



**Un viaje afectivo en tus manos:
sobre el impacto emocional del uso de los
materiales manipulativos en el proceso de
enseñanza-aprendizaje de las matemáticas**

TRABAJO DE FINAL DE MÁSTER

Autora: Gisela Yélamos Bayarri

Tutora: Dra. Franciele Corti

Máster universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria
y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Año: 2024

DECLARACIÓN

Declaro que el material de este documento, que ahora presento, es fruto de mi propio trabajo. Cualquier ayuda recibida de otras personas ha sido citada y reconocida dentro de este documento. Hago esta declaración sabiendo que incumplir las normas relativas a la presentación de trabajos puede acarrear consecuencias graves. Soy consciente de que el documento no se aceptará salvo que se entregue con esta declaración.



Firma:

Gisela YÉLAMOS BAYARRI

Una de les responsabilitats més grans que té un docent és administrar bé el temps dels seus alumnes. Aprofita'l no per fer moltes coses sinó per fer-les molt bé!

Anton Aubanell

Agradecimientos

A P. i L., per mostrar-me les coses essencials i treure el millor de mi.

A A., por ser mi motor y por creer siempre en mí. Si llegué aquí, es gracias a tu paciencia y apoyo.

A la meva família, per ser els millors mestres possibles, un exemple extraordinari de vocació.

A mi tutora, Franciele, por guiarme y orientarme en este camino. No olvidaré tus enseñanzas y tu pasión por la investigación.

A l'equip directiu del centre educatiu, per la confiança; als seus docents, per l'amabilitat i tan valuós ensenyament; i als meus alumnes, perquè sense ells, aquest treball no tindria sentit. Gràcies per la vostra motivació i entusiasme, i per deixar-me emocionar al vostre costat.

Resumen

Este trabajo explora el camino del aprendizaje de las matemáticas a través del dominio afectivo y cómo los materiales manipulativos pueden transformar esta experiencia en un trayecto motivador. Navegando entre las emociones y los sentimientos, y cómo estos salen a la superficie en el nuevo currículum, hacemos un viaje histórico por los materiales manipulativos, caminando entre sus ventajas y limitaciones. Bajo un paradigma socio crítico, se aplica una metodología mixta, que combina elementos del método cuantitativo y cualitativo, a través de la cual se pretende investigar si los materiales manipulativos pueden aumentar las emociones positivas y disminuir las negativas para así poder guiar a los estudiantes en un viaje más placentero y eficaz hacia el aprendizaje matemático significativo. Ponemos rumbo a las emociones, no solo de las y los alumnos, sino también de los docentes, puesto que de ellos depende, en buena medida, llegar al puerto del aprendizaje de la materia.

Resum

Aquest treball explora el camí de l'aprenentatge de les matemàtiques a través del domini afectiu i com els materials manipulatius poden transformar aquesta experiència en un trajecte motivador. Navegant entre les emocions i els sentiments, i com aquests surten a la superfície en el nou currículum, fem un viatge històric pels materials manipulatius, caminant entre els seus avantatges i limitacions. Sota un paradigma sociocrític, s'aplica una metodologia mixta, que combina elements del mètode quantitatiu i qualitatiu, a través de la qual es pretén investigar si els materials manipulatius poden augmentar les emocions positives i disminuir les negatives per a així poder guiar als estudiants en un viatge més plaent i eficaç cap a l'aprenentatge matemàtic significatiu. Posem rumb a les emocions, no només de les i els alumnes, sinó també dels docents, ja que d'ells depèn, en bona part, arribar al port de l'aprenentatge de la matèria.

Abstract

This paper explores the path of learning mathematics through the affective domain and how manipulative materials can transform this experience into a motivating journey. Navigating through emotions and feelings, and how these surface in the new curriculum, we take a historical trip to manipulative materials, examining their advantages and limitations. Under a socio-critical paradigm, a mixed-methodology approach is applied, combining elements of both quantitative and qualitative methods. The aim is to investigate if manipulative materials can increase positive emotions and reduce the negative ones, thus guiding students on a more pleasant and effective trip towards meaningful mathematical learning. We focus on the emotions not only of the students, but also of the teachers, as it largely depends on them whether the learning of the subject reaches its intended goal.

Palabras clave

Investigación – Educación Secundaria – Currículum – Matemáticas – Emociones – Socioemocional – Socioafectivo – Material manipulativo

Paraules clau

Investigació – Educació Secundària – Currículum – Matemàtiques – Emocions – Socioemocional – Socioafectiu – Material manipulatiu

Keywords

Research – Secondary Education – Curriculum – Mathematics – Emotions – Social-emotional – Socio-affective – Manipulative materials

Índice

Agradecimientos	6
1 Introducción	13
2 Marco teórico	15
2.1 Dominio afectivo del aprendizaje	15
2.2 Matemática emocional.....	16
2.2.1 Distinción entre emociones y sentimientos	16
2.2.2 El aprendizaje y las emociones	17
2.3 El socioafectivo en el currículum	19
2.4 Material manipulativo	22
2.4.1 Trayectoria histórica	22
2.4.2 Materiales estructurados y no estructurados	24
2.5 Ventajas y limitaciones.....	26
2.6 Estado de la cuestión	28
3 Metodología	31
3.1 Objetivos	31
3.2 Diseño metodológico.....	32
3.3 Muestra de estudio.....	32
3.4 Instrumento de recogida de datos	33
3.4.1 Cuestionario	33
3.4.2 Observaciones.....	37
4 Resultados.....	39
4.1 Actividades con material manipulativo.....	39
4.2 Verificación o refutación de hipótesis	40
4.2.1 Agrado a las matemáticas	40
4.2.2 Motivación hacia las matemáticas	42
4.2.3 Diversión o aburrimiento en las clases de matemáticas.....	44
4.2.4 Ansiedad y autoconcepto	45
4.3 Evaluación de la propuesta: diagnóstico de limitaciones y potencialidades 47	
4.4 Un recuerdo positivo	50

5	Conclusiones	53
5.1	Revisión de los objetivos.....	53
5.2	Limitaciones del estudio.....	54
5.3	Propuestas de mejora	55
5.4	Líneas de investigación futuras.....	56
6	Bibliografía	57
	Anexos	63
	Anexo 1 - Decálogo Pere Puig Adam	64
	Anexo 2 - Bloques lógicos	65
	Anexo 3 - Regletas de Cuisenaire	66
	Anexo 4 - Bloques multibase (material base 10).....	67
	Anexo 5 - Material fracciones	68
	Anexo 6 - Tangram.....	69
	Anexo 7 - Bloques geométricos (Pattern Blocks).....	70
	Anexo 8 - Geoplanos.....	71
	Anexo 9 - Espejos	72
	Anexo 10 - Dados.....	73
	Anexo 11 - Contadores.....	74
	Anexo 12 - Policubos.....	75
	Anexo 13 - Pentominós	76
	Anexo 14 - Decálogo Maria Antònia Canals	77
	Anexo 15 - Enlaces web bancos de recursos	78
	Anexo 16 - Perfil Instagram @mamatematica.....	79
	Anexo 17 - Cuestionario	81
	Anexo 18 - Capturas base de datos Excel.....	83
	Anexo 19 - Ecuaciones método balanza.....	84

Índice de figuras

Figura 1 Las matemáticas de la LOMLOE	20
Figura 2 Gráfico agrado	41
Figura 3 Gráfico motivación	42
Figura 4 Frase Maria Antònia Canals.....	43
Figura 5 Gráfico diversión y aburrimiento	44
Figura 6 Gráfico preocupación.....	46
Figura 7 Círculo cromático	47
Figura 8 Material ecuaciones alumnado	48
Figura 9 Material ecuaciones docente	48
Figura 10 Bloques lógicos.....	65
Figura 11 Actividad bloques lógicos (combinatoria)	65
Figura 12 Regletas	66
Figura 13 Actividad regletas (función cuadrática).....	66
Figura 14 Material base 10	67
Figura 15 Actividad material base 10 (porcentajes)	67
Figura 16 Material fracciones.....	68
Figura 17 Actividad material fracciones (suma fracciones)	68
Figura 18 Tangram	69
Figura 19 Actividad tangram (área y perímetro).....	69
Figura 20 Pattern Blocks.....	70
Figura 21 Actividad Pattern Blocks (perímetros, áreas y ángulos)	70
Figura 22 Geoplanos	71
Figura 23 Actividad geoplano (lógica).....	71
Figura 24 Libro espejo	72
Figura 25 Actividad espejo (concepto fracción).....	72
Figura 26 Dados	73
Figura 27 Actividad dados (probabilidad).....	73
Figura 28 Contadores	74
Figura 29 Actividad contadores (suma enteros).....	74
Figura 30 Policubos	75
Figura 31 Actividad policubos (descomposición, m.c.d. y m.c.m.).....	75
Figura 32 Pentominós.....	76
Figura 33 Actividad pentominós (rompecabezas)	76
Figura 34 Infografía del Instagram @mamatematica	79
Figura 35 Infografía del Instagram @mamatematica (historias).....	80
Figura 36 Diseño en Canva del cuestionario (anverso).....	81
Figura 37 Diseño en Canva del cuestionario (reverso)	82
Figura 38 Capturas de pantalla Excel base de datos	83
Figura 39 Ejemplo ecuación de primer grado.....	84

Índice de Tablas

Tabla 1 Tabla de dimensiones	34
Tabla 2 Revisión de hipótesis	54

1 Introducción

Las emociones son una variable fundamental en todo proceso de aprendizaje. Y lo son, especialmente, en el aprendizaje de las matemáticas, por el elevado grado de dificultad que indica el alumnado y los prejuicios sociales hacia ellas. El profesorado de matemáticas tenemos la oportunidad y la responsabilidad de mejorar dicha percepción negativa empleando todos los recursos que estén en nuestras manos. Enseñar matemáticas va más allá de solo explicar conceptos o algoritmos que pueden llegar a ser útiles para la vida: las matemáticas pueden ser apasionantes. Es importante transmitir que ser competentes matemáticamente no es solo mecanizar procesos, sino interpretar y entender el mundo que nos rodea, lo que permite a las personas tener criterio propio y ser más libres.

El presente estudio propone el material manipulativo como herramienta para promover aprendizajes más significativos y, por qué no, para disfrutar de las matemáticas en el aula. Manipular es una fase más en la construcción de conocimiento lógico-matemático. Si las matemáticas nacen de la realidad, tiene sentido que esta sea el punto de partida de las actividades propuestas. A través de la experiencia directa, podemos llegar después a aprendizajes abstractos y pensamientos simbólicos. A su vez, el material manipulativo también ayuda a la visualización y a entender mejor las matemáticas, ya que el conocimiento se percibe a través de muchos sentidos: la vista, el oído, el tacto. Por lo tanto, veremos propuestas que pueden ser, en nomenclatura del nuevo currículum: actividades iniciales, de desarrollo, de estructuración o de aplicación.

La razón principal para el desarrollo de esta temática es indagar, no solo en los beneficios del uso de los materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas, sino en el impacto emocional que tiene su uso sobre el alumnado de Secundaria. Encontramos muchas propuestas en las anteriores etapas, pero al avanzar a cursos superiores, va decreciendo la confianza en ellos, pese a que las ventajas (e inconvenientes) que supone su uso son igual de válidas, sea en la etapa educativa que sea. En mi formación académica previa, he tenido referentes didácticos que promueven el uso del material manipulativo, lo que ha fomentado mi interés en ellos y la convicción de que pueden ser un gran aliado en clase de matemáticas.

Este trabajo final de máster se compone por tres grandes bloques. El primero, el marco teórico, está dividido en seis capítulos que transitaremos del general al particular nuestra temática de estudio. Dentro del dominio afectivo del aprendizaje, nos centraremos en las emociones, clasificándolas y diferenciándolas de los sentimientos e indagaremos en la atención y la curiosidad como motor de aprendizaje. Seguidamente, presentaremos el eje y el sentido socioemocional presente en el nuevo currículum y, finalmente, nos adentraremos en el material manipulativo, dando a conocer los referentes más importantes en didáctica de las matemáticas que promueven su uso, exponiendo algunos de estos materiales y reflexionando sobre las ventajas y las limitaciones tanto de su forma, como de su aplicación. Como último apartado del marco teórico, veremos el estado de la cuestión, conociendo otros trabajos y fuentes de recursos sobre el tema de estudio.

En el segundo bloque se expone la metodología utilizada para la investigación llevada a cabo, un método mixto que combina elementos propios del método cuantitativo y cualitativo. Dicha investigación se centrará en las respuestas de los alumnos tras realizar actividades con materiales manipulativos, así como las observaciones del docente. Por último, en un tercer bloque, se encuentran los resultados principales obtenidos, que dan pie a las reflexiones y las conclusiones.

Los objetivos específicos de este trabajo son: (1) estudiar las emociones y el proceso de aprendizaje, en particular, de las matemáticas, con el fin de comprender las dificultades para tratar de paliarlas; (2) descubrir y desarrollar actividades ricas con materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas; (3) elaborar un instrumento que permita analizar los sentimientos del alumnado en la implementación de una propuesta con material manipulativo; (4) identificar diferencia en los sentimientos asociados a las emociones: agrado, motivación, diversión, aburrimiento y ansiedad con y sin materiales manipulativos; y (5) acrecentar el colectivo de docentes de Secundaria que utilicen en el aula los materiales manipulativos. En general, la finalidad es aumentar la relevancia del sentido socioemocional en el aula de matemáticas.

Las hipótesis que se pretenden demostrar son que el agrado, la motivación y la diversión hacia las matemáticas del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria, aumentan en las clases con materiales manipulativos, mientras que el aburrimiento y la ansiedad disminuyen.

En definitiva, el objetivo general perseguido con este trabajo es ofertar evidencias empíricas para promover el uso de materiales manipulativos con el fin de despertar las emociones positivas del alumnado, a la vez que se invita a los docentes a emocionarse también con ellos.

2 Marco teórico

Esta primera sección del trabajo ofrece fundamentación teórica y apunta algunas investigaciones del ámbito de estudio que nos ocupa: desde cuestiones generales como las emociones, los sentimientos y su impacto en el aprendizaje, hasta aspectos concretos, tanto positivos como negativos, del material manipulativo.

2.1 Dominio afectivo del aprendizaje

El dominio afectivo es un concepto relativamente reciente en el ámbito de la investigación educativa que pone de manifiesto que las dimensiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que algunas de ellas están muy arraigadas en nosotros.

Caballero y Blanco (2007) explican:

La dimensión afectiva puede definirse como un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son considerados como algo diferente de la pura cognición, incluyendo no solo los sentimientos y emociones (McLeod, 1989), sino también las creencias, actitudes, valores y apreciaciones (Gómez-Chacón, 2000). (p. 3)

Consideramos los principales descriptores básicos del dominio afectivo: creencias, actitudes y emociones. Definimos las creencias como las ideas que un individuo va conformando acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje a partir de sus experiencias vividas. Es necesario un periodo largo para que se formen estas creencias, son bastante estables y difíciles de cambiar (Corti, 2022a). Las actitudes, por su parte, son predisposiciones positivas o negativas que condicionan a un sujeto a percibir y reaccionar de un modo determinado ante los objetos y las situaciones con las que se relaciona. Las actitudes hacia las matemáticas también tienen un carácter bastante estable, como las creencias, pero, a diferencia de estas, las actitudes son más intensas, con una mayor carga afectiva y más ligadas a sentimientos que las creencias (Corti, 2022a). Por último, las emociones son estados afectivos de alta intensidad y corta duración, con carga positiva o negativa para el individuo. Las emociones pueden aparecer, desaparecer o cambiar rápidamente (Corti, 2022a).

La doctora en didáctica de las matemáticas por la Universidad Autónoma de Madrid, Rocío Garrido, en Palop y Morales (2024), puntualiza que, de estas tres componentes, la emoción es especialmente importante en matemáticas en comparación a otras disciplinas, por la existencia de retos, por ejemplo, al resolver problemas. Además, añade, una sucesión de emociones (positivas o negativas), solidifican una actitud y, a su vez, esas actitudes (que, de nuevo, pueden ser positivas o negativas) repercuten en las creencias¹.

¹ Una creencia es, por ejemplo, “yo no soy bueno en matemáticas” o las creencias sociales de “ser bueno en matemáticas es de listos y si no se me dan bien, tampoco pasa nada” o de “suspender matemáticas” no es tan grave como suspender otras materias (Garrido en Palop y Morales, 2024).

Numerosos estudios, como el de Guerrero y otros (2005) o Gil y otros (2006), abordan estos tres descriptores básicos y señalan cómo los afectos condicionan el éxito/fracaso del estudiantado a la hora de enfrentarse a las matemáticas². Cárdenas y otros (2014) resaltan no solo la importancia e incidencia de estos aspectos, sino que, además, desarrollan un instrumento para su evaluación.

En esta oportunidad nos vamos a centrar en el estudio de las emociones y de cómo estas influyen en la formación de la disciplina.

2.2 Matemática emocional³

Las personas nacemos con predisposiciones biológicas que, junto a la educación recibida y el entorno, configuran y desarrollan nuestro comportamiento. En ese desarrollo, las emociones tienen un papel importante. Según Morgado (2015):

La corteza cerebral, sede del razonamiento, interactúa con la amígdala y otras regiones subcorticales del cerebro implicadas en la emoción, para asociar ideas y comportamientos a sentimientos específicos, siendo ese el mecanismo de aprendizaje gracias al cual padres y educadores pueden contribuir al desarrollo de los valores y virtudes en los niños y los jóvenes. (p. 47)

Es natural interesarnos por la educación emocional en matemáticas para, desde la información y el conocimiento, poder abordar mejor las dificultades que se nos plantean. El primer paso será identificar las emociones asociadas al ámbito educativo y clasificarlas según su carga de significado positivo o negativo.

2.2.1 Distinción entre emociones y sentimientos

Pese a que a menudo nos referimos a emociones y sentimientos indistintamente, son conceptos diferentes en neurociencia, tanto en su propia definición, como en la clasificación de sus categorías. La conceptualización de emoción que sugiere Bisquerra (2003) es la siguiente: “estado complejo del organismo caracterizado por una excitación o perturbación que predispone a una respuesta organizada” (p. 12). En cambio, el sentimiento es la emoción hecha consciente (Bisquerra, 2003). Podemos afirmar que mientras que las emociones son reacciones psicofisiológicas que ocurren de manera espontánea y automática y tienen una corta duración, los sentimientos, en cambio, son la interpretación que hacemos de esas emociones y sí que se pueden regular mediante nuestros pensamientos. Por este motivo, es más fácil observar y determinar las emociones de los demás (fijándonos en las reacciones físicas, en el entorno o en el contexto que ha llevado a esa emoción), pero a la hora de responder sobre nuestras propias emociones es difícil abstraernos de la interpretación que nosotros hacemos. Con ello, el presente trabajo se referirá a

² Se observa que los estudios mencionados comparten autoría, junto a Blanco, L. J., formando un grupo habitual de trabajo en la temática.

³ *Matemática Emocional* es el título del libro cuya autora es Gómez-Chacón, I. M., doctora en Filosofía y Ciencias de la Educación (Didáctica de las Matemáticas) y que contiene estrategias apropiadas para trabajar los procesos mentales involucrados en las emociones.

emociones en lo relativo a los hechos observados por la investigadora, mientras que se preguntará a los alumnos por sus propios sentimientos.

Las emociones básicas según la clasificación definida por Paul Ekman en 1972 son: miedo, ira, tristeza, alegría, sorpresa y asco. Bisquerra (2016) añade otras familias que son importantes desde el punto de vista de la educación: las emociones sociales (vergüenza) y las emociones estéticas, amor y felicidad. Lozano y otros (2022) consideran la ansiedad como otra de las emociones en el ámbito educativo, mientras que Estrada y otros (2013) también incluyen el humor como emoción en su estudio sobre la influencia de las emociones y creencias en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas emociones serán clasificadas según la nomenclatura de Goleman (1996) y Bisquerra (2003) en positivas, negativas y ambiguas. Así, establecemos las emociones negativas: miedo, ira, tristeza, asco, vergüenza y ansiedad; emociones positivas: alegría, amor, felicidad y humor; y emoción ambigua: sorpresa⁴.

Por su parte, también los sentimientos serán clasificados en positivos (que comportan sensación de agrado) y negativos (que producen sensaciones de malestar) en función de la respuesta que provocan en la persona. Listamos los siguientes sentimientos positivos: felicidad, amor, euforia, esperanza, motivación, pasión, satisfacción, diversión, bienestar, entusiasmo y, los negativos: enfado, ira, miedo, preocupación, tristeza, culpa, estrés, frustración, indignación, vergüenza, vulnerabilidad (Thomen, 2021). No hay que confundir negativos con malos, pues todos son necesarios para nuestro desarrollo. De igual modo, todas las emociones nos aportan información a tener en cuenta, por tanto, son complementarias, necesarias e igual de válidas.

