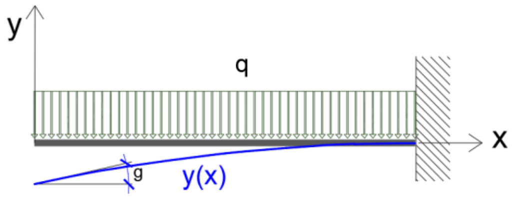
c) *La obtención de los valores de* C_1 *y* C_2 *imponiendo la condición de que y(x) pase por el punto* ***(L, 0)*** *y que su derivada sea nula en* ***(L, 0)***

d) *La sustitución de* C_1 *y* C_2 *en* ***y(x)*** *y su expresión final en función de* ***q, L, E, I, x***

e) *El valor de la flecha máxima* ***f*** *que se produce en el extremo izquierdo*

Ejercicio V05

La deformación elástica provocada por la carga repartida **q** sobre la viga en ménsula del ejercicio V04 presenta un giro en su extremo izquierdo de valor **g**, tal como se indica en la figura:



Este giro puede calcularse mediante el cociente entre el área de la parábola **M(x)** (calculada en V04 y cambiada de signo) dividido por la constante **EI**. Sabiendo esto, se pide:

a) *La determinación del área **A** de la parábola mediante integración en el intervalo (0,L)*

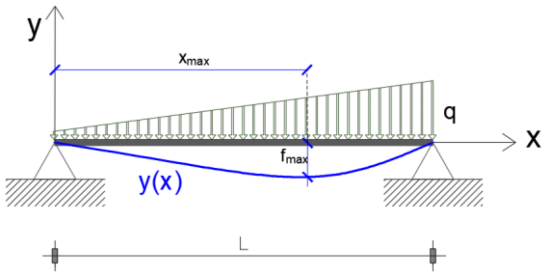
b) *El valor del giro **g** en el extremo izquierdo de la viga*

c) *La comprobación de que dicho giro corresponde a la derivada en el origen de la función **y(x)** de la elástica (obtenida en el ejercicio V04)*

Ejercicio V06

Se considera una viga horizontal apoyada en sus extremos, de longitud **L,** sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y formada por un material con módulo de elasticidad **E**.

Una carga repartida triangular de valor **0** en su extremo izquierdo y **q** en su extremo derecho provoca una intensidad del esfuerzo de flexión, para cada **x**, que se expresa mediante la función polinómica de tercer grado $\mathbf{M(x) = q\ (Lx - x^3/L)\ /\ 6.}$ La figura representa la deformación elástica producida por esta carga:



La carga no es simétrica y la funciones M(x) e y(x) tampoco lo son. Por ello los puntos de esfuerzo de flexión máxima y flecha máxima no se producen en el centro de la viga. Considerando esto, se pide:

a) *Posición* $\boldsymbol{x_{mmax}}$ *donde la función* ***M(x)*** *presenta su máximo relativo y valor de* $\boldsymbol{M_{max}}$

b) *Ecuación de la elástica* ***y(x)*** *obtenida a partir de la ecuación* $\boldsymbol{d^2y(x)/dx^2 = M(x)/EI}$ *y con las constantes de integración determinadas con la condición de y(x) que pase por los puntos (0, 0) y (L, 0).*

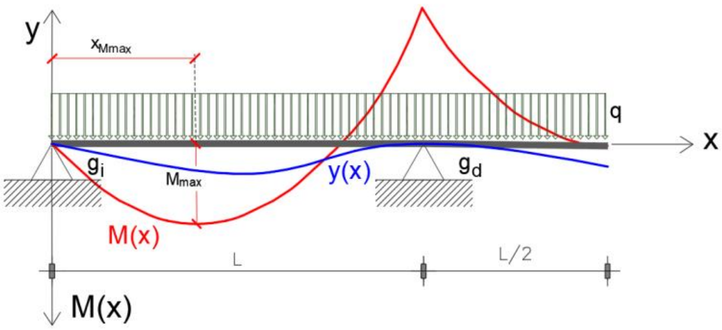
c) *Posición* $\boldsymbol{x_{fmax}}$ *donde la función y(x) presenta su máximo relativo. ¿coindicen las posiciones de la sección donde se produce el esfuerzo máximo y donde se produce la flecha máxima?*

d) *Valor de dicha flecha máxima* $\boldsymbol{f_{max}}$.