2.2.2 *El aprendizaje y las emociones*

Una vez clasificadas y distinguidas las emociones y sentimientos, veremos por qué son tan importantes en el aprendizaje en general y, en particular, en el aprendizaje de las matemáticas.

Bueno (2017) señala que:

Cualquier aprendizaje, tanto si es conceptual como actitudinal o de aptitudes, queda fijado al cerebro a través de un patrón dinámico de conexiones (...) que comunican zonas distantes del cerebro. Si no hay emociones implicadas, el registro que queda de cualquier experiencia o aprendizaje es muy pequeño. (p. 2)

En su libro, *Neurociència per a educadors*, el mismo autor compara metafóricamente el acelerador de un coche a las emociones, así como el freno y el volante representarían la reflexividad. Todos los elementos son importantes, dependiendo

⁴ La sorpresa es una emoción ambigua, ya que en según qué situaciones puede resultar positiva o negativa. En el contexto observado durante esta investigación, la sorpresa tendrá una connotación claramente positiva, en tanto que los estudiantes asocian ese sentimiento a un cambio en la metodología tradicional habitual, una oportunidad de cambio y de realizar actividades a las que no están tan acostumbrados.

del uso que le demos en cada instante, pero en este contexto, las emociones son necesarias para que se dé el movimiento. Una idea que comparte con Garrido, que, en Palop y Morales (2024), reafirma que las emociones son lo que nos provoca a hacer una tarea en cualquier disciplina, y justifica así la importancia de estas en el aprendizaje. Pero, “¿a qué nos referimos cuando decimos que hay que prestar atención a las emociones en el aula? (...) Es distinto hablar de las emociones como factor modulador del aprendizaje que hablar de educación emocional”, apunta Ruiz Martín (2020, p. 142). Este trabajo tratará ambos matices, pues “ambos aspectos tienen repercusión sobre el aprendizaje” (Ruiz Martín, 2020, p. 142).

No ajeno a las emociones, nos interesa también el entorno que las provocan. Nuestras capacidades deben ejercitarse en un ambiente lo suficientemente estimulantes como para poder desarrollar su potencialidad, afirma Sáenz de Cabezón (2023). Además, al igual que Bueno (2017), sostiene que entre los aliados del aprendizaje se encuentran la curiosidad y la atención. Ruiz Martín (2020) argumenta que “la emoción suscitada por el estímulo emocional provoca que le prestemos mucha atención, por lo que, en consecuencia, lo recordamos mejor” (p. 148). García Navarro (2017) puntualiza que, en particular, los sentimientos positivos de los estudiantes hacia el aprendizaje son esenciales para la motivación, la cual activará y facilitará el proceso de aprendizaje. Según Ruiz Martín (2020), la motivación es un estado emocional que nos impulsa a emprender y mantener en el tiempo una conducta con un objetivo determinado, es “una predisposición a la acción en una dirección concreta” (p.160). No se trata, pues, únicamente de motivar, sino mantener esa motivación y orientarla al fin del aprendizaje que buscamos, no perder de vista el objetivo. García Navarro (2017) añade:

Determinados aspectos emocionales pueden potenciar la motivación hacia el aprendizaje y otros causar el efecto contrario: vivir emociones como la inseguridad, el miedo, la vergüenza o la culpabilidad son desaceleradores de la motivación hacia el aprendizaje; en cambio, la confianza, la esperanza, la ilusión, la diversión o la expectación son potenciadores de ésta. (García Navarro, 2017, p. 36)

Bueno (2017), además, deja claro que las actividades de aula deben ser transversales y contextualizadas, para que activen e impliquen el máximo número de redes y zonas neuronales posibles. Una idea muy similar sostiene Couso (2023), ya que afirma que “lo que sí va a determinar la calidad del aprendizaje es (...) la activación del máximo número de modalidades sensoriales” (p. 43). Reforzando así la idea de que, el material manipulativo, gracias al empleo de los sentidos (vista, oído, tacto), activa más zonas del cerebro que otras metodologías y, por tanto, favorece la adquisición de aprendizajes significativos.

Pero ¿qué es un *aprendizaje significativo*? El impulsor de este término, el pedagogo y psicólogo David Ausubel, señala que un aprendizaje significativo conecta la nueva información con algún concepto almacenado previamente de forma clara para construir un conocimiento aún más grande o, incluso, reestructurado, respecto al inicial. No se trata de almacenar (aprendizaje memorístico) sino de conectar y buscar relaciones con lo que ya sabemos (Ausubel, 1980).

Y, ¿no es eso lo que buscamos los docentes? ¿Que los saberes que impartimos puedan ser de utilidad en el futuro y conectados con otros aprendizajes y no solo conocimientos volátiles del presente? “Aprender matemáticas es desarrollar la competencia matemática, entendida como la capacidad para utilizar, en cada momento, el conjunto de conocimientos que poseemos y aplicarlo a la resolución de situaciones en diversos contextos” (Calvo, 2016, p. 14).

2.3 El socioafectivo en el currículum

En 2021, la OECD presenta los primeros resultados del estudio iniciado en el año 2019 llamado *Un nuevo enfoque para mirar más allá del aprendizaje académico*. En sus encuestas sobre habilidades sociales y emocionales, encontraron que algunas de estas habilidades están relacionadas positivamente con el rendimiento académico. Es decir, estas habilidades no son solo importantes por derecho propio, sino que también son predictores de las calificaciones escolares.

Los estudiantes con el mismo estatus social, género y habilidades cognitivas que tienen mejores habilidades sociales y emocionales tienen más probabilidades de obtener mejores calificaciones (OECD, 2021). Estos resultados contribuyen a la incorporación del sentido socioemocional en el nuevo currículum de matemáticas español.

La más reciente reforma educativa, la Ley Orgánica 3/2020, que modifica la Ley Orgánica 2/2006 de Educación y que es más conocida por LOMLOE, contempla la educación emocional como principio pedagógico y competencia clave a desarrollar en todas las áreas del currículum educativo. Pese a que en la anterior ley ya incluía un bloque de actitudes, es en esta nueva reforma que el socioafectivo coge mucha más relevancia (Garrido en Palop y Morales, 2024). Tal y como indica la misma LOMLOE, en el Real Decreto 157/2022, la educación emocional es el fundamento principal de la competencia personal, social y aprender a aprender (CPSAA) que implica:

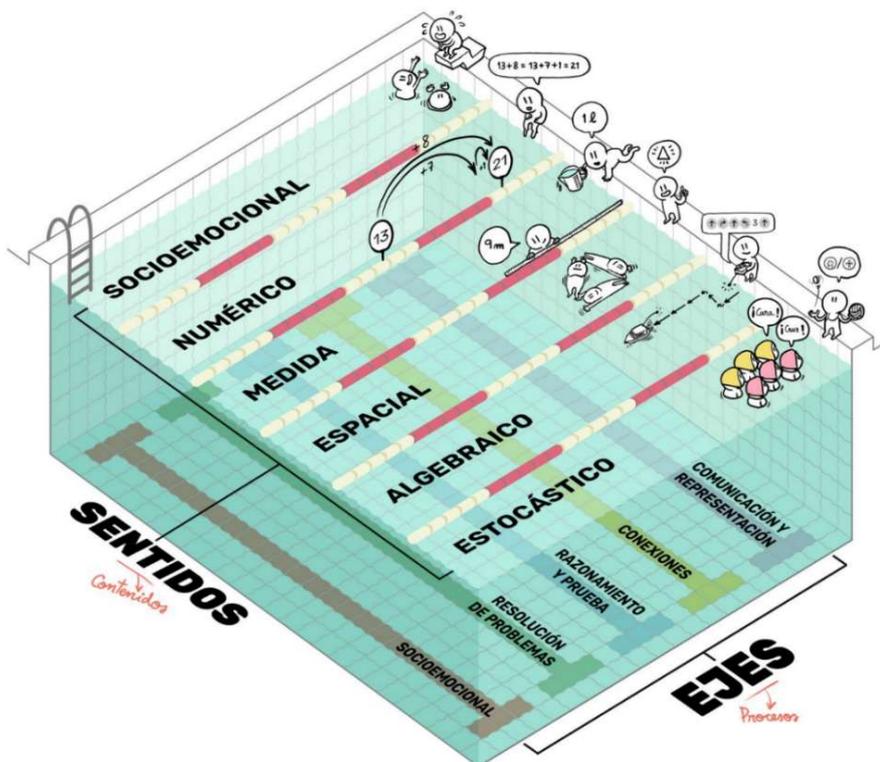
La capacidad de reflexionar sobre uno mismo para autoconocerse, aceptarse y promover un crecimiento personal constante; gestionar el tiempo y la información eficazmente; colaborar con otros de forma constructiva; mantener la resiliencia; y gestionar el aprendizaje a lo largo de la vida. Incluye también la capacidad de (...) adaptarse a los cambios; aprender a gestionar los procesos metacognitivos (...); ser capaz de llevar una vida orientada al futuro; así como expresar empatía y abordar los conflictos en un contexto integrador y de apoyo. (p. 24)

Esta competencia, que es una de las ocho competencias clave, está conectada también con el sentido socioemocional y el eje socioemocional dentro del currículum de matemáticas, recogidas en el Decreto 175/2022. Los sentidos del nuevo currículum, llamados contenidos en la anterior ley educativa (LOMCE) son: numérico, medida, espacial algebraico y estocástico. A estos se le añade el citado sentido socioemocional. Paralelamente, a los ejes del nuevo currículum, antiguamente llamados procesos o dimensiones: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y comunicación y representación, se le añade también el eje socioemocional.

Sánchez (2022), tratando de conectar todos estos conceptos, recoge:

Hacer unas matemáticas competenciales implica trabajar los contenidos (esto es, numeración, geometría, etc.) teniendo en cuenta los procesos (resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba). Y, como en el aula, todo debe ocurrir a la vez, con los contenidos transversales a los procesos, nos hemos imaginado esta piscina. (párr. 4).

Figura 1
Las matemáticas de la LOMLOE



Nota: Fuente Sánchez (2022) para Innovamat.

El socioafectivo es, por tanto, una capa que lo envuelve todo y se refiere a habilidades importantes a adquirir también en esta área. Como aclaran Delcor y Morera (2022), dentro de la propia aula de matemáticas, esta mirada se puede ver a dos niveles. Por un lado, crear como docentes un ambiente socioafectivo agradable y seguro, un entorno donde se pueda hablar, opinar y donde todos nos podamos equivocar y el error sea visto como una oportunidad de aprendizaje. Por otro lado, por parte del alumnado, mejorar sus habilidades socioafectivas, que no son solo habilidades sociales, sino que también debemos vincularlas a la matemática. Delcor y Morera (2022) ponen como ejemplos de estas habilidades, a las que podríamos llamar *soft skills*, la responsabilidad, la cooperación, la autonomía y la gestión emocional. Y las aplican al contexto matemático.

Tener responsabilidad matemática, es trabajar de manera constante, eficiente y perseverante (en la resolución de problemas, no solo encontrar una solución, sino insistir, no rendirse, y probar otras soluciones, quizás, óptimas). Tener una buena actitud hacia los problemas matemáticos y de manera cooperativa, es decir, construir conocimiento matemático en conjunto, entre compañeros y dar argumentos que se complementen. Ser autónomo y tener iniciativa sería, en clase de matemáticas, hacerse preguntas, partir un problema en partes, buscar soluciones particulares para, después, generalizar. Y tener la habilidad de la gestión emocional en el entorno de las matemáticas podría ser, por ejemplo, el hecho de saber gestionar el error (Delcor y Morera, 2022). Y concluyen: “Las matemáticas nos dan la oportunidad de desarrollar estas habilidades socioafectivas y, al revés, focalizar en estas habilidades socioafectivas también nos ayuda en las matemáticas”⁵ (Delcor y Morera, 2022, 01:01:55).

Una preocupación común a muchos docentes es: *y esto, ¿cómo lo llevamos al aula?* Delcor y Morera (2022) sugieren empezar por trabajar las habilidades con uno mismo, mientras que Garrido (en Palop y Morales, 2024), más concreta, pone el foco en la evaluación, ya que es el área, afirma, a la que normalmente menos recursos se destinan. Para ello, la misma autora propone ayudar al alumnado a tener una percepción más realista tanto de sus dificultades, como de su esfuerzo, siendo más conscientes de su proceso de aprendizaje. Por un lado, dando una retroalimentación de tareas con rúbricas y no con calificaciones, de modo que podamos detectar aquellos patrones que pueden dificultar el aprendizaje (por ejemplo, equivocarse siempre en la representación gráfica). Por otro lado, Garrido (en Palop y Morales, 2024) también sugiere la realización de actividades de autoevaluación y registro, incluso, del estado de ánimo del alumnado y de la percepción de lo que acaban de realizar (*¿crees que lo has realizado bien?*). Poniendo de manifiesto lo que comentábamos al principio, que esta competencia socioafectiva está estrechamente relacionada con la competencia de aprender a aprender y la metacognición. Otro enfoque igualmente interesante sugiere Luna (2024), cuando propone estrategias para ayudar al alumnado en la resolución de tareas, dando sutiles pistas que le ayuden a alcanzar por sí mismo los objetivos, sin que este tenga la sensación de que lo tiene más fácil que el resto.

De algún modo u otro, y como vemos de manera transversal en este trabajo, los docentes jugamos un papel fundamental en las emociones, aquellas que transitamos junto a nuestros alumnos e incluso las que hacemos emerger. Además de apoyar las visiones de los autores anteriormente citados, nuestra aportación para mejorar las habilidades socioafectivas es promover el uso de los materiales manipulativos en el aula de matemáticas.

⁵ Este enfoque de la responsabilidad, cooperación, autonomía y gestión emocional aplicadas al contexto matemático también deberíamos tenerlo en cuenta en la evaluación a nuestros estudiantes, a menudo basada en pruebas que puntúan la absorción de conceptos y no tanto la adquisición de competencias.

2.4 Material manipulativo

Con una mirada retrospectiva histórica se puede afirmar que, desde la primera ley educativa, la Ley Moyano de 1857, el enfoque de la educación ha ido cambiando significativamente con el paso de los años. Uno de los cambios más relevantes, gracias a la teoría constructivista de Jean Piaget, es enfatizar el hecho de que los niños construyen el conocimiento a partir de sus propias experiencias (Piaget, 1991). Según Miguel y Chamoso (1995) la calidad de la enseñanza en general (así como de las matemáticas, en particular), exige⁶ introducir diversos materiales y otros recursos, tratando de que la clase sea más receptiva, práctica, manipulativa y amena. Este enfoque se vuelve especialmente relevante en el uso del material manipulativo en el aula de matemáticas, ya que no solo permite un acercamiento a las matemáticas desde la instrucción del profesor, sino desde la propia manipulación por parte del alumno, que descubre y construye aprendizajes con sus propias manos.

A continuación, se presenta una visión histórica sobre el uso de materiales manipulativos concretos en la enseñanza de las matemáticas. Previamente, debemos definir el material manipulativo. La Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX (2015) lo define como “cualquier objeto que sea susceptible de ser utilizado en clase de matemáticas con intención de introducir, consolidar o profundizar un determinado contenido o idea matemática”⁷ (párr. 9).

2.4.1 Trayectoria histórica

Las primeras evidencias que se atribuyen al surgimiento de las matemáticas datan del tercer milenio a.C., en Babilonia y Egipto. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos. Encontramos vestigios numéricos (muescas sobre huesos) y geométricos (formas en cerámica) que muestran la existencia de los primeros instrumentos para hacer matemáticas (Talavera, 2023).

Más adelante, encontramos materiales concretos probablemente creados específicamente para la enseñanza de las matemáticas, como nudos en cuerdas, piedras y otros objetos, que permitían a las escuelas antiguas (como la escuela Pitagórica, fundada en Crotona hacia 518 a. C.) hacer las primeras demostraciones matemáticas. Uno de los primeros objetos concretos es el ábaco, que hace posible la conexión entre la escritura de números y la operación, lo que conlleva una lucha entre los “abaquistas” (representado por Pitágoras) y los “logaristas” (representado por Boethius), que discuten sobre la idea de que las operaciones matemáticas pueden resolver situaciones, reemplazando así el uso del material. No obstante, siguen existiendo a lo largo de la historia otros materiales, como la regla, el compás, la brújula y modelos geométricos tridimensionales (presentes en pinturas del siglo

⁶ A nuestro entender, la palabra exige tiene un significado demasiado categórico. La introducción de materiales y otros recursos es solo una posible mejora a la calidad de la enseñanza, en ningún caso la única. En este trabajo se fomenta el uso del material manipulativo, pero no sería la única herramienta posible para la mejora del sistema educativo.

⁷ Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

XVI), que refuerzan la idea de que las matemáticas nacen de la realidad y describen el mundo que nos rodea (Valenzuela, 2012) y, por tanto, deben estar presentes en la didáctica de las matemáticas.

Las ideas de filósofos empiristas como Comenius y Rousseau, tienen gran influencia en la educación. Comenius sugiere usar las herramientas de la vida real, o por lo menos las imágenes de estas, en la clase y sostiene que el conocimiento tiene origen en los sentidos, por tanto, los objetos hay que mostrarlos, no describirlos (González Marí, 2010). Rousseau, en su libro *Emilio*, publica las bases de lo que llama aprendizaje por experimentación y educación sensorial (González Marí, 2010).

El pedagogo Friedrich Fröbel, crea la primera escuela infantil alemana en 1837, donde desarrolla un método educativo basado en el juego con un material didáctico distribuido en distintas cajas a las que llama dones (González Marí, 2010). Sus teorías sobre juegos y aprendizajes revolucionan la enseñanza. Además, es importante destacar la influencia de estos filósofos en la educación especial⁸, ya que construyen materiales específicos para su enseñanza.

Estos trabajos son fuente de inspiración para la pedagoga italiana María Montessori, quien sienta los cimientos de toda una metodología de enseñanza que lleva su nombre. Decroly y Montessori resaltan ambos que se debe partir de la respuesta de los sentidos, es decir, de lo concreto y no de la facultad intelectual (Valenzuela, 2012). No obstante, mientras que Decroly propone estudiar directamente los fenómenos que conducen a observaciones analíticas, Montessori, en cambio, sugiere el uso de material artificial (Castelnuovo, 1970). Según Ramellini (2024), este segundo tipo, el de materiales propios para hacer matemáticas, sería más propicio para hacer el salto de lo concreto al abstracto.

Como señalábamos al principio, también Piaget propicia el material como medio de aprendizaje, aunque no por la atracción que pueda sentir el niño por el material en sí, sino más bien por las operaciones que pueda hacer sobre el objeto (Castelnuovo, 1970). Ya en el siglo XX, el catalán Puig Adam⁹ es uno de los precursores de la didáctica de las matemáticas e impulsor de su modernización. Perteneció a la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza Matemática (CIEAEM) y escribió un documento basado en la 11ª Reunión en Madrid, en abril de 1957, llamado *El material de la enseñanza matemática*. Este certamen es recordado como el primer encuentro registrado de carácter internacional sobre el material didáctico matemático. A partir de este encuentro, durante los años 1950 a 1970 hubo una difusión de los materiales manipulativos estructurados, que veremos clasificados en el siguiente apartado (Valenzuela, 2012).

⁸ Sería interesante indagar más en la aplicación de materiales manipulativos como medida a la atención a la diversidad, aunque, bajo nuestra perspectiva, su uso debe ser más bien considerado una medida de soporte universal, siendo de utilidad para todo el alumnado, tenga o no necesidades educativas especiales.

⁹ Se anexa al final de este trabajo su Decálogo de la Didáctica de la Matemática, que puede ser de interés para los lectores [Anexo 1].

2.4.2 Materiales estructurados y no estructurados

Lo primero que tenemos que destacar es que cuando denotamos la existencia de materiales manipulables debemos diferenciar entre material didáctico estructurado y material didáctico no estructurado. González Marí (2010) divide los materiales en:

- Material didáctico estructurado: materiales o modelos manipulables pensados y fabricados expresamente para enseñar y aprender matemáticas (regletas, ábacos, bloques lógicos, etc.).
- Recursos: cualquier tipo de medio que se puede utilizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dentro de los recursos, cita, como tipos relevantes:
 - Material didáctico no estructurado: material manipulable común cuya finalidad usual no es la de servir a la enseñanza de las matemáticas (por ejemplo, materiales reciclados o piezas sueltas).
 - Recursos que no son material manipulable: otros materiales (por ejemplo, imágenes o personas).

Bajo esta clasificación, dentro del material no estructurado, cualquier objeto es susceptible a ser considerado material manipulativo. Por ejemplo, un lápiz común puede ser un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas en muchas etapas educativas. En Infantil, podríamos comparar longitudes o utilizarlos en el conteo de objetos. En Primaria, podríamos tomarlo como unidad de medida o, a finales de etapa, reconocer las figuras geométricas que lo forman (prisma hexagonal y cono). En la ESO, podríamos calcular su volumen o área lateral. Ya en Bachillerato, incluso podríamos descubrir que las curvas que se forman en el contorno del cono cuando se une al cuerpo del prisma son ramas de hipérbola (Aubanell, 2013).

“Un material no es un recurso, es necesario sumergirlo en una actividad que lo convierta en instrumento de educación matemática. Recurso = Material + Actividad”¹⁰ (Alsina y otros, 2019, p. 91). Así, un material puede dar lugar a diversos recursos. Por ejemplo, unas fichas (tipo parchís) podemos usarlas para sumar y restar enteros (por ejemplo, siendo las verdes, los enteros positivos y, las rojas, los negativos, que se cancelan entre ellas). También podríamos introducir algunas de ellas en una bolsa, siguiendo una proporción y luego, experimentar y comprobar que se cumple la probabilidad teórica. O bien, estudiar su reflejo en un espejo para visualizar las proporciones ($1/4$ de 20 es 5). Otro ejemplo son las piezas imantadas, con las que muchos niños juegan desde pequeños, son ideales para construir objetos geométricos tridimensionales.

De igual modo, también podemos crear materiales según la necesidad. Por ejemplo, un dominó para conectar objetos geométricos con su área o su perímetro, otro para relacionar los distintos significados de fracción. Son ejemplos de objetos cotidianos que podemos convertirlos en material matemático.

Debido a la extensa variedad de materiales, no se podrían presentar todos en este trabajo, pero sí que se ha considerado conveniente mostrar (y desarrollar determinados en anexos) aquellos más conocidos y que forman parte de la

¹⁰ Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

investigación. Algunos de los criterios bajo los cuales estos pueden clasificarse son: según su versatilidad, según la edad para los que resultan adecuados, según la vinculación con un concepto en particular o según el material de fabricación. Siguiendo la clasificación que determina González Marí (2010) desde el punto de vista de los contenidos que se trabajan¹¹ encontramos (entre otros):

1. Pensamiento lógico-matemático:
 - a. Bloques lógicos [Anexo 2].
 - b. Secuencias.
2. Numeración y operaciones aritméticas:
 - a. Regletas (Cuisenaire o de Maria Antònia Canals) [Anexo 3].
 - b. Ábacos.
 - c. Bloques multibase (material base 10) [Anexo 4].
 - d. Dominós de números y operaciones.
 - e. Material para fracciones [Anexo 5].
3. Geometría y medida:
 - a. Tangram (chino, pitagórico, egipcio...) [Anexo 6].
 - b. Mosaicos y teselaciones (bloques geométricos o *Pattern Blocks*) [Anexo 7].
 - c. Construcciones geométricas.
 - d. Geoplanos [Anexo 8].
 - e. Espejos [Anexo 9].
4. Medida:
 - a. Material sistema métrico decimal.
 - b. Instrumentos de medida.
5. Tratamiento de la información, azar y probabilidad:
 - a. Dados [Anexo 10].
 - b. Bolas y monedas¹².
6. Patrones y regularidades. Iniciación al álgebra:
 - a. Balanzas.
 - b. Policubos [Anexo 12].
7. Material polivalente:
 - a. Poliominós (tetraminós, pentominós, hexaminós...) [Anexo 13].

¹¹ Cabe destacar que un mismo material puede servir para trabajar en distintas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, el geoplano y el tangram son materiales que tanto pueden desarrollar contenidos de geometría, como de medida, así como las regletas las encontramos en numeración, pero también en medida y patrones. Para limitar la extensión de este apartado, solo se mencionan los materiales más relevantes y en una sola familia.

¹² Las fichas o contadores podríamos incluirlos en esta categoría [Anexo 11].

2.5 Ventajas y limitaciones

Como hemos visto, el uso en el quehacer matemático de materiales concretos nace, en tiempos antiguos, de la necesidad de resolver problemas matemáticos del día a día, pero esta necesidad desaparece, con los algoritmos. Podemos decir que, históricamente, el material manipulativo ha sido más o menos utilizado dependiendo de las corrientes de pensamiento del momento y así ha influido también en la enseñanza de la materia. Por ejemplo, la intervención de la *New Mathematics*, hizo que en los años 70 en el currículum de matemáticas predominara el álgebra y la topología, frente a la matemática clásica (geometría), usando muchísimos más procesos de mecanización y menos de manipulación (Corti, 2022a).

Actualmente, numerosos autores promueven el uso de materiales manipulativos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Precisamente en el área de la geometría, es donde encontramos mayor unanimidad en la recomendación del uso de materiales manipulativos para su aprendizaje. Algunos argumentos a favor los da Castelnovo (1970) cuando defiende que se necesita un material manipulable para desarrollar las competencias de una geometría intuitiva, ya que el dibujo es insuficiente, y que solo así que se puede pasar de lo concreto a lo abstracto. También Alsina y otros (1987) promueven el uso de materiales educativos para el estudio de la geometría, área en la que es experto, dando ejemplos concretos de su aplicación en el aula tanto en sus libros, como en sus conferencias.

El caso del álgebra nos proporciona una mayor confrontación de opiniones. Moreno (2023), centrándose únicamente en la enseñanza del concepto, afirma que el método tradicional es más rápido y propone, por ello, aplicar un formato híbrido (empezar con material manipulativo, y una vez el proceso esté mecanizado, dar paso al método tradicional)¹³. En contraposición con esta idea encontramos, en las actas del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que, después de haber trabajado con álgebra en la resolución de ecuaciones de primer grado y la traducción a lenguaje algebraico de expresiones verbales:

Trabajar con material manipulativo reducía la angustia de afrontar un tema nuevo, que se llegaba a la abstracción cuando el alumno comprendía bien el sentido real de lo que estaba haciendo y que en el momento que se olvidaba algún paso era más fácil conectar con el aprendizaje realizado en sesiones anteriores (Cros, 2017, p. 479).

Reforzando en este caso la idea de que lo que aporta el material manipulativo va mucho más allá del aprendizaje circunstancial, sino que contribuye a paliar la temida “ansiedad matemática”. Por otro lado, además del impacto emocional, cabe destacar que, si el objetivo no es solo aprobar o absorber un conocimiento en un momento puntual, sino poder recuperarlo en un tiempo, entonces es mejor saber hacer que saber mecanizar.

¹³ En el apartado de los resultados del TFM profundizaremos en este aspecto con la propia experiencia llevada a cabo.

Gardner¹⁴ (1976) ya defendía hace medio siglo que el mejor método para mantener despierto a un estudiante es proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco matemático, una paradoja, un modelo, un trabalenguas, o cualquiera de esas mil cosas que algunos profesores suelen rehuir porque piensan que son frivolidades. De igual modo ocurre con el material manipulativo, siendo a veces considerado una “pérdida de tiempo”. Y es que, pese a que se muestran las virtudes de los materiales, también hay que reconocer las limitaciones de su uso.

Castro (2008) expresa que las objeciones que algunos docentes transmiten con respecto al uso de materiales manipulativos en la enseñanza de la matemática son, entre otros, la escasez de medios económicos, los grupos de alumnos heterogéneos, la necesidad por parte de algunos profesores de pizarra y la tiza sin las cuales no se sienten capacitados para enseñar, la discrepancia con otros profesores del centro y, afirma que para algunos docentes el uso de materiales frena el ritmo de avance. Miguel y Chamoso (1995) recuerdan que el fin último no es lograr que nuestros alumnos se diviertan en clase, sino que aprendan, si puede ser divirtiéndose, mucho mejor. Es decir, no se trata de buscar un entretenimiento para las clases sino un método de trabajo. Cascallana (1988), por su parte, sí que justifica el uso de materiales manipulativos en el aprendizaje matemático, pero advierte que se deben complementar con otros modos de enseñanza.

Entre los más críticos, Baroody (1989), citado por De Castro y Palop (2019), propone que las cajas de materiales deberían venderse con una etiqueta advirtiendo que éstos no garantizan el aprendizaje. Si bien el objetivo es aprender, lo importante en educación es el impacto, por lo que tampoco deberíamos subestimar el poder que puede tener la presentación misma del material.

De Castro y Palop (2019) analizan y determinan las condiciones necesarias para que el uso de materiales manipulativos en matemáticas sea efectivo:

- (1) que los profesores se aseguren de que los alumnos conectan adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas matemáticas que estos representan;
- (2) que el uso sea suficientemente extenso, pero no excesivamente prolongado en el tiempo; y
- (3) que los profesores ayuden a los alumnos, partiendo de los manipulativos, a desarrollar representaciones más abstractas. (p. 244)

Queda claro, pues, que los materiales requieren la presencia y el desempeño del docente al llevar a cabo actividades con ellos, por lo que será fundamental que esté convencido y formado en esta metodología. Además, será necesario evitar una serie de errores en el diseño o utilización del material manipulativo, según Prieto (2014) estos son: la sofisticación del material (que sea demasiado complejo), la intocabilidad del material (que el alumno también pueda tocar el material), la poca cantidad de

¹⁴ Martin Gardner (Oklahoma, 1914-2010) fue uno de los comunicadores matemáticos más renombrados del siglo 20. Durante muchas generaciones, sus libros y artículos han sido la puerta de entrada a una fascinación por las matemáticas del juego, la magia, el arte, el ajedrez, la criptografía o la literatura. A pesar de ser un hombre de letras, tener un título en filosofía y un periodista, fue galardonado por la Sociedad Americana de Matemáticas por su trabajo presentando cuestiones matemáticas de una manera interesante y clara, mientras que la colaboración con matemáticos de renombre (MMACA, s.f.).

material (acorde al alumnado), la adecuación de los conceptos presentados por el material (adaptados al nivel y edad) o creer que el material ya asegura un concepto (pensar que un concepto presentado mediante materiales didácticos va a ser directamente adquirido).

En la misma línea, Ramellini (2024) advierte que los materiales funcionan bien para acercar el concepto antes de dar paso a la abstracción y asegura que un buen material, si es bueno, pide ser abandonado. El riesgo es quedarnos únicamente con el material (Ramellini, 2024). También Calvo y otros (2016) sostienen que “los materiales manipulativos son un recurso indispensable en un inicio y del que los alumnos deben ir despegándose paulatinamente para conseguir la abstracción propia de la matemática” (p. 260)¹⁵.

2.6 Estado de la cuestión

Entre los estudios sobre material manipulativo, destacamos que encontramos diferencias significativas en la cantidad de bibliografía existente según la etapa educativa, revelando una proporcionalidad inversa entre ambos: a medida que avanzamos de cursos decrece el número de propuestas accesibles. Torra (2015) y Novo (2021) son ejemplos de desarrollo en la etapa de educación infantil. Mientras que Torra (2015) propone distintos materiales para el aprendizaje de la numeración y el cálculo en educación infantil, Novo (2021) hace un estudio longevo de 10 cursos en el que su objetivo primordial es “disfrutar ‘haciendo matemáticas’ para perder el miedo y, en consecuencia, lograr que los futuros docentes fueran capaces de transmitir a los niños y a las niñas el gusto por el descubrimiento en nuestra asignatura” (p. 28).

Como apuntábamos, las propuestas en la etapa de Secundaria son más escasas, o se engloban en estudios generales, como el de Sánchez Barbero y otros (2018). Se encuentran, eso sí, materiales más específicos para esta etapa. En el ámbito nacional, podemos citar las aportaciones de Boukafri (2015) en el área de la geometría, y las de Fernández Bravo (2019), al sentido numérico. En el ámbito internacional, hallamos la aplicación del material manipulativo al álgebra, por Da Silva y otros (2021). Esta diferencia tan significativa entre la confianza en los materiales manipulativos en unas etapas y otras, no debería ser así, puesto que, como defiende Torra (2015):

El uso de este tipo de materiales favorece la exploración, ayuda a concretar nociones que requieren abstracción, ofrecen la posibilidad de resaltar distintos aspectos de un mismo concepto y ayuda a la construcción de modelos a los que recurrir cuando el material ya no está disponible. (p. 61)

¹⁵ Si bien apoyamos la idea de que el material manipulativo es una excelente propuesta como actividad de iniciación, no creemos que necesariamente deba ser abandonado, sino que puede ir complementándose junto a otras metodologías en clase, ya sea en el desarrollo de la situación de aprendizaje o como cierre de esta.

Este razonamiento es válido independientemente de la edad, el curso o el contenido. Maria Antònia Canals¹⁶, todo un referente en la didáctica de la matemática y el uso de los materiales manipulativos, también señala que “somos muchos los maestros que creemos que hoy en día en la escuela, a todos los niveles educativos, se infravalora el uso del material manipulable para el aprendizaje de las matemáticas”¹⁷ (Canals, 2001, p. 50) y es crítica en cuanto a los posibles motivos afirmando que:

A los maestros, les cuesta aceptar una dinámica de clase más basada en la experimentación, y tienden a la solución más fácil de la ficha escrita; cabe decir que en eso actúan demasiado a menudo empujados por la presión de las editoriales. (p. 51)

Y es que, a veces, las prisas por impartir la completitud del temario impiden a los docentes hacerlo todo lo bien que quisieran. En el aula no debería preocupar tanto la cantidad como la calidad de lo que enseñamos y el fin que perseguimos. Si bien en la elaboración de este trabajo no se ha logrado recabar una gran suma de estudios de material manipulativo en Secundaria, sí que se ha conseguido localizar numerosos bancos de recursos, donde encontrar problemas adecuados a esta etapa. Se agregan algunos enlaces web en anexos¹⁸ [Anexo 15].

En cuanto a las investigaciones sobre las emociones en la práctica docente, en particular, en el ámbito universitario, Lozano y otros (2022) relacionan:

Cuando las asignaturas son accesibles para los alumnos y se obtienen resultados positivos es cuando aparecen las emociones positivas, por ejemplo, de libertad, justicia, logro, amor, aceptación, admiración, alivio, autonomía, compromiso, entusiasmo, ilusión, plenitud, serenidad, pasión, felicidad. (p. 447)

Como destaca Corti (2017) “algunas prácticas docentes dan más apertura a que las emociones salgan a la luz que otras, coincidiendo con la concepción de cada profesor con su rol docente y su papel en la relación pedagógica” (p. 241). Mi¹⁹ aportación a esta temática es la creación de un perfil en la red social Instagram, @mamatematica, con la intención de promover el uso del material manipulativo y mostrar actividades a otros usuarios. En ese proceso, hemos encontrado otros docentes que, usando el material manipulativo o no, también tratan de dar despertar las emociones de sus alumnos y se preocupan por la percepción que estos tienen sobre las matemáticas, lo cual nos ha llevado a pensar que somos muchísimos docentes los que sentimos

¹⁶ Se anexa al final de este trabajo su Decálogo de la Didáctica de la Matemática, que puede ser de interés para los lectores [Anexo 14]. Conferencia plenaria de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) 2024: “*Leed a Maria Antònia, leed a Maria Antònia, ella es la maestra de todos nosotros*” (Ruiz Aguilera, 2024).

¹⁷ Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

¹⁸ Estas fuentes de recursos no incluyen únicamente actividades con material manipulativo, sino propuestas de índoles variadas.

¹⁹ En este caso, se usa la primera forma del singular por ser una red social gestionada únicamente por la autora, con el apoyo y soporte de la directora de este trabajo. En el Anexo 16 puede obtenerse más información sobre el contenido del *site*. La página no desaparecerá al finalizar este trabajo, sino que pretende ser el punto de partida y tener continuidad después de este.

verdadera vocación, nos entusiasman las matemáticas y nos emocionamos desempeñando nuestra labor educativa. Es un colectivo del cual podemos enorgullecernos.

Concluyendo el marco teórico, y como aspecto a enriquecer, destacamos las palabras de Cascallana (1988, citado por Miguel y Chamoso, 1995):

El objetivo último perseguido es conseguir que los niños sean intelectualmente curiosos, que estén interesados en el mundo que les rodea, sin temor a equivocarse; en definitiva, a pensar por sí mismos y que en este proceso hagan su pensamiento más lógico y adecuado a la realidad. No obstante, es difícil conseguir esto con los niños si a la vez los profesores no son también intelectualmente inquietos. (p. 318)

El ámbito de mejora es, como reconocen Lozano y otros (2022) en su estudio, que “el alumnado no rechaza experimentar las emociones negativas, no obstante, consideran que muchas de ellas se deben a la falta de empatía y comprensión por parte del profesorado, que en general, carece de formación en educación emocional²⁰” (p. 1712). Es necesaria, pues, una formación específica en este ámbito, ya estas emociones negativas perjudican al alumnado en su aprendizaje (Lozano y otros, 2022).

En futuras investigaciones, es importante poner el foco en el docente. Bueno (2017) sostiene la idea de que educar quiere decir cambiar el cerebro de los demás, pero advierte que es un proceso bidireccional, y que a la vez que modificamos las conexiones de nuestros alumnos, ellos están actuando sobre las nuestras.

²⁰ Bajo nuestra percepción, es una afirmación demasiado generalista. Si bien conviene preparación más amplia, cada vez somos más docentes con interés en formarnos en este asunto.

3 Metodología

El presente trabajo se enmarca en un paradigma socio crítico y combina elementos propios de los métodos cualitativos y cuantitativos. Se trata de un estudio transversal en el que la selección de las actividades con materiales manipulativos se ha realizado teniendo en cuenta tanto el contenido curricular de matemáticas y la adecuación al curso y nivel de dificultad, como la facilidad de acceso a los materiales, con el fin de que estas prácticas puedan replicarse en un futuro y sirvan de inspiración a los docentes que acompañan los grupos estudiados.

3.1 Objetivos

El objetivo general principal es ofertar evidencias empíricas del impacto positivo que pueden tener los materiales manipulativos en las emociones de los estudiantes de matemáticas, con el fin de promover su uso en las aulas de Secundaria.

Los objetivos específicos de este trabajo son:

1. estudiar las emociones y el proceso de aprendizaje, en particular, de las matemáticas, con el fin de comprender las dificultades para tratar de paliarlas;
2. descubrir y desarrollar actividades ricas²¹ con materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas;
3. elaborar un instrumento que permita analizar los sentimientos del alumnado en la implementación de una propuesta con material manipulativo;
4. identificar diferencia en los sentimientos asociados a las emociones: agrado, motivación, diversión, aburrimiento y ansiedad con y sin materiales manipulativos;
5. acrecentar el colectivo de docentes de Secundaria que utilicen en el aula los materiales manipulativos.

El segundo objetivo general implícito en esta investigación es detectar de primera mano las ventajas y limitaciones del uso de los materiales manipulativos en las clases de matemáticas, a través de la observación participante de un grupo clase en diversas propuestas con este tipo de materiales.

En general, la finalidad del presente proyecto es aumentar la relevancia del sentido socioemocional en el aula de matemáticas.

²¹ Que la tarea ofrezca oportunidades de aprendizaje competencial y un contenido adecuado, y que la gestión fomente un ambiente fructífero de discusión matemática. Además, en nomenclatura del programa de divulgación NRICH de la University of Cambridge, buscamos actividades con un umbral bajo y un techo alto, y también de paredes amplias, concepto que adopta el Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques (CREAMAT), para atender la diversidad de todo el alumnado.

Las hipótesis que se pretenden demostrar son:

- H₁: El agrado hacia las matemáticas del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria es mayor en las clases con materiales manipulativos que en las clases sin ellos.
- H₂: La motivación en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria aumenta respecto a las sesiones sin ellos.
- H₃: La diversión en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria aumenta respecto a las sesiones sin ellos.
- H₄: El aburrimiento en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria disminuye respecto a las sesiones sin ellos.
- H₅: La ansiedad hacia las matemáticas del alumnado de Educación Secundaria es menor en las clases con materiales manipulativos que en las clases sin ellos.

3.2 Diseño metodológico

En el presente trabajo se aplica una metodología mixta. Por un lado, se aplica una metodología cuantitativa en la realización del cuestionario, mediante el cual se recogen evidencias empíricas con el objetivo de demostrar las cinco hipótesis iniciales. En él, los participantes deben valorar aspectos como el agrado, la motivación o la preocupación hacia las matemáticas cuando trabajan con materiales manipulativos.

No obstante, con las preguntas abiertas del final del cuestionario, así como con las observaciones realizadas en el centro de prácticas, se aplica una metodología cualitativa, que busca una comprensión mayor del objeto de estudio. Si bien los resultados de esta segunda parte no serán generalizables, sí que permiten abordar con más profundidad los interrogantes del estudio.

Esta investigación orientada a decisiones propone incorporar los materiales manipulativos en la práctica docente, es decir, integrarlos como metodología en las clases de matemáticas.