Ejercicio V07

Se considera una viga horizontal apoyada en sus extremos, de longitud **L,** con un voladizo de longitud **L/2** en su lado derecho, sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y formada por un material con módulo de elasticidad **E**.

Una carga uniformemente repartida de valor **q** provoca una intensidad del esfuerzo de flexión, para cada **x**, que se expresa mediante la función parabólica $\mathbf{M(x) = q\,(3Lx/8 - x^2/2)}$ en el tramo **(0, L)**. La figura representa las funciones M(x) y su correspondiente y(x):



Se pide:

a) *Posición* $\boldsymbol{x_{mmax}}$ *donde la función* ***M(x)*** *presenta su máximo relativo y valor de* $\boldsymbol{M_{max}}$

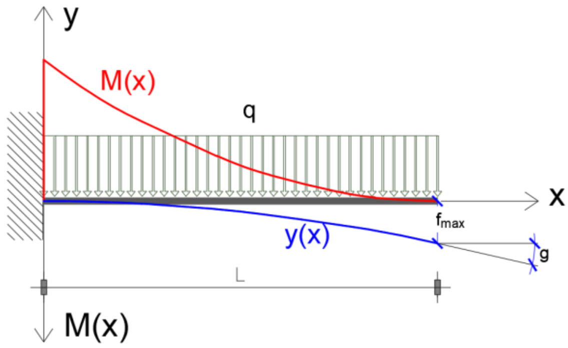
b) *Ecuación de la elástica* ***y(x)*** *en el tramo izquierdo obtenida a partir de la ecuación* $\boldsymbol{d^2y(x)/dx^2 = M(x)/EI}$ *y con las constantes de integración determinadas con la condición de y(x) que pase por los puntos (0, 0) y (L, 0).*

c) *Valor de los giros* $\boldsymbol{g_i}$ *y* $\boldsymbol{g_d}$ *en los apoyos izquierdo y derecho*

Ejercicio V08

Se considera una viga en ménsula de longitud **L** y empotrada en su extremo izquierdo. La viga tiene una sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y está formada por un material con módulo de elasticidad **E**.

Una carga uniformemente repartida de valor q provoca una intensidad del esfuerzo de flexión, para cada **x**, que se expresa mediante la función parabólica $\mathbf{M(x) = - q\ (L - x)^2/2}$ representada en la figura, donde se indican también la deformación elástica y la flecha y giro máximos.



El giro máximo **g** se produce en el extremo derecho y su valor se puede calcular como el cociente entre la integral definida de 0 a L de la función **M(x)**, dividida entre la constante **EI**.

a) Determinar esta integral definida y el valor del giro máximo ***g***

La flecha máxima **f** se produce también en el extremo derecho y su valor se puede calcular como el cociente entre la integral definida de 0 a L del producto **M(x) (L-x)**, dividida entre la constante **EI**.

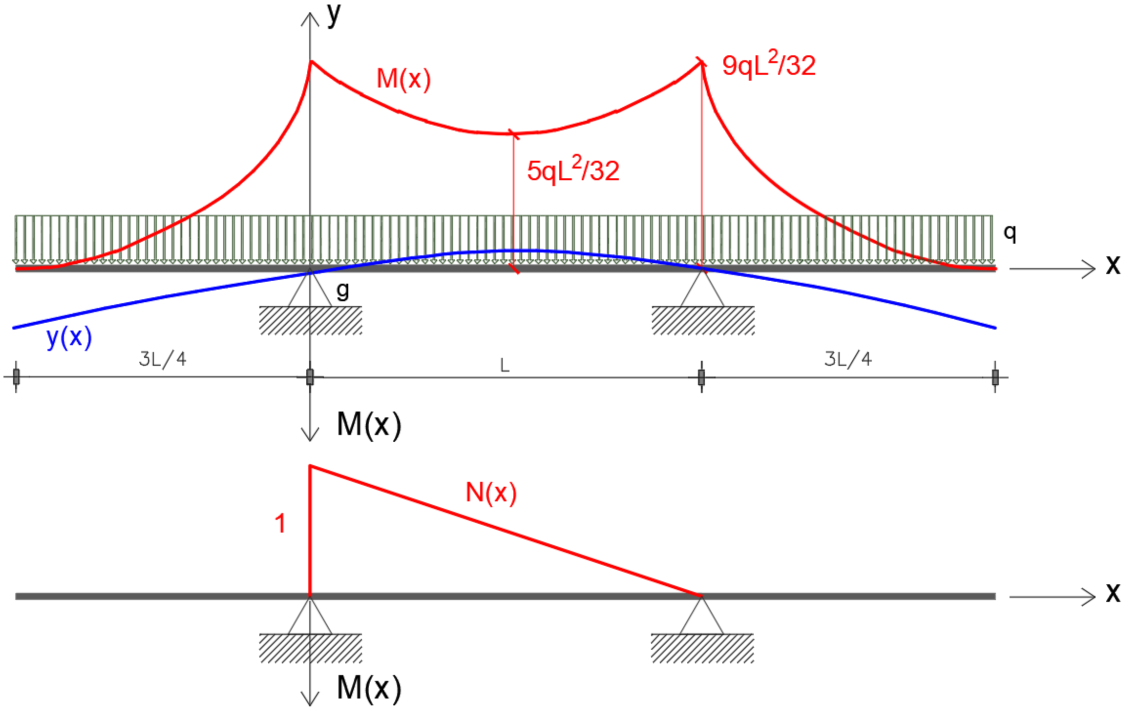
b) Determinar esta integral definida y el valor de la flecha máxima ***f***