3.3 Muestra de estudio

Se aplica un muestreo no probabilístico por accesibilidad, ya que la propuesta se desarrolla en el centro donde se han desarrollado las prácticas del Máster universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), una escuela cristiana que ofrece enseñanza concertada desde la etapa Infantil hasta Secundaria y Bachillerato privado, con un proyecto educativo propio adaptado a las necesidades de sus alumnos. Simultáneamente a la realización de las prácticas, también se ha impartido docencia como profesora sustituta.

Dicha muestra se compone por 115 estudiantes de Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, es decir primero y segundo de ESO, a los que, de forma voluntaria se les invita²² a participar en este estudio de forma anónima. Los 118 alumnos pertenecen a seis grupos clase (tres, de primero de ESO y, otros tres, de segundo de ESO) de unos 20 alumnos cada uno. Dos de estos grupos, uno por curso, han sido observados en el propio ejercicio docente de la investigadora (durante 3 y 8 meses, respectivamente) mientras que, a los otros cuatro grupos únicamente se les ha acompañado de manera puntual durante el curso y en la sesión organizada específicamente para la realización del estudio sobre el impacto emocional con materiales manipulativos. En total, de las 115 respuestas al cuestionario, se desestiman 5 de ellas por contestación evidentemente sin consistencia.

3.4 Instrumento de recogida de datos

En esta investigación se combinan dos técnicas de recogida de información. Por un lado, se realiza un cuestionario al alumnado tras realizar una actividad con materiales manipulativos. Por otro lado, durante la realización de las prácticas y posterior ejercicio docente en el mismo centro, se han ido registrando observaciones casi a diario, especialmente en aquellas sesiones con materiales manipulativos, ya sean sobre apreciaciones del alumnado o sentimientos que ha despertado la experiencia con materiales en la docente.

3.4.1 Cuestionario

El primer instrumento de recogida de datos consiste en un cuestionario formado por 5 partes: datos identificativos, opinión sobre las matemáticas, uso de materiales manipulativos, opinión con materiales manipulativos y preguntas finales.

La tabla de dimensiones del instrumento que aparece a continuación configura el documento que se entrega a los alumnos tras la experiencia con materiales manipulativos, que se adjunta en el Anexo 17, junto a las capturas de pantalla de la base de datos [Anexo 18].

²² Antes de realizar el cuestionario se les explican brevemente los objetivos del estudio y la finalidad académica (realización de un Trabajo Final de Máster). La totalidad de ellos acceden a participar, la mayoría de ellos, con entusiasmo. No únicamente por expresar su conformidad o disconformidad con los materiales manipulativos, sino por el hecho de poder opinar con libertad y sentirse parte de un estudio universitario. Prueba de ello son las respuestas al cuestionario: *“Me ha parecido una actividad curiosa para poder participar en algo tan importante”* y *“Bien porque uno puede poner su opinión anónimamente”*.

Tabla 1
Tabla de dimensiones

Dimensiones	Subdimensiones	Pregunta	Fuente
La primera dimensión consta únicamente de tres datos, que son los que se consideran necesarios y suficientes para poder describir la muestra.			
Datos de identificación	Centro	Centro: _____	<i>Ad hoc.</i>
	Curso	Curso: _____	<i>Ad hoc.</i>
	Sexo	() Chico () Chica	<i>Ad hoc.</i>
En las dos siguientes dimensiones hay nueve frases afirmativas a través de las cuales los estudiantes van a describir su opinión sobre las matemáticas. Para ello, incluimos el siguiente enunciado: <i>En las afirmaciones siguientes, indica en qué medida estás de acuerdo, según la escala 1 a 6 (totalmente en desacuerdo – totalmente de acuerdo). Marca las respuestas con una X.</i>			
Creencias sobre las matemáticas	Utilidad cotidiana	1. Las matemáticas son útiles en mi día a día.	<i>Ad hoc.</i>
		2. Necesitaré las matemáticas en mi día a día en el futuro.	<i>Ad hoc.</i>
	Utilidad académica	3. Las matemáticas serán útiles para mis estudios en el futuro.	<i>Ad hoc.</i>
Actitudes y sentimientos asociados a emociones sobre las matemáticas	Agrado	4. Me gustan las matemáticas.	Mato (2006)
	Motivación	5. Me siento motivado en las clases de matemáticas.	Adaptación de Mato (2006)
	Satisfacción (autoconcepto)	6. Creo que soy bueno en matemáticas.	Adaptación de Mato (2006)
	Diversión	7. Me divierte hacer matemáticas.	<i>Ad hoc.</i>
	Aburrimiento	8. Me aburro en las clases de matemáticas.	<i>Ad hoc.</i>
	Ansiedad	9. Me preocupo cuando pienso en la asignatura de matemáticas.	<i>Ad hoc.</i>
La siguiente dimensión pretende verificar que la muestra no suele utilizar los materiales manipulativos en clase de matemáticas para así poder comparar las			

respuestas después de su experiencia usándolos. Para ello, primero se introduce una definición breve:

Los materiales manipulativos son objetos que se pueden usar en clase de matemáticas para trabajar algún contenido o idea matemática. Por ejemplo: los polícubos, los pentominós, el tangram, el geoplano, los dados...

A continuación, se realizan dos preguntas.

Materiales manipulativos	Conocimiento previo	¿Conocías los materiales manipulativos antes de utilizarlos hoy? () sí () no	<i>Ad hoc.</i>
	Frecuencia de uso	¿Con qué frecuencia usas materiales manipulativos en tus clases de matemáticas? () Una vez por semana o más () Una vez al mes () Muy esporádicamente () Nunca	<i>Ad hoc.</i>

En las dos siguientes dimensiones hay diez frases afirmativas a través de las cuales los estudiantes van a describir su experiencia con los materiales manipulativos. Para ello, incluimos el siguiente enunciado:

A continuación, se presentan unas preguntas relativas a lo que has experimentado hoy. Como antes, en las afirmaciones siguientes, indica en qué medida estás de acuerdo, según la escala 1 a 6 (totalmente en desacuerdo – totalmente de acuerdo). Marca las respuestas con una X.

Las subdimensiones de esta pregunta se corresponden con las subdimensiones de la primera, por lo que las respuestas de ambas podrán ser comparadas para verificar las hipótesis.

Experiencia actividad materiales manipulativos	Agrado	10. Me ha gustado la clase de hoy.	<i>Ad hoc.</i>
	Aburrimiento	11. Me he aburrido en la clase de hoy.	<i>Ad hoc.</i>
	Satisfacción (autoconcepto)	12. Me he sentido capaz de realizar las actividades que me proponían.	<i>Ad hoc.</i>
	Diversión	13. Me he divertido con las actividades con los materiales.	Prieto (2014)
	Aprendizaje	14. He aprendido utilizando los materiales manipulativos.	Prieto (2014)

	Motivación	15. Me he sentido motivado realizando las actividades propuestas.	<i>Ad hoc.</i>
Valoración general	Aprendizaje	16. Me parecen más fáciles de entender las matemáticas con los materiales manipulativos.	Prieto (2014)
	Ansiedad	17. Creo que mi preocupación por las matemáticas disminuiría si usara más a menudo los materiales manipulativos.	<i>Ad hoc.</i>
	Satisfacción	18. Me gustaría utilizar los materiales más veces en clase.	Prieto (2014)
	Agrado	19. Me gustarían más las matemáticas si utilizara más a menudo materiales manipulativos.	Adaptación de Prieto (2014)

La última dimensión pretende estudiar de manera cualitativa las respuestas de los estudiantes.

Buscando la máxima transparencia de sentimientos posible, se les proponen tres preguntas precedidas por el siguiente enunciado:

En las siguientes preguntas puedes expresar con sinceridad lo que sientes.

General	Pregunta abierta	¿Qué te ha parecido la experiencia de hoy? _____	Adaptación de De la Fuente (2020)
	Calificación	¿Qué nota le pondrías a la experiencia con materiales manipulativos del 0 al 10? _____	Adaptación de De la Fuente (2020)
	Pregunta abierta	Intenta buscar en tu mente un recuerdo positivo en una clase de matemáticas. ¿Me lo explicas? ¿Cómo te sentías? _____	Adaptación de Corti (2022)

Nota: Tabla de elaboración propia.

El cuestionario se entrega en formato físico en lugar de en línea, atendiendo a los siguientes motivos:

- Inmediatez de realización: en el momento en el que se finaliza la ficha de la actividad, se reparte y completa la encuesta, obteniendo los resultados al momento y sin necesidad de tener que ir a buscar otros dispositivos.
- Accesibilidad: evitamos posibles inconvenientes derivados de las herramientas digitales como el olvido, la descarga de batería, problemas con el acceso a internet...
- Contexto: el presente trabajo trata sobre materiales manipulativos y emociones, por lo que se considera que tiene sentido la realización del cuestionario "a mano".

El hecho de tener que volcar los datos posteriormente en Excel para poder ser estudiados no supone un problema tanto por el volumen de respuestas (que no es excesivamente grande), como por la tipología de preguntas (muchas de ellas son preguntas cerradas, fáciles de responder y codificar y que permiten ser comparadas entre ellas con facilidad).

Este cuestionario ha sido validado de dos formas complementarias:

- Por juicio de expertos, mediante la revisión y validación por una experta en metodología.
- Por prueba piloto, con un primer grupo formado por 20 alumnos. Tras la aplicación piloto, se realizan unos cambios mínimos (ajustes estéticos de las imágenes y alineado de texto) que no afectan a las preguntas.

3.4.2 Observaciones

La segunda técnica de recogida de información es la observación participante, registrada en un diario de campo. El diario tiene como propósito recoger observaciones de la autora de este TFM acerca de lo que percibe sobre los aspectos socioemocionales que se involucran en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas²³ durante el periodo de ocho meses (noviembre a junio) que ha comprendido el estudio. Se intentan reflejar citas textuales de los protagonistas de esta investigación, así como emociones que refleja su actitud corporal. Se realizan anotaciones manuscritas, por ser la forma más ágil e inmediata de capturar lo ocurrido.

²³ Pese a que el objetivo de estudio principal es esta materia, veremos cómo muchas de las observaciones registradas son extrapolables a cualquier ejercicio docente, no siendo excluyentes para la asignatura de matemáticas.

4 Resultados

En este apartado explicaremos cómo hemos llevado al aula los materiales manipulativos, cuál es nuestra experiencia derivada de ello, indicando las limitaciones y potencialidades y mostraremos el análisis al cuestionario realizado entre los participantes del estudio, que nos permite evaluar las cinco hipótesis planteadas.

4.1 Actividades con material manipulativo

Como ya adelantábamos en la descripción de la metodología, algunos de los grupos estudiados han sido acompañados durante más tiempo que otros. Con ellos, se han llevado a cabo varias propuestas con materiales manipulativos. Se citan algunas²⁴:

- Actividad 1: Números primos, descomposición y cálculo máximo común divisor y mínimo común múltiplo con policubos [Anexo 12].
- Actividad 2: Visualización de fracciones con contadores y espejos [Anexo 9].
- Actividad 3: Suma de fracciones construyendo el círculo unidad [Anexo 5].
- Actividad 4: Ecuaciones de primer grado con el método balanza²⁵ [Anexo 19].
- Actividad 5: Proporción y porcentajes con material base 10 [Anexo 4]²⁶.
- Actividad 6: Introducción a los polinomios con policubos.
- Actividad 7: Repaso suma de enteros con contadores [Anexo 11].
- Actividad 8: Funciones de segundo grado: representación de parábolas con regletas [Anexo 3].
- Actividad 9: Demostración con papel del Teorema de Pitágoras²⁷.
- Actividad 10: Teorema de Pitágoras: una demostración alternativa con regletas.
- Actividad 11: Puzle forma pi en el “Día internacional de las Matemáticas” (14 de marzo).²⁸

²⁴ Algunas de estas actividades las podemos visualizar en anexos y/o en @mamatematica. Aunque en ambos casos se describen muy brevemente las propuestas, al llevarlas al aula preparamos adicionalmente una hoja de la actividad (es el caso, por ejemplo, de las actividades 1, 3, 5 y 9) o hacemos el registro de los resultados que vamos obteniendo en el cuaderno del estudiante (actividad 3).

²⁵ Creación de un material específico para la intervención del prácticum 2, basado en una propuesta de Mariel García Montenegro y que puede visualizarse en: <https://www.youtube.com/watch?v=nNBZpysvkFM>

²⁶ Esta propuesta fue desarrollada con los tres grupos de primero de ESO previa a la realización del cuestionario.

²⁷ Esta propuesta fue desarrollada con los tres grupos de segundo de ESO previa a la realización del cuestionario.

²⁸ Además de estas actividades desarrolladas en los cursos estudiados de ESO, también se realizan otras actividades con materiales manipulativos en Bachillerato, en grupos que no pertenecen a la muestra de estudio:

- Actividad 12: Funciones: Posición relativa de rectas, funciones definidas a trozos y límites de funciones con geoplano.
- Actividad 13: Suma de dados: probabilidad de Laplace y ley de los grandes Números [Anexo 10].

4.2 Verificación o refutación de hipótesis

Como uno de los objetivos específicos es identificar diferencia en los sentimientos asociados a las emociones con y sin materiales manipulativos, es necesario corroborar que los grupos estudiados, si bien los conoce con anterioridad (7 de cada 10 estudiantes), no los utilizan con frecuencia. Un 72,72% de los participantes²⁹ afirma que la frecuencia es “Nunca” o “Muy esporádicamente”, por tanto, tiene sentido dicha comparación.

Se analizan las respuestas al cuestionario, comparando las subdimensiones agrado, motivación, diversión, aburrimiento y ansiedad de las sesiones habituales (ítems 1 a 9) con las mismas subdimensiones correspondientes a la sesión con materiales (ítems 10 a 19). Adicionalmente, se amplían las evidencias gracias a las observaciones, que también ayudan a interpretar los resultados numéricos.

4.2.1 Agrado a las matemáticas

El desarrollo de habilidades matemáticas es esencial en la educación no solo de esta materia sino en distintas áreas: ciencia, tecnología o ingeniería; además, es importante en la utilidad cotidiana o laboral, pero a veces es difícil que esta necesidad se corresponda con el agrado que sentimos hacia las matemáticas. En este contexto, con agrado nos referimos al interés y aprecio que tiene el alumnado hacia el estudio y desarrollo de esta disciplina, que se manifiesta, por ejemplo, con la curiosidad y deseo por entender conceptos matemáticos o aplicaciones nuevas, con el placer en la resolución de problemas o el interés en nuevos desafíos, incluso con las dosis de atención que dirigen a la asignatura.

Con asombro positivo³⁰ nos hemos encontrado que los grupos estudiados manifiestan en el cuestionario un agrado bastante elevado a las matemáticas (sin diferencias por sexo chico-chica³¹). Con un 3,83 sobre 6 de media de “agrado a las matemáticas” (que equivaldría a un 6,39 ponderado a 10), el 82,72% de los estudiantes responde afirmativamente al ítem 4 sobre el agrado (seleccionan 4, 5 o 6 en la escala de Likert). En especial, el agrado aumenta casi un 11% en aquellos alumnos con respuestas elevadas (5 o 6) a la subdimensión de utilidad cotidiana y académica en el futuro (ítems 2 y 3, respectivamente).

No obstante, las respuestas son mayoritariamente afirmativas a si creen que el agrado aumentaría si usaran más los materiales manipulativos (con un promedio de 4,08 sobre 6 en el ítem 19). Además, un indiscutible 84% expresa que le ha gustado la clase con materiales previa a la realización del cuestionario (ítem 10) y el 75%

²⁹ Este porcentaje aumenta a un 85'86% si no tenemos en cuenta el grupo que ha sido acompañado por la autora de este trabajo durante los 8 meses, ya que el 95% este grupo afirma usar materiales manipulativos al menos “Una vez al mes” o “Una vez por semana”.

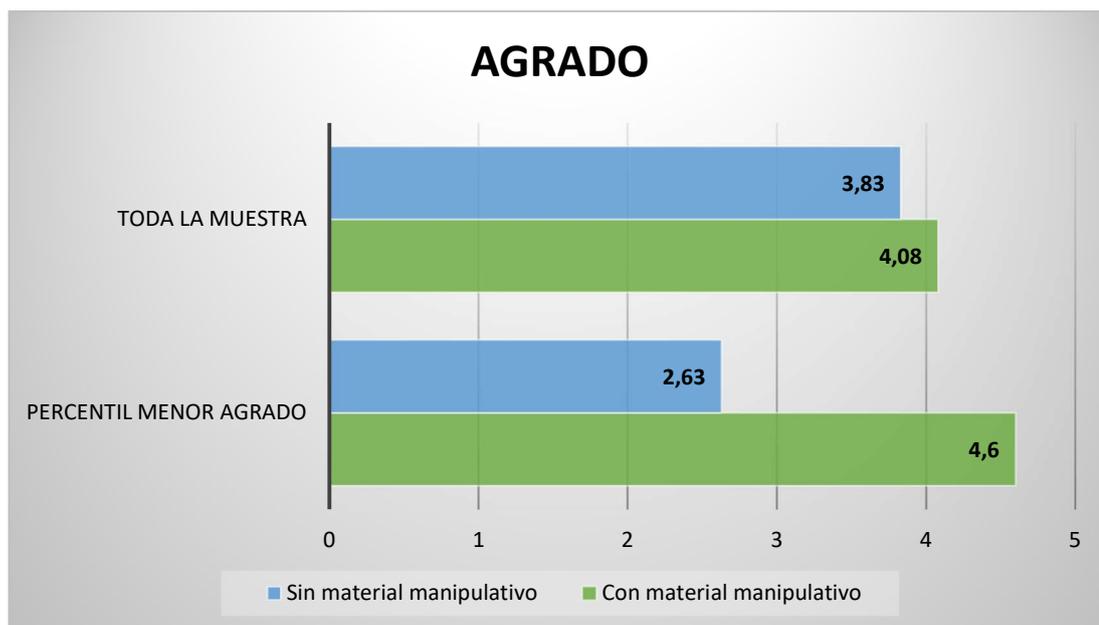
³⁰ La creencia es pensar que, a los estudiantes, generalmente, no les gustan las matemáticas.

³¹ Algunos estudios, como el de Collado (2022) analizan la brecha de género en el aprendizaje de las matemáticas, considerando, entre otras hipótesis, el gusto/preferencia de ellas frente al de ellos.

asegura que les gustaría usarlos más en clase (ítem 18), a la que evalúan con la calificación de 7,85 puntos sobre 10.

Por otro lado, como se aprecia en el siguiente gráfico, la diferencia antes mencionada en el agrado hacia las matemáticas con y sin materiales manipulativos es especialmente significativa en aquellos alumnos a los que menos les gustan las matemáticas (es decir, tomando únicamente las respuestas inferior o igual a 3 en el ítem 4).

Figura 2
Gráfico agrado



Nota: Gráfico de elaboración propia.

Además de las respuestas al cuestionario, también se deduce este resultado de las observaciones de aula, manifestándose en una participación más activa de algunos alumnos a los que normalmente cuesta que intervengan en las sesiones habituales (otros motivos inherentes podrían ser, por ejemplo, por el hecho de realizar las actividades en grupos afines de estudiantes o por la seguridad en uno mismo a la hora de trabajar las matemáticas, que veremos más adelante cuando tratemos el autoconcepto).

Podemos concluir que, una vez analizadas las respuestas correspondientes a esta variable, se observa que el agrado a las matemáticas aumenta en las sesiones con materiales manipulativos, por lo que aceptamos nuestra hipótesis planteada sobre esta dimensión (H_1).

4.2.2 Motivación hacia las matemáticas

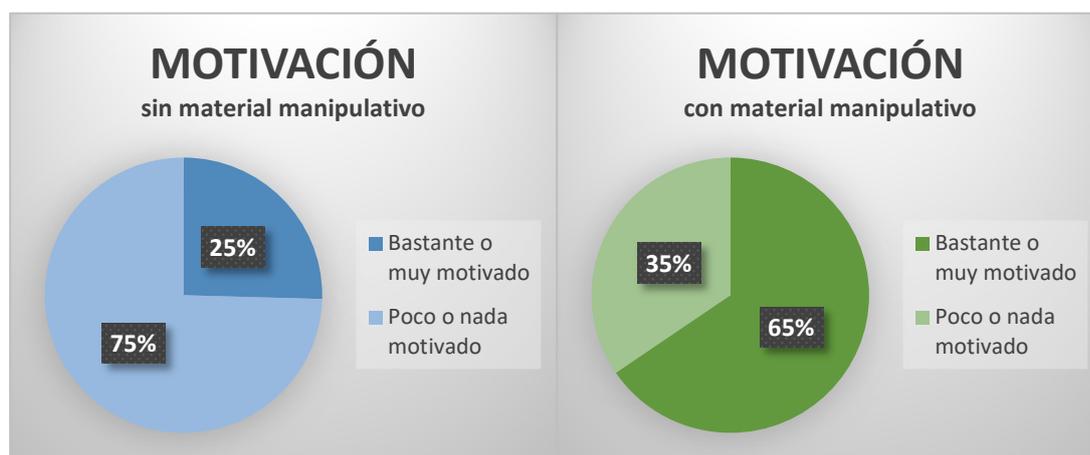
Para motivar (nunca mejor dicho) la relevancia de esta dimensión en el aprendizaje de las matemáticas, citamos a tres profesores referentes en la enseñanza de la materia, que además cuentan con una larga trayectoria, Claudi Alsina, Anton Aubanell y Carme Burgués, y que, en su libro *Anima't! Provocar l'interés per aprendre matemàtiques!*, afirman: “el interés inicial no necesariamente asegura un buen aprendizaje, pero (...) sin el interés, como puerta de acceso a lo que es necesario aprender, difícilmente se puede esperar éxito en la formación matemática”³² (Alsina y otros, 2023, p. 9).