Ejercicio V09

Se considera una viga horizontal apoyada en sus extremos, de longitud **L,** con dos voladizos de longitud **3L/4** a cada lado, sección transversal uniforme con un momento de inercia **I** y formada por un material con módulo de elasticidad **E**.

Una carga uniformemente repartida de valor **q** provoca, en su tramo central, una intensidad del esfuerzo de flexión **M(x)** que es una función parabólica con valores -**9qL^2/32** en los puntos **(0, 0)** y **(L, 0)** y valor **-5qL^2/32** en **(L/2, 0)**.

Se considera además una función **N(X)** que es una recta entre los puntos **(0, -1)** y **(L, 0)** y que representa la influencia de la flexión sobre el giro en **(0, 0)**. Ambas funciones se representan en la figura.



En este caso, el giro **g** en este apoyo izquierdo se puede calcular como el cociente entre la integral definida del producto de funciones **M(x) N(x)** en el intervalo **(0, L)**, dividida entre la constante **EI**.

*Se pide el valor de dicho giro **g**, planteando la resolución de esta integral por un procedimiento geométrico, basado en la siguiente propiedad matemática:*

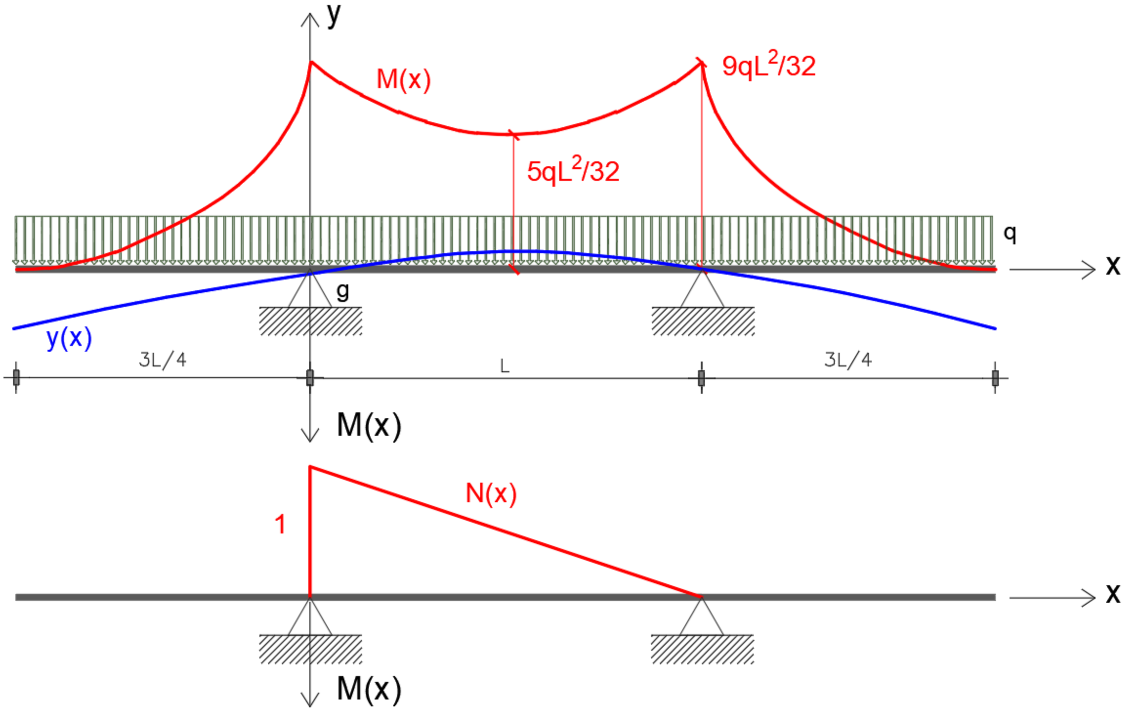
"La integral definida en un intervalo del producto de dos funciones, una genérica y otra lineal, es el producto del área bajo la función genérica (en el intervalo) por el valor de la función lineal correspondiente a la posición del centro geométrico de la función genérica"