Además, señalan el siguiente origen lingüístico del término a estudiar:

El verbo motivar proviene del verbo latí *movere* (mover), la cual cosa evidencia el sentido subyacente de poner en movimiento alguna cosa, de provocar un cambio, de promover una actitud. Curiosamente, el mismo verbo *movere* está en la raíz etimológica de la palabra emoción. Este parentesco lingüístico ya pone de manifiesto la estrecha relación entre la motivación y la emoción.³³ (Alsina y otros, 2023, p. 10)

Como muestra el siguiente gráfico, en nuestro estudio, solo 28 de los 110 encuestados afirman sentirse bastante o muy motivados en clase de matemáticas (respuestas 5 y 6 al ítem 5 del cuestionario) frente a los 71 de 110 que refieren esa motivación en la clase con materiales (ítem 15). Esto supone la enorme diferencia porcentual entre 25% y el 65% que afirman ese grado de motivación, visible en el siguiente gráfico.

Figura 3
Gráfico motivación



Nota: Gráfico de elaboración propia.

³² Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

³³ Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

Quizás tal diferencia se debe también al propio cambio en la metodología habitual³⁴, sea la que fuere. Habría que estudiar la motivación en las clases con materiales manipulativos cuando estos se conviertan en ordinarios. Otra posible explicación es, por qué no reconocerlo, la pasión por el docente por este sistema. Pese a intentar mantenernos imparciales, cabe admitir que se han preparado las sesiones con ilusión y entusiasmo y que estas emociones, con casi toda seguridad, han traspasado a nuestros alumnos y alumnas. Como afirman los tres autores mencionados anteriormente:

uno de los aspectos importantes para conseguir motivar nuestros alumnos está en intentar compartir emociones positivas, entusiasmo hacia las ideas que estamos enfocando. En educación también transmitimos emociones y, por lo tanto, en nuestro interés por lo que estamos trabajando es clave para generar interés, motivación, en los alumnos³⁵ (Alsina y otros, 2023, p. 10).

Es por ello que durante todo este trabajo se insiste en la necesidad de que cada docente encuentre aquello que le motiva para dar la mejor versión de sí mismo. En nuestra experiencia, nuestra motivación convertida en entusiasmo y afecto por los materiales, nos ha acercado a los sentimientos homólogos en nuestros estudiantes.

Figura 4
Frase María Antònia Canals



Nota: Fuente @mamatematica (2023a)

En esta ocasión, concluimos que la motivación en las sesiones con material manipulativo aumenta, podemos decir considerablemente, con respecto a las sesiones sin él, por lo que aceptamos nuestra hipótesis sobre esta dimensión (H₂).

³⁴ Entre las respuestas del alumnado, se repiten algunas como: "(Sobre la sesión de hoy) Me ha parecido entretenida y muy diferente a lo habitual", "Me ha gustado mucho la experiencia ya que es algo diferente a lo que hacemos los otros días", "Me ha parecido muy divertida y diferente a las de siempre, cosa que me ha gustado mucho", "Divertida y he aprendido más de manera diferente a la que estamos acostumbrados".

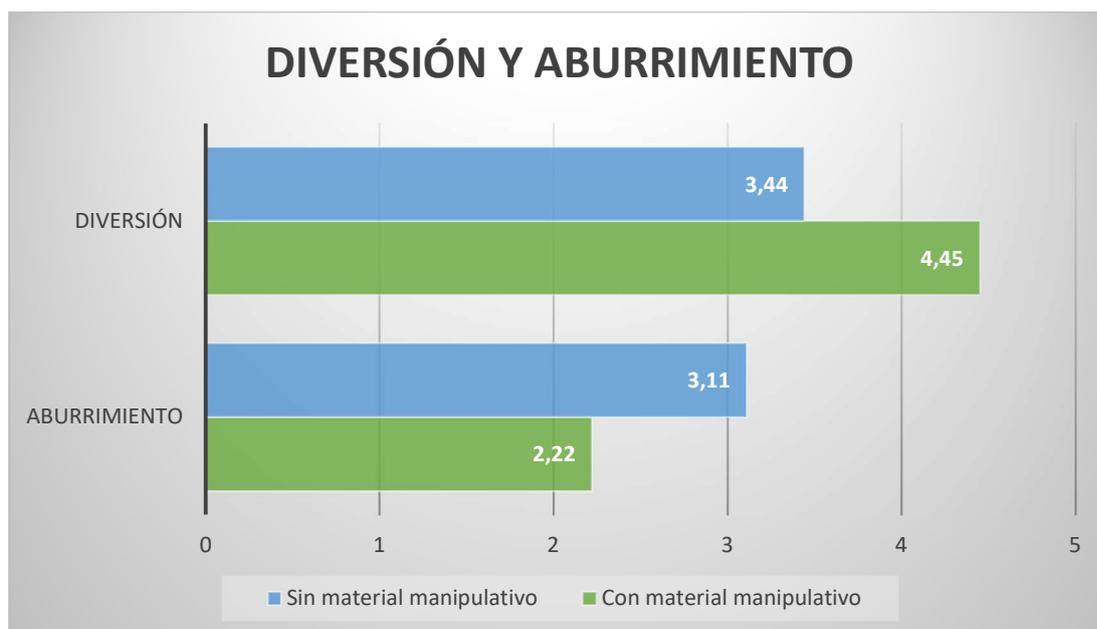
³⁵ Traducción de una cita originalmente escrita en catalán.

4.2.3 Diversión o aburrimiento en las clases de matemáticas

La diversión y el aburrimiento describen estados emocionales opuestos, por lo que se utilizan como antónimos en la mayoría de los contextos. Pese a que al inicio de la investigación se considera el estudio de estas emociones de manera independiente, los resultados revelan lo que la intuición nos dice: si hay diversión, no hay aburrimiento, y viceversa. Es por ello que se analizan los resultados a las subdimensiones correspondientes de manera conjunta en este subapartado.

En las respuestas al cuestionario el alumnado manifiesta leves niveles de aburrimiento sin materiales manipulativos (ítem 8), y una diversión algo mayor (ítem 7), también sin materiales (de nuevo, esperábamos unos índices algo más pesimistas, pero son coherentes con el agrado general a la materia, que ya hemos visto que era superior a la creencia habitual). Como se observa en el siguiente gráfico, es destacable (y proporcional) el aumento de la diversión y la disminución del aburrimiento, en la sesión con materiales manipulativos (ítems 13 y 11), respecto a las sesiones habituales.

Figura 5
Gráfico diversión y aburrimiento



Nota: Gráfico de elaboración propia.

Esto supone en valor absoluto una diferencia de un punto, aproximadamente, en ambas variables (al alza y a la baja, convenientemente).

También en el cuestionario, las respuestas a las preguntas abiertas sobre la satisfacción con la experiencia vivida, algunos alumnos refieren: *“la clase de hoy me ha parecido divertida y activa, no me he aburrido, a diferencia de las otras clases que hacemos normalmente”, “Ha sido muy divertido y me he dado cuenta de que son muy útiles (los materiales manipulativos)”*.

Además, la diversión, entendida como sensación de disfrute, entretenimiento y satisfacción, se ha percibido también en las observaciones, con expresiones faciales que revelan felicidad y emociones positivas.

No obstante, puntualmente algunos alumnos sí refieren que han podido sentir aburrimiento en algún momento de la sesión (probablemente debido a la escasa dificultad en las propuestas planteadas), con respuestas como: “*Aburrida*”, “*Poco divertida*” o “*Divertida, pero en algunos momentos me he aburrido*”, “*Me ha parecido un poco aburrido, quizás el problema es que lo que hemos hecho yo ya lo sabía hacer*”, sobre la actividad. Además, pese a ello, reconocen “*Lo he entendido mejor, pero me he aburrido bastante. No obstante, creo que hacer juegos activos y divertidos te hace tener ganas de hacer mates*”.

Con todo, podemos concluir que, tanto por las respuestas al cuestionario, como por las observaciones, aceptamos nuestras hipótesis sobre el aumento de la diversión y la disminución del aburrimiento de las sesiones con materiales manipulativos, con respecto a las sesiones sin ellos (H_3 e H_4).

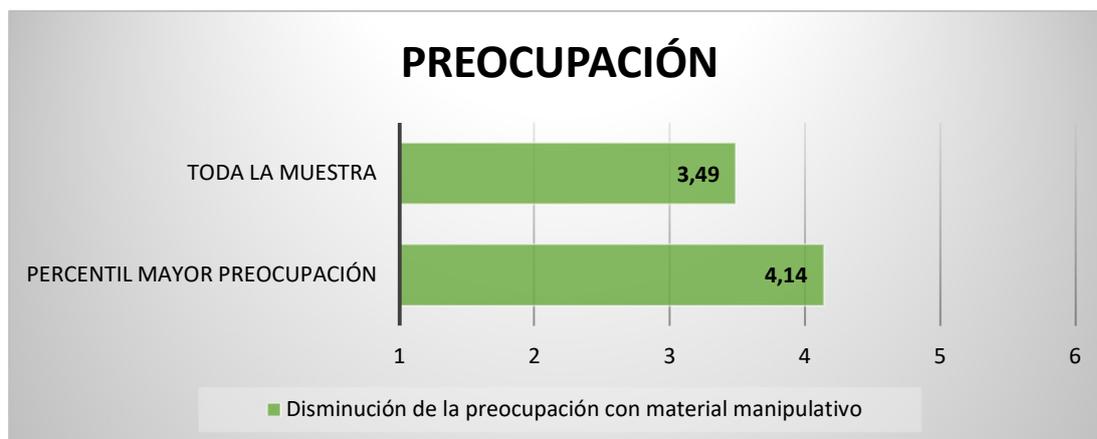
4.2.4 Ansiedad y autoconcepto

La ansiedad es un estado emocional que puede manifestarse como temor o inseguridad al resolver problemas, realizar cálculos o incluso pensar en actividades matemáticas. Puede afectar el rendimiento académico y la relación que una persona tiene con las matemáticas a lo largo de su vida, limitando su desarrollo y habilidades en esta área y es por eso que los docentes desplegamos estrategias educativas e intentamos crear experiencias positivas en torno al aprendizaje matemático. Es una dimensión que hemos explorado a través del cuestionario, pero también, y sobre todo, que reconocemos en el alumnado a medida que compartimos tiempo con ellos.

Con un promedio de 2,85 sobre 6, la ansiedad (preguntada como preocupación, en el ítem 9) no es un sentimiento predominante en los estudiantes encuestados. Es por ello por lo que, en este caso, la comparativa con el ítem 17 sobre la disminución de la preocupación por las matemáticas usando materiales manipulativos, no es consistente³⁶. Pese a que los resultados, representados en el siguiente gráfico, manifiestan que los y las estudiantes están de acuerdo con la afirmación sobre la disminución de la ansiedad, creemos que lo apropiado sería tener en cuenta únicamente las respuestas del alumnado con mayor ansiedad matemática, hecho lo cual, la muestra disminuye notablemente (solo 35 de 110 de los encuestados, refieren una preocupación de 4, 5 o 6 en sus respuestas escritas).

³⁶ Además, la forma como está redactado el ítem 17 difiere del resto de comparativas. Por ejemplo, sobre el agrado: *¿te gustan las clases de matemáticas?* versus *¿te ha gustado la clase de hoy?*, igual que la diversión o el aburrimiento: *¿te diviertes/aburres en clase de matemáticas?* versus *¿te has divertido/aburrido durante la clase de hoy?* Por lo tanto, para ser más correctos, deberíamos haber preguntado: *¿sientes ansiedad en las clases de matemáticas?* versus *¿has sentido ansiedad en la clase de hoy?* (y no preguntar por una hipotética reducción de la ansiedad).

Figura 6
Gráfico preocupación



Nota: Gráfico de elaboración propia.

Es por el tamaño escaso de la muestra, que los datos no son concluyentes, por lo que no podemos aceptar ni refutar nuestra hipótesis sobre la disminución de la ansiedad matemática usando materiales manipulativos (H_5).

Pero no quisiéramos desistir de la investigación de esta dimensión sin señalar la relación aparente entre el autoconcepto y la preocupación matemática. Según los datos de los que disponemos, el alumnado con mayor preocupación matemática muestra mayor diferencia entre su autoconcepto sin material manipulativo (3,45 sobre 6 en el ítem 6) y con material manipulativo (5,17 sobre 6 en el ítem 12). También con sus respuestas sobre la actividad: *“me ha parecido más fácil de aprender”, “he aprendido de una forma diferente, más sencilla y divertida”* o *“me gusta utilizar materiales manipulativos en matemáticas ya que siento que entiendo mejor las cosas y aprendo más”*, denotan que la facilidad con la que perciben el aprendizaje de un concepto se traduce en seguridad en ellos mismos y en una mayor confianza en la propia capacidad para lograr los resultados pretendidos. Subrayamos que la respuesta: *“(Sobre la actividad) Muy divertida, sobre todo porque lo he entendido todo. Es otra manera de hacer matemáticas. Ha sido como un premio, un regalo fantástico”*, que declara un sentimiento compartido con la docente.

4.3 Evaluación de la propuesta: diagnóstico de limitaciones y potencialidades

En nuestra experiencia usando los materiales manipulativos, podemos añadir algunas limitaciones (tanto procedimentales como actitudinales) a las ya comentadas en el apartado 2.5 y sugerimos posibles soluciones para tratar de paliarlas.

Sobre los coeficientes en las ecuaciones mediante el método balanza (Actividad 4): existe una imposibilidad de representar variables continuas (no discretas); por ejemplo, a la hora de dar soluciones fraccionarias a una ecuación. Calvo (2024) refiere que es necesario dejar claro que no es una balanza física, sino una herramienta que nos permite, después de experimentar y representar, pasar a la abstracción y, además, apunta, que es un método también válido para explicar inecuaciones, con algunas limitaciones particulares.

Asimismo, no podemos representar cantidades grandes tanto por el tiempo que tardaríamos en manipularlas (principalmente), como por la dificultad en su almacenaje o el gasto económico que supondría (Actividades 4 y 6, en los coeficientes tanto de las ecuaciones como de los polinomios). Con respecto al tiempo, también nos hemos encontrado con alumnos que comparten que, después de entender el algoritmo, prefieren dejar de usar el material y realizar únicamente las operaciones matemáticas, afirmando: “*voy más rápido así*”.

También es importante resaltar que el material usado debe ser pensado específicamente para la competencia a desarrollar e introducido previamente. Debemos presentar el material, dejar tiempo para que manipulen y se familiaricen³⁷, y dejar claro qué uso queremos darle en esa actividad. Hemos comprobado que cuando un mismo material se emplea en diferentes propuestas, su manipulación es más ágil pues los estudiantes ya entienden el funcionamiento.

Del mismo modo, los detalles como el color, el material y el tamaño, también son importantes. Por ejemplo, la elección de colores para representar coeficientes positivos y negativos en verde y rojo en las ecuaciones (Actividad 4) difiere del modelo en el cual están inspirados (azul y rojo), ya que, como se observa en la imagen, su posición en el círculo cromático (coloración tradicional) justifica mejor la idea de contraposición que se pretende transmitir, y tiene consonancia con el código de colores de las fichas que se usan para sumar enteros (Actividad 7) y con los rotuladores de pizarra que usamos cuando queremos enfatizar la adición o la sustracción. Intentamos reiterar siempre el mismo criterio.

Figura 7
Círculo cromático



³⁷ Tras comentar con un compañero la temática de estudio del presente TFM, nos advierte y recomienda: lo primero que harán cuando les muestres los policubos por primera vez es fabricar “pistolas”. “Promételes que luego les dejarás tiempo para jugar”. Pudimos comprobar que es cierto y que el consejo, ¡funciona!

Siguiendo con la misma actividad de resolución de ecuaciones (Actividad 4), en cuanto al material, este puede tener una vida demasiado corta³⁸; por eso se opta por usar *foam* en lugar de cartulina y facilitar individualmente a cada alumno una bolsa para su almacenaje y mejor conservación.

Se entrega el material pre marcado, pero podrían elaborarlo íntegramente proporcionándoles únicamente el material e instrucciones del tamaño ideal (cuadrados de 1 cm x 1 cm y rectángulos de 1 cm x 5 cm). Se opta por esta opción para anticipar su uso en clase (aunque requiere más tiempo por parte del docente).

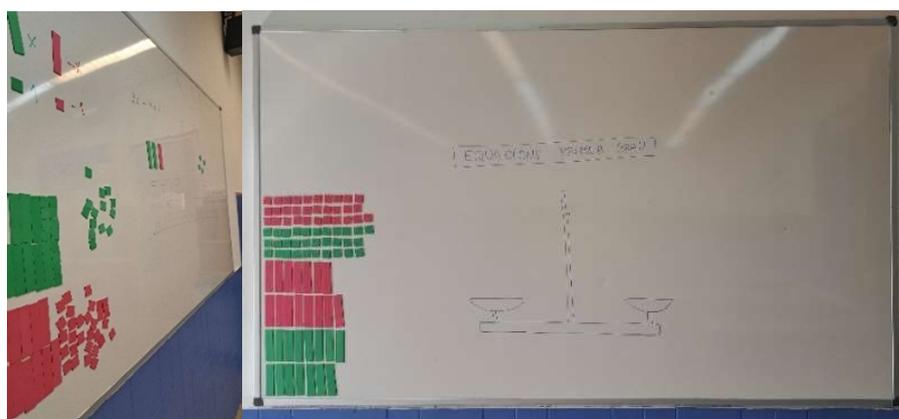
Figura 8
Material ecuaciones alumnado



Nota: Fuente elaboración propia.

Por otro lado, el material del docente es imantado, para poder usarlo en pizarra, y de un tamaño superior (cuadrados de 2,5 cm x 2,5 cm). Fabricado con planchas imantadas A4 y cartulinas de foam con adhesivo de la misma medida, cortadas al tamaño y cantidad adecuadas (aproximadamente, unas 40 unidades de cada). Es importante que la tonalidad se asemeje lo máximo posible al modelo del que disponen los alumnos.

Figura 9
Material ecuaciones docente



Nota: Fuente elaboración propia.

³⁸ Otros materiales estructurados, como los policubos, el material de fracciones, los Pattern Blocks o el material base 10, al ser de plástico, su conservación y mantenimiento es más fácil.

Otro punto a destacar es el momento en el cual realizamos la actividad. No es lo mismo una actividad de inicio (Actividades 2, 4, 6, 7 o 8), que una de aplicación (Actividades 3, 5 o 10). Debemos tener presente que el material es un aliado para mejorar la comprensión del concepto y que, si lo dificulta, es mejor no insistir en ello. Por ejemplo, la demostración del Teorema de Pitágoras con regletas (Actividad 10) solamente se plantea aquellos que han acabado la actividad con papel (Actividad 9) y que han entendido su aplicación. Ilustramos el Teorema de una manera alternativa, que no pretende añadir dificultad, sino activar otras áreas del razonamiento y un pensamiento divergente.

Además de todas las restricciones ya comentadas, también hemos observado la creencia de algunos alumnos de que con material manipulativo hacemos actividades menos relevantes (*“mientras no se haga clase todo bien”, “me ha gustado, porque no hacemos nada”*, opinan dos estudiantes). También afirman que la actividad propuesta no la sienten acorde a su edad (*“ha sido un poco infantil”, o “demasiado infantil. No me gusta sentirme como un bebé”*), creencia que puede venir originada por la poca frecuencia con la que usan materiales manipulativos en la actualidad, como sí solían hacerlo en etapas anteriores.

Por último, se observa una gestión de aula muy diferente a las sesiones con metodología tradicional. El alumnado habla, se mueve y participa muy activamente y esto puede resultar un problema para algunos profesores. Nos hemos encontrado, incluso, algún docente que reconoce sentimiento de “vergüenza” al imaginarse usando materiales en sus clases. Es imprescindible que el docente sienta seguridad y quiera acompañar al alumno, tenga una formación específica y la voluntad (nunca imposición) de adoptar esta metodología, para que el resultado sea óptimo. “Hay evidencia sólida de que la formación adecuada, la certificación y el desarrollo profesional continuo de los docentes son cruciales para el éxito académico de los estudiantes” (Ruiz Aguilera, 2024).

Pese a todas estas apreciaciones a tener en cuenta, hemos podido experimentar de primera mano cómo el material manipulativo despierta la curiosidad del alumnado, desde el primer momento en el que se introduce en el aula, generando muchas preguntas, desde la más básica e inicial: *¿qué material nos traes hoy?* - con alegría, sorpresa y predisposición positiva para afrontar la clase-, hasta reflexiones más profundas: *“¿Y esto lo podríamos generalizar?”*. Hemos recogido evidencias de este hecho: *“Si los cuadrados pequeños son el término independiente, y los rectángulos los términos de grado 1, entonces, ¿el cuadrado grande qué es? Es x^2 ?”* pregunta un alumno de primero al finalizar la segunda sesión con el material de ecuaciones y observar que no hemos usado aún los cuadrados grandes. A otro alumno de segundo (de otro grupo), tras comentar en la hora del almuerzo que le *“han explicado la fórmula de segundo grado”* (refiriéndose a la fórmula de Bhaskara para resolver ecuaciones de segundo grado), le pregunto: *“también se puede resolver con material, ¿quieres que te lo explique?”*. - *“Síiiiiiiii!!!!!!!!!!!!!!”*, responde con muchísimo entusiasmo, a la par que mostrándose sorprendido. Pese a que este método babilónico no fue explicado en clase, sí que lo ilustramos ligeramente junto al grupo de alumnos que allí se encontraban.

Fruto de la curiosidad, nace y crece la atención que muestra el alumnado en las sesiones con materiales manipulativos, tanto a la explicación de la actividad, como, durante el proceso de manipulación que ellos mismos deben llevar a cabo para desarrollarla. Así lo expresan también en el cuestionario, cuando valoran la actividad realizada: *“Una experiencia nueva, creativa, diferente, divertida y que volvería a repetir”* y también en los comentarios verbales, quedándose con ganas de más: *“Cuando volverás a venir a nuestra clase a hacernos alguna actividad ‘tuya’?”*.

Por otro lado, si bien el material manipulativo no entusiasma al 100% de la clase (*“Me ha parecido divertida y entretenida, pero sinceramente prefiero hacer mates sin materiales manipulativos”*, *“Bien, aunque prefiero hacer clases normales”*, responden algunos alumnos al cuestionario), es importante proporcionar metodologías de aula variadas como medida de atención a la diversidad. La redacción escrita o la operativa virtual, puede no ser suficiente para algunos alumnos, en quienes lo sensorial se convierte en una herramienta poderosísima. Poder tocar las matemáticas, literalmente hablando. Confeccionar actividades con materiales manipulativos es producir más oportunidades de aprendizaje para todos. Como afirma una estudiante: *“Yo ahora entiendo, porque antes no entendía mucho”*, tras realizar la actividad con material de fracciones. Hemos detectado, también, que algunos alumnos que a veces pasan (o quieren pasar) desapercibidos, toman mayor protagonismo e iniciativa al sentirse más seguros, pues el material manipulativo no deja rastro del error, y te da la oportunidad de aprender a construirlo de nuevo³⁹. Un ejemplo de ello son las personas voluntarias para preparar el material imantado de la pizarra o para recoger el material base 10 tras la actividad, quienes, hasta entonces, no habían demostrado demasiado interés en la materia.

No menos importante, y cerrando las potencialidades de su uso, el material también nos ayuda anclar las matemáticas una experiencia física, afirma Luna (2024). Este anclaje facilita la abstracción, a la vez que permite recuperar la experiencia en el futuro. *“Le hemos dado sentido a todo lo que hemos estado haciendo hasta ahora”*, afirma una alumna tras la actividad de m.c.m. y m.c.d. con policubos; *“A mí me ha gustado utilizar el material manipulativo para entender la fórmula de $c^2 = a^2 + b^2$ y así poder demostrarla”*, afirma otra en el cuestionario.

4.4 Un recuerdo positivo

El propósito de la última pregunta abierta del cuestionario es poner el foco en las emociones positivas del alumnado. Proponemos responder a la siguiente pregunta a la vez que se acompaña la lectura: Intenta buscar en tu mente un recuerdo positivo en una clase de matemáticas. ¿Qué lo caracterizaba? ¿Como te sentías?

³⁹ El error es también una oportunidad de aprendizaje. En este contexto se quiere enfatizar el hecho de que, por escrito, el alumnado puede ver reflejada una equivocación reiterativa mientras que, gracias al material, puede hacer los cambios necesarios hasta dar con la solución.

¿Lo tienes?⁴⁰ Esta es la pregunta que culminaba el cuestionario y que nos deja muchísimos aprendizajes.

A grandes rasgos, identificamos tres patrones en las respuestas:

- a. La satisfacción personal. Muchos alumnos hacen referencia a las calificaciones: “*Cuando saqué un 10 me sentía feliz*”, “*Cuando empecé a subir mucho las notas en matemáticas, me sentí muy bien*”. Pero también algunos valoran, además, su esfuerzo y aprendizaje: “*El primer trimestre saqué un 10 de media en mates y me sentí muy feliz, ya que todo mi esfuerzo acabó reflejado en mi nota*”, “*Un recuerdo positivo en clase de matemáticas es cada vez que he entendido algún tema y he disfrutado haciéndolo*”.
- b. El reconocimiento docente. Algunas respuestas, más generales: “*Cuando respondo bien a alguna pregunta que hace el profesor o la profesora*”, “*Cuando algún profesor me felicita por algo que he hecho muy bien o cuando el profesor nos explica de donde salen las cosas para así comprenderlo*” y otras, haciendo referencia a momentos más concretos, que no olvidan: “*Mi recuerdo positivo de matemáticas es cuando me ayudaste a hacer los puntos de libro*”, “*Cuando me felicitas, por ejemplo, cuando le dejé el sitio al compañero para que pudiera ver mejor la pizarra*”, “*Cuando me pusiste un 10 en actitud y me felicitaste por sacar un 10, me sentí muy satisfecho*”, “*Cuando el profesor me trajo un cubo de Rubik, me gustan mucho ya que lo sabía hacer, me sentí feliz y motivado*”.
- c. Las actividades desarrolladas. Muchos alumnos refieren las actividades con materiales manipulativos: “*Cuando hicimos la actividad de las pizzas*”. “*Cuando hicimos el trabajo del espejo*”, “*Cuando, con material manipulativo, hicimos las balanzas y me pareció interesante y divertido, porque cuando nos equivocábamos nadie se reía*”, “*Cuando hicimos la actividad de medir longitudes*”, “*Cuando nos explicaste los polinomios con polícubos me pareció muy fácil de entender y divertido*”, “*Una clase de matemáticas usamos el plano cartesiano y me ayudó a entender los sistemas, también la clase de las regletas de colores*”. También otros, refieren actividades sin ellos: “*Cuando hicimos figuras humanas para trabajar las formas geométricas. Me sentí contenta y me divertí mucho*”, “*Cuando hacemos Kahoots o Escape Rooms de mates con ecuaciones, era muy divertido*”, “*Al hacer el juego de las sillas un día en clase, me sentí con ganas de hacer clase y de participar*”, “*El pi day, que hicimos actividades diferentes guais*”.

⁴⁰ Durante la realización Máster universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MUFPS), en la materia Innovación Docente e Investigación Educativa en Matemáticas (IDIE), viajamos al pasado a través de una pregunta muy similar: ¿Qué experiencia excelente recuerdas haber vivido como estudiante en clases de matemáticas en secundaria, bachillerato o universidad? ¿Cómo te sentías? ¿Qué pensabas? ¿Qué hacía que fuera excelente? ¿Quiénes estabais? ¿Qué impacto ha tenido en ti o en otras personas? El análisis de las respuestas fue muy similar a lo acontecido en este estudio, lo que nos hace pensar que, quizás, se puede extrapolar a cualquier edad.

Una respuesta que nos ha llamado la atención es: *“No es un momento concreto, ha sido poder entender y saber hacer todo lo que me has estado explicando durante este curso, por más que no lo haya entendido a la primera, he conseguido entenderlo y demostrarlo. Espero que me sirva para mi futuro”*, ya que hace reflexionar sobre la importancia del día a día, de las pequeñas cosas que no siempre valoramos o pensamos que pasan desapercibidas. Es la suma de pequeños esfuerzos y logros del docente, pero también y sobre todo del alumno, que aprecia el valor del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Nos parece interesante destacar también la respuesta: *“Las veces que hemos usado materiales manipulativos, no me sentía tan presionada. Y, si lo haces en grupo, los compañeros te pueden ayudar”*. Si bien el trabajo cooperativo no es una condición sine qua non para el desarrollo con materiales manipulativos, es cierto que “casan” muy bien y que podemos considerarlo un valor añadido a estas propuestas. En general, en algunas respuestas se entreve la existencia de “bloqueos matemáticos” y la satisfacción personal que supone el hecho de superarlos y muchas veces el aprendizaje entre iguales favorece la mejora en este aspecto.

Por otro lado, un elemento frecuente es la alusión a la diversión, que a veces ocultamos. Puede parecer que, si el alumnado se divierte⁴¹, entonces el aprendizaje no es lícito, cuando, al contrario, ambos elementos pueden ir de la mano. Que los estudiantes se diviertan en clase de matemáticas no es motivo de indecencia, sino de satisfacción y orgullo.

El corolario que podemos extraer de esta pregunta es que el elemento que marca la diferencia en las respuestas del alumnado son las relaciones humanas. Más allá de los conceptos, el denominador común son las personas y la repercusión que tienen esas experiencias, a través de las emociones, en todos nosotros.

⁴¹ Una evidencia de que incluso a ellos les sorprende divertirse en clase de matemáticas es la respuesta al cuestionario sobre la actividad con materiales: *“Es muy ‘guai’ estar haciendo matemáticas mientras te diviertes”*.

5 Conclusiones

5.1 Revisión de los objetivos

La idea que ha fundamentado el presente estudio ha sido fomentar el uso de los materiales manipulativos y sumergirnos en las emociones que influyen en los procesos aprendizaje que, gracias a la última reforma educativa, tienen un lugar físico en el currículum, dándole así valor a las habilidades socioafectivas, además de a las académicas⁴². Tras la realización de este trabajo, ambas cuestiones han impulsado el deseo de la autora de seguir formándose e investigando en estos propósitos. Una vez concluido el análisis, disponemos de evidencias para dar respuestas a la mayoría de las preguntas iniciales y podemos afirmar que los objetivos han sido cumplidos, en especial, aquellos relativos a las emociones propias del docente.

El primer objetivo específico - estudiar las emociones en el aprendizaje de las matemáticas - ha sido satisfecho en la confección del marco teórico. No solo definiéndolas y categorizándolas, sino también vinculándolas al contexto matemático. Con relación al segundo objetivo específico - descubrir y desarrollar actividades ricas con materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas - hemos conseguido recopilar, reproducir, fotografiar y publicar en @mamatematica una cantidad notable de propuestas, muchas de las cuales también hemos llevado al aula, y que hemos aprendido gracias a las formaciones específicas en material manipulativo a las que hemos asistido durante el curso⁴³. Acerca del tercer objetivo específico - elaborar un instrumento para analizar los sentimientos del alumnado en las propuestas con materiales manipulativos - su implementación nos ha permitido analizar los sentimientos del alumnado acerca de los que se les preguntaba. Si bien el cuestionario implementado nos facilita datos cuantitativos que dan lugar al producto de los resultados numéricos que acompañan esa parte del trabajo, son las observaciones y su registro en el cuaderno de campo lo que aporta mayor profundidad a la investigación y mayor sensación de habernos acercado y haber comprendido un poco mejor las emociones del alumnado, un objetivo no explícitamente establecido al inicio del estudio. Sobre el cuarto objetivo específico - identificar diferencia en los sentimientos asociados a las emociones: agrado, motivación, diversión, aburrimiento y ansiedad con y sin materiales manipulativos - se ha cumplido con la verificación o refutación de las hipótesis. Finalmente, en cuanto al quinto objetivo específico - acrecentar el colectivo de docentes de Secundaria que llevan al aula actividades con materiales manipulativos - en nuestro entorno sí que hemos detectado que algunos docentes manifiestan la voluntad de implementar los

⁴² Se desea que, en un futuro, la evaluación también acompañe el diseño del nuevo currículum. Es decir, formar competencialmente a la vez que promover actividades evaluativas que no sean esencialmente memorísticas.

⁴³ Presencialmente, en el CREAMAT: *Nodes d'Impuls Matemàtic (NIM)* y en el MMACA: *Materials manipulatius per l'aula de matemàtiques en l'àmbit del Museu de Matemàtiques de Catalunya*, *Taller de creació de materials pedagògics per treballar la geometria* y *Taller de materials per l'aula basats en paper*. Online, en Docents.cat: *Cicle de xerrades: Matemàtica vivencial i manipulativa. Què treballar i com fer-ho?*

Expreso mi agradecimiento a todos los docentes que las han impartido.

materiales manipulativos en sus sesiones, incluso ya han podido experimentar con algunos de ellos. Al cumplirse todos los objetivos específicos, se cumple el objetivo general - ofertar evidencias empíricas para promover el uso de materiales manipulativos con el fin de despertar las emociones positivas del alumnado, a la vez que se invita a los docentes a emocionarse también con ellos -.

Esperamos poder seguir contribuyendo a esta labor con el depósito de este trabajo, el desempeño futuro de la profesión docente y la divulgación científica en redes. Se da el consentimiento expreso para replicar las actividades aquí mencionadas (citando a los autores pertinentes) siempre que sea con fines didácticos.

A partir de los datos obtenidos revisamos en la siguiente tabla las hipótesis que se perseguían demostrar:

Tabla 2
Revisión de hipótesis

Hipótesis	Resultado
H ₁ : El agrado hacia las matemáticas del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria es mayor en las clases con materiales manipulativos que en las clases sin ellos.	✓
H ₂ : La motivación en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria aumenta respecto a las sesiones sin ellos.	✓
H ₃ : La diversión en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria aumenta respecto a las sesiones sin ellos.	✓
H ₄ : El aburrimiento en las clases de matemáticas con materiales manipulativos del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria disminuye respecto a las sesiones sin ellos.	✓
H ₅ : La ansiedad hacia las matemáticas del alumnado de Educación Secundaria es menor en las clases con materiales manipulativos que en las clases sin ellos.	X

Nota: Tabla de elaboración propia.

La hipótesis sobre la ansiedad hacia las matemáticas no ha podido ser verificada ni refutada ya que el alumnado encuestado no refiere una ansiedad elevada en sus respuestas sin materiales, por lo que la comparativa con la sesión con materiales no es consistente. Pese a ello, los resultados de la reducida muestra con mayor ansiedad matemática sí que manifiestan estar de acuerdo con la afirmación, por lo que conservamos la hipótesis y proponemos algunas mejoras para tratar de verificarla en el futuro.

5.2 Limitaciones del estudio

Si bien el tamaño de la muestra no es suficientemente grande en términos estadísticos, se considera suficiente para el desarrollo de este trabajo de fin de máster. En una investigación más rigurosa, sería necesaria una muestra mucho mayor, incluyendo alumnado de segundo ciclo, para poder extrapolar los resultados a todo el alumnado de Secundaria del territorio.

Además, la limitación de tiempo en la realización de este trabajo (un curso académico) impide la realización de un diseño de investigación que permitiera examinar con profundidad el impacto de este cambio metodológico de una manera longitudinal a través de pruebas diferidas.

Por otro lado, habría sido conveniente realizar el estudio en otros centros educativos, con ubicaciones y naturalezas distintas, y así poder comparar los resultados obtenidos para generalizarlos o bien buscar diferencias significativas.

5.3 Propuestas de mejora

El reconocimiento de la ansiedad, así como otros problemas de salud mental, sigue siendo un tema tabú. Pese a que, en general, detectamos esta emoción en algunos de nuestros alumnos, muy pocos la reconocen en ellos mismos. Intentando anticiparnos a este hecho, en el cuestionario se pregunta como “preocupación”, en lugar de “ansiedad”, pero, aun así, muy pocos alumnos seleccionan un índice elevado. Algunas de las posibles causas son: no querer reconocer una emoción negativa para no enfrentarse a ella, el temor a perder el anonimato al realizar el cuestionario en la misma aula que los compañeros o, simplemente, que no sea una emoción que se manifieste en estos grupos en particular, o en estos cursos (quizás, la ansiedad aumenta en segundo ciclo de la ESO). Se sugiere ser más concreto en la redacción de esta pregunta, por ejemplo: “¿sientes más preocupación en matemáticas que en el resto de asignaturas?” o “¿has sentido preocupación antes, durante o después de realizar la actividad con materiales manipulativos” para intentar encontrar mejores respuestas a este tema.

Otro punto a mejorar es la cuestión de género. Las preguntas de identificación iniciales del cuestionario han sido motivo de controversia y disconformidad manifiesta en algunos alumnos (señalan “¿Por qué?”, añaden “Chique”, “Noie”, al lado de la pregunta, o directamente, no la responden). Si bien se toma la decisión de atender a la identidad vigente en el DNI a la hora de hacer esta pregunta, en un intento de evitar posibles debates no relacionados con el tema de estudio, es precisamente al contrario, provocando inquietud en el alumnado por no ofrecer más que la dicotomía “chico/chica”. Sin ninguna duda, y dado que no se han encontrado diferencias significativas en el estudio según el género del participante, en estudios de naturalezas similares, se sugiere evitar la pregunta o, bien, añadir la posibilidad “Otro”, ya que daría respuesta a cuestiones de la realidad actual.

En cuanto al desarrollo del tema de ecuaciones de primer grado en el prácticum, si bien se introduce el material manipulativo como elemento innovador, se sigue abusando de la práctica reproductiva. En este sentido, se propone mejorar el tipo de actividades inspirándonos, por ejemplo, en la propuesta de práctica productiva de PuntMat⁴⁴.

⁴⁴ Accesible desde el siguiente enlace: <https://puntmat.blogspot.com/2018/09/practica-productiva-equacions-de-primer.html>. Análogamente, se recomienda incorporar práctica productiva y no reproductiva de ecuaciones de segundo grado accesible desde el siguiente enlace: <https://puntmat.blogspot.com/2014/03/practica-productiva-i-equacions-de.html>

5.4 Líneas de investigación futuras

Se propone como línea prospectiva tratar de demostrar las mismas hipótesis planteadas en este trabajo en múltiples centros, ampliando así la muestra del estudio. Incidiendo en las emociones de los estudiantes, el estudio de las prácticas sociales, así como de las condiciones culturales, puede ayudar a dar significado a las reacciones emocionales de los individuos en el aula (Gómez-Chacón, 2011), podrían ser algunos factores diferenciales a estudiar. Por otro lado, dado que en este trabajo nos hemos centrado en las emociones, se sugiere el estudio de los otros descriptores básicos, por ejemplo, se propone indagar en los prejuicios sociales hacia las matemáticas como posible temática de TFM. Por otro lado, como apuntábamos en el desarrollo del trabajo, habría que replicar el estudio de las emociones en las clases con materiales manipulativos si estos se convierten en ordinarios o en un grupo clase donde ya lo sean.

No menos importante, como apuntan Castillo y otros (2013) es interesante prestar atención a las emociones en los docentes y cómo estas influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Si bien en este trabajo hemos penetrado en las emociones de alumnado, se invita al lector a preguntarse cuán importante e influyente es la emoción de uno mismo en la relación con otros. Quién no recuerda a aquel profesor, de la materia que fuera, que emocionándose él mismo, lograba transmitir ese sentimiento a su alumnado.

En este sentido, y concluyendo este trabajo, la mayor revelación implícita en el transcurso de estos meses es que la emoción no depende del material manipulativo, ni de cualquier otra metodología de aula, sino de aquello que a cada docente nos hace vibrar y disfrutar, sentir y emocionarnos con las matemáticas. Innovar es incorporar una novedad de forma intencional para mejorar algún aspecto educativo (Corti, 2022b), es querer mejorar una situación en el aula, planificar y evaluar esta propuesta. Innovación no es sinónimo de insertar tecnología en las aulas, lo que sí que conlleva la innovación es intencionalidad de mejora y cambio. Invito⁴⁵ a los lectores que hayan conectado con el material manipulativo a hacer suyas las propuestas y disfrutarlas junto a su alumnado y, a quienes no haya convencido, a encontrar otra manera de integrar las emociones positivas en sus aulas. Es necesario sentir las para transmitir las. Volviendo a citar a la maestra de maestros, Maria Antònia Canals, *"Los maestros han de ser felices haciendo matemáticas, de ese modo los alumnos también lo serán"*. Individualmente, haciendo un balance de las ventajas-inconvenientes de los materiales manipulativos y, en especial, teniendo en cuenta su impacto emocional en los grupos estudiados y en mí misma, puedo corroborar que seguirán formando parte mi equipaje de mano en el futuro.