Puede considerarse además que el área bajo una parábola del tipo de M(x) es la tercera parte del rectángulo que la inscribe más el área del rectángulo de base L y altura la de su vértice.

Ejercicio V10

Se considera la viga horizontal con dos voladizos definida en el ejercicio V09 y con la misma carga uniformemente repartida.

Se consideran además las funciones **M(x)** y **N(x)** allí definidas (y representadas en la figura) y también la expresión indicada para la determinación del giro en el apoyo izquierdo.



*Se pide el valor de dicho giro **g**, planteando en este caso la resolución de la integral por el método de Simpson:*

"La integral definida en un intervalo entre los puntos de coordenadas x_a y x_b de una función polinómica de grado inferior a 4, es el producto de la sexta parte de la longitud del intervalo por la suma del valor de la función en sus extremos más cuatro veces en valor de la función en su punto medio"

Integral de f(x) en el intervalo = $(x_b - x_a)\ (f(x_a) + f(x_b) + 4f((x_a+x_b)/2))\ /\ 6$

Se debe considerar para ello que la función polinómica f(x) es realmente el producto de las funciones M(x) por N(x).

SOLUCIONES

Ejercicio	Apartado	Solución
V01	**A**	**En [0, L/2] $M(x) = P\,x / 2$; En [L/2, L] $M(x) = P\,(L - x) / 2$**
	B	**$M(x) = q\,(Lx - x^2) / 2$**
V02	**A**	**$M(x) = q\,(2Lx^3 - x^4) / 24\,EI + C_1x + C_2$**
	B	**$C_1 = -\,qL^3 / 24\,EI \quad C_2 = 0$**
	C	**$M(x) = q\,(2Lx^3 - L^3x - x^4) / 24\,EI$**
	D	**$f = -\,5\,qL^4 / 384\,EI$**
V03	**A**	**$A = qL^3 / 12$**
	B	**$g = -\,qL^3 / 24\,EI$**
	C	**$g = dy(x)/dx_{\,(x=0)} = C_1 = -\,qL^3 / 24\,EI$**
V04	**A**	**$M(x) = -\,q\,x^2 / 2$**
	B	**$M(x) = -\,q\,x^4 / 24\,EI + C_1x + C_2$**
	C	**$C_1 = qL^3 / 6\,EI \quad C_2 = -\,qL^4 / 8\,EI$**
	D	**$M(x) = -\,q\,(x^4 - 4L^3x + 3L^4) / 24\,EI$**
	E	**$f = -\,qL^4 / 8\,EI$**
V05	**A**	**$A = qL^3 / 6$**
	B	**$g = qL^3 / 6\,EI$**
	C	**$g = dy(x)/dx_{\,(x=0)} = qL^3 / 6\,EI$**
V06	**A**	**$X_{mmax} = L / \sqrt{3} \quad M_{max} = qL^2 / 9\sqrt{3}$**
	B	**$M(x) = q\,(10Lx^3 - 3x^5/L - 7L^3x) / 360\,EI$**
	C	**$X_{fmax} = 0.5193$ (no coincide con X_{mmax})**
	D	**$f_{max} = -\,0.006522\,qL^4 / EI$**
V07	**A**	**$X_{mmax} = 3L / 8 \quad M_{max} = 9qL^2 / 128$**
	B	**$M(x) = q\,(3Lx^3 - 2x^4 - L^3x) / 48\,EI$**
	C	**$g_i = -\,qL^3 / 48\,EI \quad g_d = 0$**
V08	**A**	**$g = -\,qL^3 / 6\,EI$**
	B	**$f = -\,qL^4 / 8\,EI$**
V09	**A**	**$g = -\,19\,qL^3 / 192\,EI$**
V10	**A**	**$g = -\,19\,qL^3 / 192\,EI$**