⁴⁵ Si bien a lo largo del trabajo he adoptado una escritura en primera forma del plural, pues consideraba que me sentía acompañada por los participantes del estudio y por mi tutora de TFM para poder escribirlo, en las líneas finales de este trabajo, al contener una valoración más personal, pido permiso a los lectores para cambiar el tono de redacción y escribir ahora en primera persona del singular.

6 Bibliografía

- Alsina, C., Aubanell, A. y Burgués, C. (2019). *Tres professors de matemàtiques. Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques*. Rosa Sensat.
- Alsina, C., Aubanell, A. y Burgués, C. (2023). *Anima't! Provocar l'interés per aprendre matemàtiques*. Rosa Sensat.
- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M^a. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Editorial Síntesis.
- Aubanell, A. (2013). *Material manipulatiu* [Apuntes de clase]. Material académico no publicado de la asignatura Didáctica de las Matemáticas del Grado de Matemáticas de la Universitat de Barcelona.
- Ausubel, D. (1980). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.
- Bisquerra, R. (2003). Educación emocional y competencias básicas para la vida. *Revista de Investigación Educativa*, 21(1), 7-43.
- Bisquerra, R. (2016). Universo de emociones: la elaboración de un material didáctico. *Inteligencia Emocional y Bienestar II*, 9, 20-31.
- Boukafri, K. (2015). Resolución de problemas de geometría con material manipulativo o soporte tecnológico. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 89, 49-65.
- Bueno, D. (2017). *Neurociència per a educadors* (10^a ed.). Rosa Sensat.
- Caballero, A. y Blanco, L. J. (2007, 4 al 7 de septiembre). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros. [Comunicación Oral]. *XI Simposio de Investigación y Educación Matemática*. Tenerife, España.
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis.
- Calvo, C. (2024, 19 de julio). *Com podem treballar les equacions i les inequacions a l'ESO?*. [Apuntes de la sesión]. Material académico no publicado del ciclo de charlas online "Matemàtica vivencial i manipulativa. Què treballar i com fer-ho?" dirigidas a profesorado de Infantil, Primaria y Secundaria.
- Canals, M. A. (2001). L'ús del material manipulable en l'aprenentatge de les matemàtiques. *Perspectiva escolar*, 254, 48-56.
- Cárdenas, J. A., Caballero, A. y Gómez del Amo, R. (2014). La evaluación del dominio afectivo en matemáticas. *International Journal of Developmental and Educational Psychology: INFAD. Revista de Psicología*, 7(1), 333-342.
- Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación a la Matemática. Materiales y recursos didácticos*. Santillana.
- Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. Trillas.
- Castro, E. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España*. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.),

- Investigación en educación matemática XII (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Collado, J. (2022). *La brecha de género en matemáticas. Un camino de baldosas amarillas*. [Trabajo fin de máster, Universitat Abat Oliba CEU]. Recercat. <http://hdl.handle.net/2072/522540>
- Corti, F. (2017). *La contemporaneidad en la relación pedagógica. Un estudio de casos en un aula de secundaria* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. TDX. https://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/586093/FRANCIELE%20CORTI_TESIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Corti, F. (2022a). *El aprendizaje de las Matemáticas* [Archivo PDF]. Material académico no publicado de la asignatura Fundamentos del aprendizaje y enseñanza de Matemáticas del Máster Universitario en Formación del Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universitat Abat Oliba CEU.
- Corti, F. (2022b). *Introducción a la investigación y a la innovación* [Archivo PPT]. Material académico no publicado de la asignatura Innovación Docente e Investigación Educativa en Matemáticas del Máster Universitario en Formación del Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universitat Abat Oliba CEU.
- Couso, M. (2023). *Cerebro, infancia y juego. Cómo los juegos de mesa cambian el cerebro*. Editorial Planeta.
- Cros, L. (2017). Si Al-Khwarizmí levantara la cabeza... A la abstracción del álgebra desde la manipulación. En FESMP, *Libro de actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 475-478). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).
- Da Silva, L. E., De Camargo, A. S. M. y Oliveira, P. C. (2021). Propuestas didácticas para la educación básica que implican el uso del material manipulativo Algeblocks. *Revista chilena de educación matemática*, 13(2), 68-77.
- De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... *Investigación den Educación Matemática XXIII*, 243-252.
- Delcor, J. y Morera L. [Innovamat en Español] (2022, 3 de marzo) *Las matemáticas de la LOMLOE: Una aproximación a los cambios curriculares - Formaths 2022* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=GVaobJ_NI44&t=3583s
- Estrada, A. L., Chávez, M. A. y Castillo, D. I. (2013). La influencia de las emociones y creencias en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Educateconciencia*, 1(1), 48-58.
- Fernández Bravo, J. A. (2019). Descubre los números y su descomposición. Material manipulativo. Cartas para desarrollar el sentido numérico. *Educación y futuro: revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 40, 197-221.

- García Navarro, E. (2017). *Formación del profesorado en educación emocional: Diseño, aplicación y evaluación* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. TDX. <https://www.tesisenred.net/handle/10803/454728#page=19>
- Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E.J. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic journal of research in educational psychology*, 4(8), 48-74.
- Gardner, M. (1976). Juegos matemáticos. *Revista de Occidente*, 3, 76-80.
- Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional*. Editorial Kairós.
- Gómez-Chacón, I. M. (2011). *Matemática emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático* (3ª ed.). Narcea.
- González Marí, J. L. (2010). Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales. *Revista UMA, Didáctica de la Matemática*.
- Guerrero, E. J., Blanco, L. J. y Gil, N. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 2, 15-32.
- Lozano, M., Brotons, M. F., Cubí, M. M., Galiana, J. A., López Alacid, M.P y Serrano, J. A. (2022). Identificación y clasificación de las emociones en el ámbito universitario a partir de una muestra de estudiantes del máster en profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. *Memorias del Programa de Redes de investigación en docencia universitaria*, 1, 1711-1712.
- Luna, C. (2024, 11 de julio). *Formació en l'ús de materials manipulatius per a l'aula de matemàtiques en l'àmbit del Museu de Matemàtiques de Catalunya*. [Apuntes de la sesión]. Material académico no publicado de la formación presencial "Formació en l'ús de materials manipulatius per a l'aula de matemàtiques en l'àmbit del Museu de Matemàtiques de Catalunya" dirigida a profesorado de Primaria y Secundaria.
- MMACA. (s.f.). *Sala Martin Gardner*. <https://mmaca.cat/es/visitans/exposicio-permanent-cornella/sala-martin-gardner/>
- Miguel, E. y Chamoso, J. M. (1995). Materiales y recursos didácticos para la enseñanza de las Matemáticas. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, 7, 317-329.
- Moreno, A. (2023). *Enseñanza de las matemáticas en 2º de ESO: Primera aproximación al Método Singapur*. [Trabajo fin de máster, Universitat Abat Oliba CEU]. Recercat. <http://hdl.handle.net/2072/537096>
- Morgado, I. (2015). Las emociones en el desarrollo de las virtudes. *Participación educativa*, 4(6), 47-50.
- Novo, M. L. (2021). Matemáticas en el Grado de Educación Infantil. La importancia del juego y los materiales manipulativos. *Edma 0-6. Educación Matemática en la Infancia*, 10(2), 28-50.

- OECD. (2021). *Más allá del aprendizaje académico. Primeros resultados de la Evaluación de competencias socioemocionales*. Fundación Edelvives.
- Palop, B. y Morales, M. (Presentadoras) (2024, 3 de enero). Yo veía que no sabía acompañar esos procesos (Núm. 29) [Episodio de pódcast de audio]. En *Sin notas / Sense notes*. Ivoox. https://www.ivoox.com/t3-29-yo-veia-no-sabia-acompanar-esos-procesos-audios-mp3_rf_122074746_1.html
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de psicología*. Editorial Labor.
- Prieto, B. (2014). *Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* [Trabajo fin de grado, Universidad de Valladolid]. UVA. <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/7619>
- Ramellini, G. (2024, 21 de febrero). *Creació de materials manipulatius per treballar la geometria* [Taller presencial]. Formación semipresencial reconocida dirigida a profesorado de primaria y secundaria, Barcelona, España.
- Ruiz Aguilera, D. (2024, 1 de julio). Renovarse o morir. El papel crucial de la formación continua [Conferencia plenaria]. *XXI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (21 JAEM). Santander, España.
- Ruiz Martín, H. (2020). *¿Cómo aprendemos? Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza*. Editorial Graó.
- Sáenz de Cabezón, E. (2023). *Invitación al aprendizaje. El placer de aprender durante toda la vida*. Penguin Random House Grupo Editorial.
- Sánchez Barbero, B., Chamoso, J. M., Cáceres, M. J., Rodríguez, M. M., Salomón, M. S. y Astudillo, M. T. (2018). Creación de material manipulativo para futuros docentes de infantil, primaria y secundaria para el aprendizaje de matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán, *Actas XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León* (pp. 236-244). Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.
- Sánchez, V. (2022, 25 de mayo). Las matemáticas de la LOMLOE y nuestra interpretación. *Innovamat blog*. <https://blog.innovamat.com/es/las-matematicas-de-la-lomloe-y-nuestra-interpretacion/>
- Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX. (2015). El material manipulable a l'aula de matemàtiques. *Cantabou*, 38. <http://cantabou.cepinca.cat/search?updated-min=2015-01-01T00:00:00-08:00&updated-max=2016-01-01T00:00:00-08:00&max-results=7>
- Talavera, P. (2023). *Numeración maya y egipcia* [Apuntes de clase]. Material académico no publicado de la asignatura Complementos para la formación disciplinar de Matemáticas del Máster Universitario en Formación del Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universitat Abat Oliba CEU.
- Thomen, M. (2021, 4 de octubre). Qué son los sentimientos: lista, tipos y ejemplos. *Psicología-Online*. <https://www.psicologia-online.com/que-son-los-sentimientos-lista-tipos-y-ejemplos-4606.html>

- Torra, M. (2015). Material manipulable para enseñar matemáticas en educación infantil. *Edma 0-6. Educación Matemática en la Infancia*, 4(2),61-66.
- Valenzuela, M. (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile*. [Trabajo fin de máster, Universidad de Granada]. Digibug. [https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20Macarena%20Valenzuela .pdf](https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20Macarena%20Valenzuela.pdf)
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023a, 4 de octubre). *Frase Maria Antònia Canals* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/Cx-REYYtQ4fZ1W4JIJxpw_UYVINw5Mvg9QI9I00/
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023b, 5 de octubre). *Bloques lógicos* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/CyAyBn4NoDzsolcR0k2N928sqyMpPzsC0sXcPQ0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023c, 6 de octubre). *Actividad bloques lógicos* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/CyDXUn0tS9Y3IXVXQIKop_GLnj7zSH-EwljEq80/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023d, 22 de septiembre). *Regletas de Cuisenaire* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/Cxff-AENO5WaCM6kLNO_4AL1Ww_5KGLKDVChW40/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023e, 27 de septiembre). *Actividad regletas de Cuisenaire* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/CxsRS2ztKayle3AnHvEfq0dfNf6S6FHOPknqXk0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023f, 18 de septiembre). *Policubos* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/CxVmCoHt6GlvsjGsWAG60jJ6Xag1wLlqfTu4G40/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2023g, 20 de octubre). *Actividad policubos* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/CyonP-IN2w8KDg_UovVOhxxlCSWfO7NBoz0Xvw0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024a, 30 de agosto). *Material base 10* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_RYNwstGQrdLZEv7MPxFIFoi9-mKoGp0ZVbw80/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024b, 30 de agosto). *Actividad material base 10* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_RZ3BuN8oV8HeLO0Wee1AcreDrxGsHljFjReU0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024c, 17 de agosto). *Material fracciones* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C-xBIVutLViiHcn6ITpENN6vNFjazSJJV-F8Ko0/?img_index=1

- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024d, 21 de agosto). *Actividad material fracciones* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C-8IIN2tI5K9nxUnFxGUQaVUedTbKtIEJjnv8k0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024e, 3 de septiembre). *Pattern Blocks* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_bmMQiNQKoRmzIHtYpeN-uJj2AX4Dcb_brd7k0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024f, 5 de septiembre). *Actividad Pattern Blocks* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_jSWOqNCKLO45P76oLyeBNKIgkFwyUiSSGbow0/
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024g, 29 de agosto). *Libro espejo* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_OwYjpNtcyLZQOjCFJBVe_aWGYq6itipAQZ_Ns0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024h, 29 de agosto). *Actividad espejo* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_OxFISkON_T8Kgm286rtgSh7BvBY33Z0Ym_Ds0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024i, 31 de agosto). *Dados* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_UBBKUtZ1LEUP-5TSEc_ilaNEUnWpRNbM1qmQ0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024j, 31 de agosto). *Actividad dados* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_UFpZzN9GLew2A_BTIZqkWJP_g2jobRFdl_a80/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024k, 24 de agosto). *Contadores* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_D-V8RtyPEff9on4SZwx7h03HOfoQm8j4IAvY0/
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024l, 24 de agosto). *Actividad contadores* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C_F4qAA4eEtVq2AqYNYu6NKfkku7oTNQqW_uqw0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024m, 9 de junio). *Pentominós* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C8AstNKtelvQKIMeTIFjrBowXqM-tn1uw0wiXs0/?img_index=1
- Yélamos, G. [@mamatematica]. (2024n, 7 de agosto). *Actividad pentominós* [Fotografía]. Instagram. https://www.instagram.com/p/C-YF8JQNSzqA7dof83NVIZjzSZ4BQRXuSIB9c0/?img_index=1

Anexos

Anexo 1 - Decálogo Pere Puig Adam

El matemático Pere Puig Adam, precedía su decálogo de la didáctica matemática, escribiendo: “me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica, sugerir maneras de sentir antes que maneras de hacer. No obstante, por si valieran, aquí van las sugerencias que estimo más fundamentales:

1. No adoptar una didáctica rígida, sino adaptarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
2. No olvidar el origen de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
3. Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
4. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
5. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
6. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
7. Promover en todo lo posible la autocorrección.
8. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
9. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.
10. Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.”

La Matemática y su enseñanza actual, 1960

Anexo 2 - Bloques lógicos

Descripción

Los bloques lógicos son piezas de madera o plástico que se definen con cuatro categorías distintas: color (azul, amarillo y rojo), tamaño (grande y pequeño), grosor (fino o grueso) y forma (triángulo, cuadrado, rectángulo, hexágono y círculo). Con ellos, además de estudiar la propia geometría, también podemos hacer seriaciones, detectar diferencias, trabajar la negación de atributos, etc.

Figura 10
Bloques lógicos



Nota: Fuente @mamatematica (2023b)

Actividad (combinatoria)

1. Presentamos los bloques lógicos y sus categorías. Ahora, sabiendo que hay 3 colores, 2 tamaños, 2 grosores y 5 formas, ¿cuántas piezas distintas hay en total?
2. Disponemos de cuatro dados (uno por categoría). Lanzamos uno e identificamos todas las piezas que cumplen aquella propiedad (p. ej. "rojo"). Replicamos el experimento con los otros dados.
3. Ahora, si lanzamos dos dados, ¿cuántas piezas distintas encontraremos que cumplan aquellas dos propiedades? Exploramos todos los casos posibles según la combinación de dados. ¿Y si lanzamos tres? ¿Y si lanzamos los cuatro? Podemos representar el experimento en un gráfico.

Figura 11
Actividad bloques lógicos (combinatoria)



Nota: Fuente @mamatematica (2023c)

Anexo 3 - Regletas de Cuisenaire

Descripción

Las regletas de Cuisenaire (o simplemente, regletas) son pequeñas “tiras” de madera o de plástico, de distintos tamaños y colores. Las más pequeñas, de 1x1x1cm, representan “la unidad” y, a partir de ella, se construyen el resto. Cada color representa siempre el mismo número o cantidad. Aunque son ideales para ver la composición y descomposición de los números, se adaptan a cualquier contenido curricular debido a su diseño basado en el sistema decimal.

Figura 12
Regletas



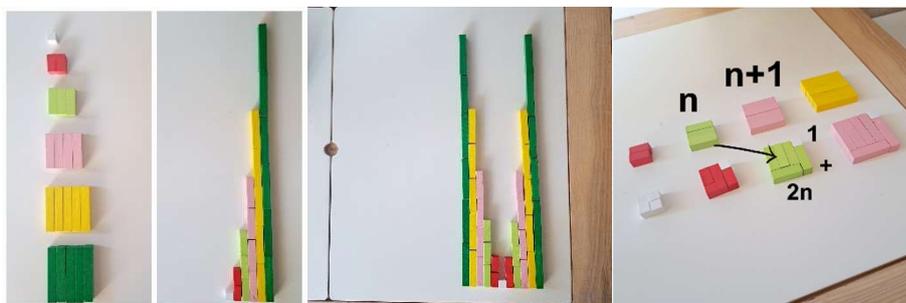
Nota: Fuente @mamatematica (2023d)

Actividad (función cuadrática)

1. Construimos con regletas los números cuadrados.
2. Construimos con ellos la función cuadrática (con simetría en el eje de ordenadas).
3. EXTRA: Visualizar el patrón de crecimiento de los números cuadrados, que es $2n+1$ y la demostración algebraica correspondiente:

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Figura 13
Actividad regletas (función cuadrática)



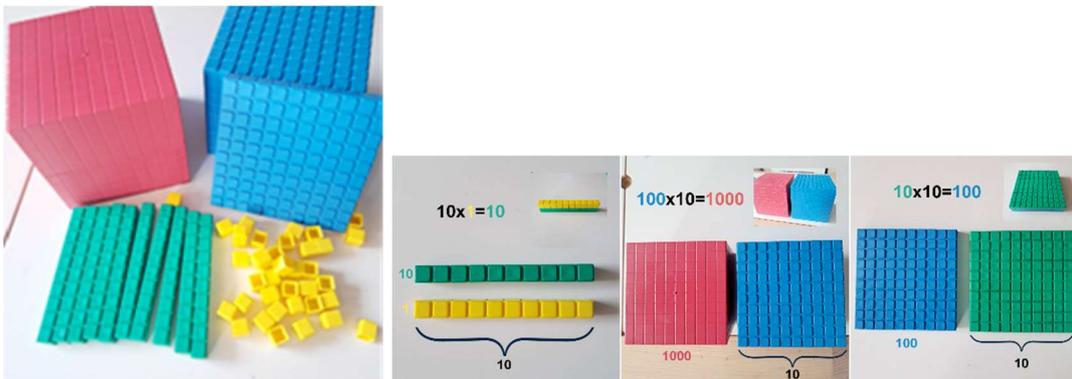
Nota: Fuente @mamatematica (2023e)

Anexo 4 - Bloques multibase (material base 10)

Descripción

Los bloques multibase (también conocidos como material de base 10) es un material compuesto por cubos pequeños de 1 cm de arista (que representan la unidad), regletas (decenas), cuadrados (centenas) y un cubo grande (mil), que guardan proporción entre ellos. Se usan fundamentalmente para trabajar el sistema de numeración decimal, ya que representan unidades de distinto orden, por lo que facilitan la comprensión del valor posicional de las cifras, y de los algoritmos de las operaciones básicas, así como de los números decimales y porcentajes.

Figura 14
Material base 10

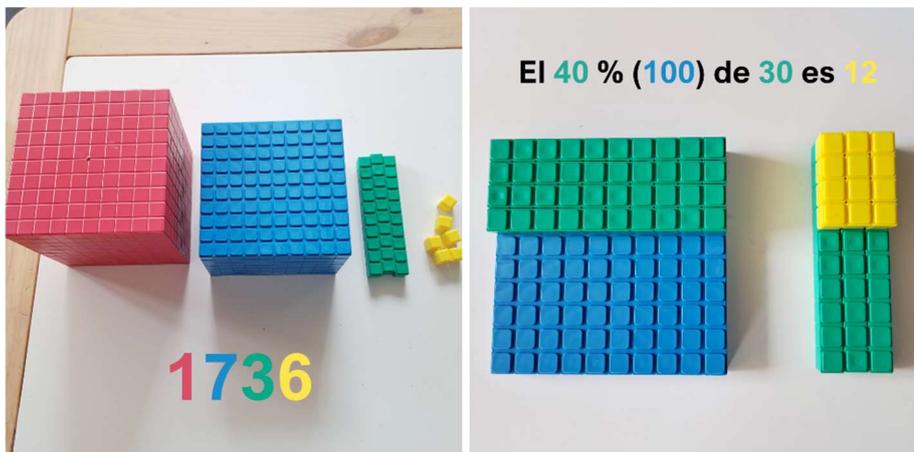


Nota: Fuente @mamatematica (2024a)

Actividad (porcentajes)

1. Construimos cifras para familiarizarnos con el material.
2. Representamos con el material algunos porcentajes y los escribimos sin hacer ningún cálculo. Después, contrastamos los resultados con el método numérico.

Figura 15
Actividad material base 10 (porcentajes)



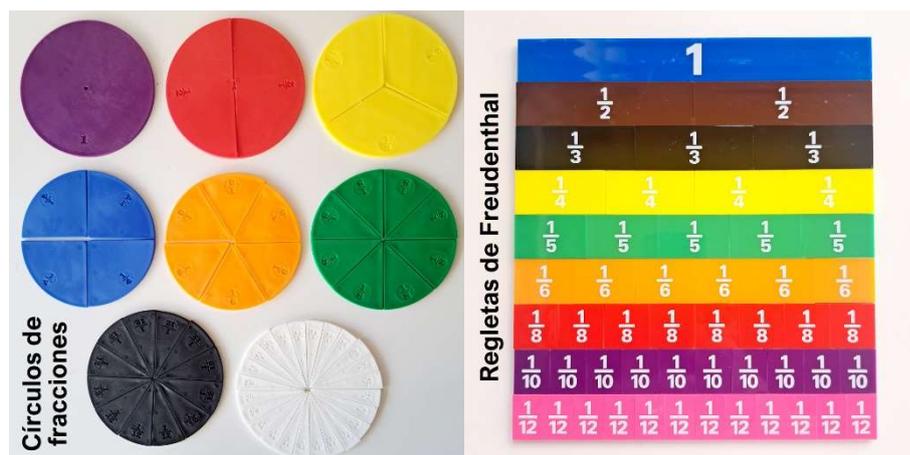
Nota: Fuente @mamatematica (2024b)

Anexo 5 - Material fracciones

Descripción

Tanto en su versión circular como rectangular, las piezas representan la unidad entera y la unidad dividida en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos... Se usan para entender el concepto de fracción, compararlas, trabajar la equivalencia de fracciones, operar con ellas, etc.

Figura 16
Material fracciones



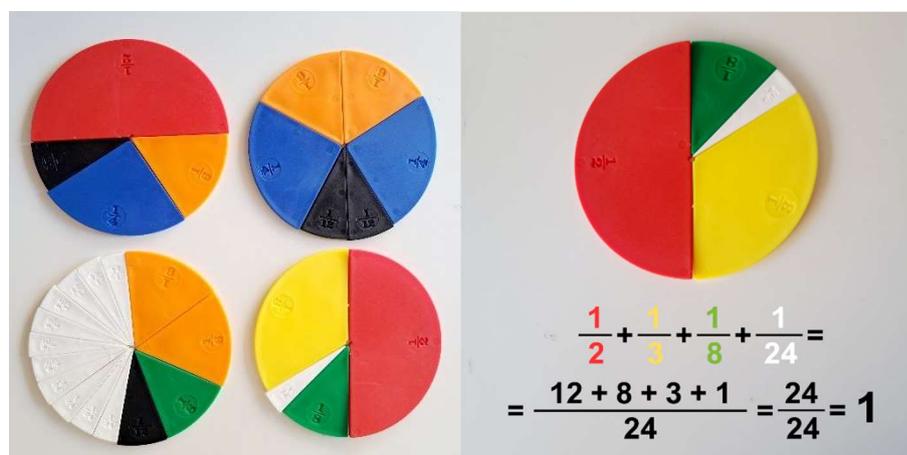
Nota: Fuente @mamatematica (2024c)

Actividad (suma fracciones)

Construir la unidad a partir de piezas de fracciones y calcular la suma (calculando m.c.m de los denominadores). Repetir con varios ejemplos.

Es una actividad auto corregible, ya que la suma siempre debe dar 1. Las piezas pueden fabricarse con papel en otra sesión previa o usar el material manipulativo.

Figura 17
Actividad material fracciones (suma fracciones)



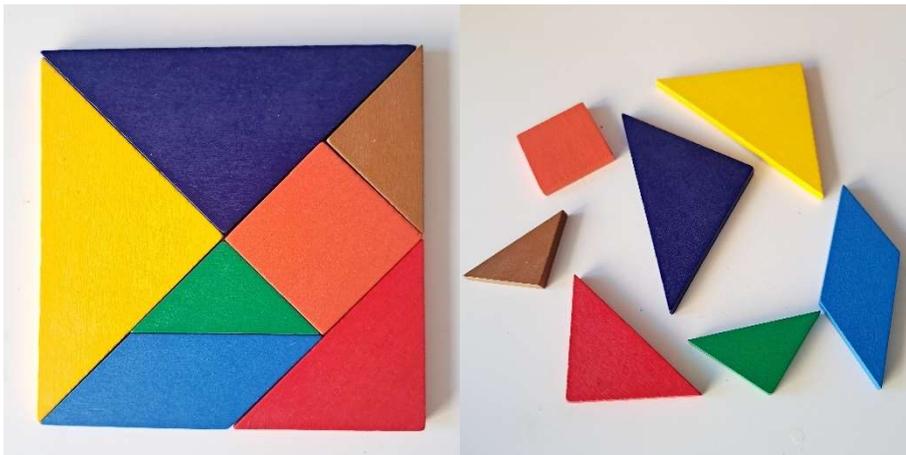
Nota: Fuente @mamatematica (2024d)

Anexo 6 - Tangram

Descripción

Existen diversos tangram (chino, egipcio, pitagórico, entre otros) en función de las disecciones que se realizan al cuadrado inicial. Están compuestos por formas geométricas (triángulos, cuadrados, rombos) y se pueden representar diferentes figuras con ellas, trabajando así la conservación de área con perímetros distintos. También potencian el razonamiento lógico y el sentido de la orientación.

Figura 18
Tangram

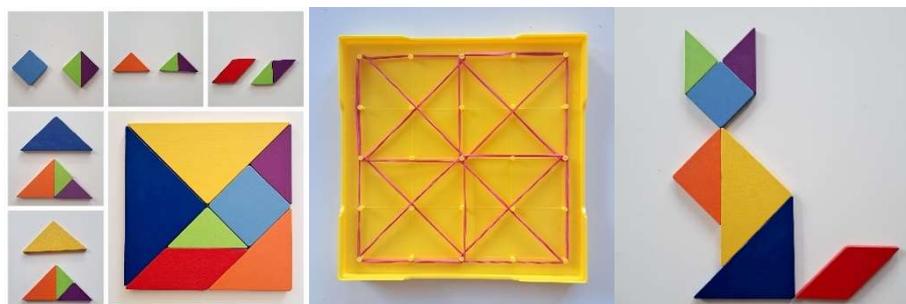


Nota: Fuente elaboración propia.

Actividad (área y perímetro)

1. ¿Cuántos triángulos pequeños caben en un tangram completo? (Podemos verlo encontrando la relación de área entre las piezas o también usando un geoplano).
2. Calcular el área y el perímetro de una figura dada (o inventada).

Figura 19
Actividad tangram (área y perímetro)



Nota: Fuente elaboración propia.

Anexo 7 - Bloques geométricos (Pattern Blocks)

Descripción

Los bloques geométricos (o *Pattern Blocks*) son figuras planas de seis formas diferentes: hexágonos regulares (amarillo), trapecios (rojos), rombos anchos (azul), rombos estrechos (beige o blanco), triángulos equiláteros (verde) y cuadrados (naranja). Todas coinciden en, al menos, la medida de uno de sus lados y pueden usarse para trabajar la geometría (figuras planas, lados, vértices, ángulos, área, perímetro...), pero también ayudan en otras áreas (por ejemplo, la comprensión de conceptos como la proporción y las fracciones; o la resolución de problemas).

Figura 20
Pattern Blocks

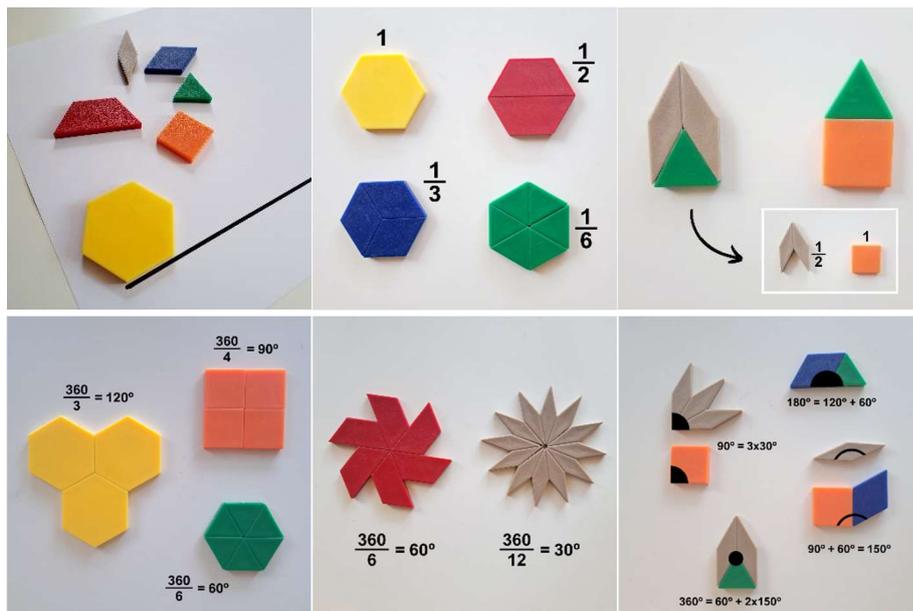


Nota: Fuente @mamatematica (2024e)

Actividad (clasificación formas)

1. Ordenar las seis formas según su perímetro.
2. Determinar la relación de área entre piezas.
3. Hallar los ángulos interiores de los polígonos.

Figura 21
Actividad Pattern Blocks (perímetros, áreas y ángulos)



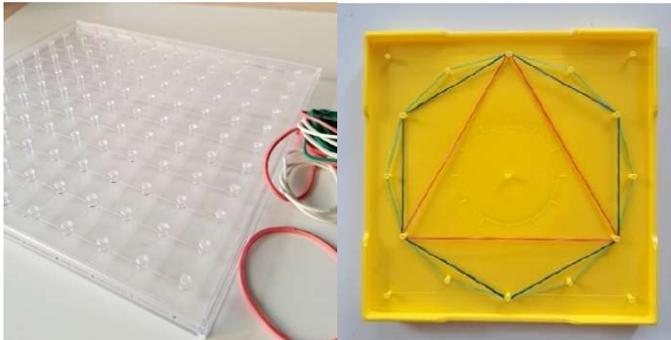
Nota: Fuente @mamatematica (2024f)

Anexo 8 - Geoplanos

Descripción

Los geoplanos son piezas de plástico con unos pivotes dispuestos de forma regular. Según la disposición, obtenemos el geoplano ortogonal (pivotes colocados formando cuadrados), geoplano isométrico (pivotes formando triángulos equiláteros) o geoplano circular (pivotes formando un círculo). Junto a las gomas elásticas de distintos tamaños, se pueden construir formas geométricas, descubrir propiedades de los polígonos y resolver problemas de áreas y perímetros.

Figura 22
Geoplanos

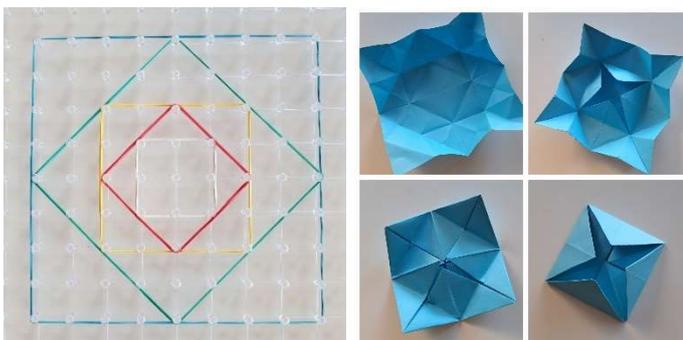


Nota: Fuente elaboración propia.

Actividad (razonamiento lógico)

Si el área del cuadrado interior es 3 m^2 , ¿cuál es el área del resto de cuadrados de la imagen (geoplano)?⁴⁶ El reto puede resolverse contando medios cuadrados o bien visualizándolo en papel (cada paso plegamos tiene el doble de capas de papel que el anterior).

Figura 23
Actividad geoplano (lógica)



Nota: Fuente elaboración propia.

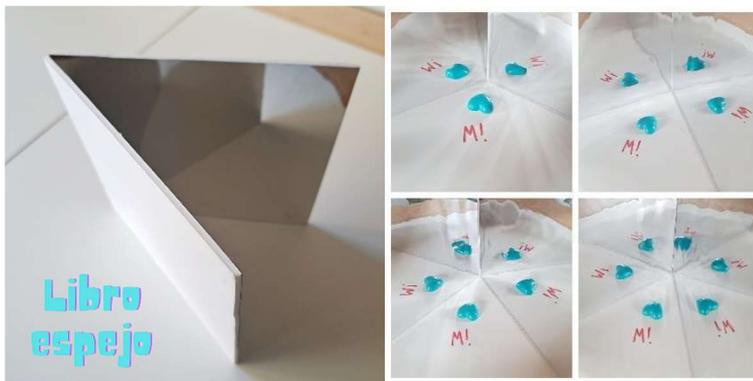
⁴⁶ Reto planteado por Javier R Miravalles (@6e0metric0) en el Calendario de adviento matemático 2023 realizado por Andrea de la Fuente Silva (@itsladymat).

Anexo 9 - Espejos

Descripción

Un espejo común permite descubrir simetrías y estudiar los movimientos en el plano, que después podemos formalizar analíticamente. Además, un libro espejo permite experimentar igualmente con la simetría, pero no solo en relación a un eje sino en relación a diversos ejes simultáneamente. Consiste en dos espejos (que pueden ser de papel), enganchados a un cartón y unidos con cinta adhesiva. Al situar una figura en el interior del libro, esta se refleja tantas veces en función del ángulo que se abra y al abrir y cerrar el libro, la cantidad aumenta o disminuye.

Figura 24
Libro espejo

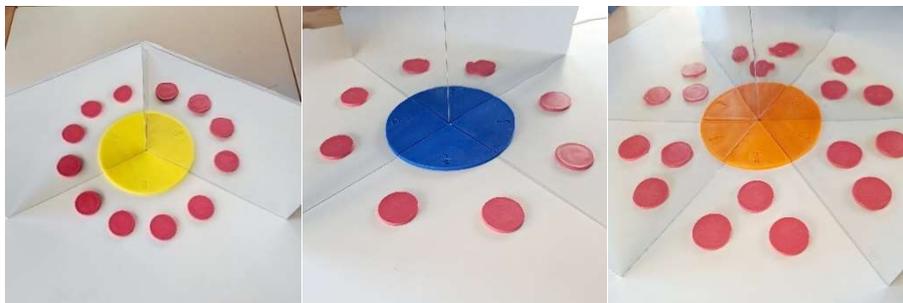


Nota: Fuente @mamatematica (2024g)

Actividad (concepto fracción)

Actividad de Maria Antònia Canals que ayuda a la visualización y la comprensión del cálculo de la fracción de un número. Por ejemplo, ¿cuál es el número cuya tercera parte es 4? Una tercera parte es dividir la unidad en 3 y coger 1 (pieza de $\frac{1}{3}$ del material de fracciones). Ponemos 4 fichas. El "todo" cuya tercera parte es 4, es 12 (los contadores que se ven en total).

Figura 25
Actividad espejo (concepto fracción)



Nota: Fuente @mamatematica (2024h)

Anexo 10 - Dados

Descripción

Los dados son objetos (no necesariamente cúbicos, ya que existen dados con más de 6 lados) en cuyas caras pueden aparecer puntos o podemos personalizarlos según el experimento aleatorio que queramos realizar. Además de su uso en juegos de mesa o trucos de magia, son una buena herramienta para introducir actividades de reconocimiento de la cantidad y hacer actividades sencillas de cálculo, en las primeras etapas educativas, pero como material para trabajar la probabilidad, en etapas más avanzadas.

Figura 26
Dados



Nota: Fuente @mamatematica (2024i)

Actividad (probabilidad)

1. Conjeturar cuál será el resultado más probable al lanzar dos dados y hacer la suma.
2. Experimentar (cuanto mayor sea la muestra, más se acercará el resultado a la probabilidad teórica).
3. Formalizar (tablas de valores, espacio muestral, regla de Laplace y Ley de los grandes números) y contrastar hipótesis.
4. ¿Y la diferencia?

Figura 27
Actividad dados (probabilidad)

Diferencia dados							Suma dados						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	1	2	3	4	2	3	4	5	6	7	8
3	2	1	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
4	3	2	1	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10
5	4	3	2	1	0	1	5	6	7	8	9	10	11
6	5	4	3	2	1	0	6	7	8	9	10	11	12

Nota: Fuente @mamatematica (2024j)

Anexo 11 - Contadores

Descripción

Los contadores son unas fichas redondas similares a las del parchís pero un poco más grandes y gruesas. No sirven estrictamente para contar, sino también para representar la suma de enteros, visualizar el producto o las potencias, realizar experimentos de probabilidad, jugar a juegos de mesa, resolver retos matemáticos...

Figura 28
Contadores

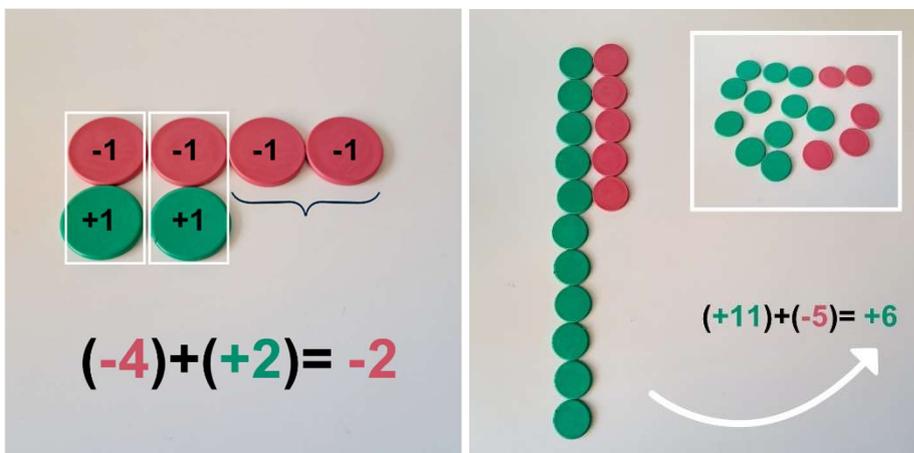


Nota: Fuente @mamatematica (2024k)

Actividad (suma enteros)

Para sumar enteros de manera manipulativa se representan los coeficientes positivos con fichas verdes (cada una de ellas sería "+1") y los negativos con fichas rojas (cada una es "-1") y se hacen tantas parejas como sea posible formadas por una ficha de cada color, de manera que se cancelan entre ellas: $(+1) + (-1) = 0$. Las que quedan, es el resultado de la operación (con el signo correspondiente). Esta técnica, posteriormente, puede reducirse a la representación con marcas escritas a boli.

Figura 29
Actividad contadores (suma enteros)



Nota: Fuente @mamatematica (2024l)

Anexo 12 - Policubos

Descripción

Los policubos (también llamados multicubos o mathlink) son unas piezas encajables de plástico (medida 2x2x2cm aproximadamente), que sirven para realizar múltiples actividades matemáticas como descubrir el concepto de número, las operaciones aritméticas básicas (sumar, restar...), el valor posicional, series y patrones, etc. Pero también se pueden realizar actividades de geometría o iniciarse en el álgebra.

Figura 30
Policubos

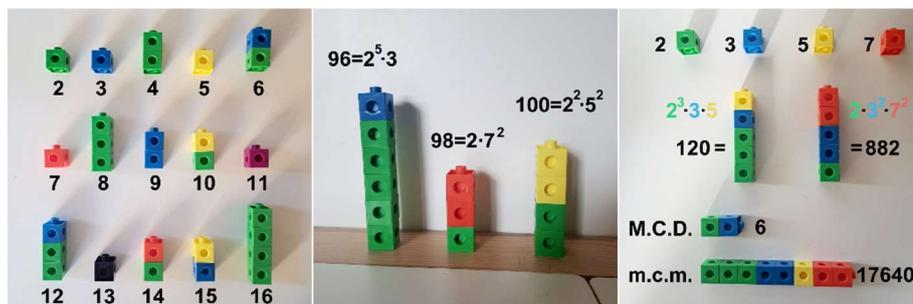


Nota: Fuente @mamatematica (2023f)

Actividad (descomposición, m.c.d. y m.c.m.)

1. Construir los números de 1 a 16 con el menor número de colores posible.
2. Descomposición de números en números primos (Teorema fundamental de la aritmética).
3. Construcción del máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Figura 31
Actividad policubos (descomposición, m.c.d. y m.c.m.)



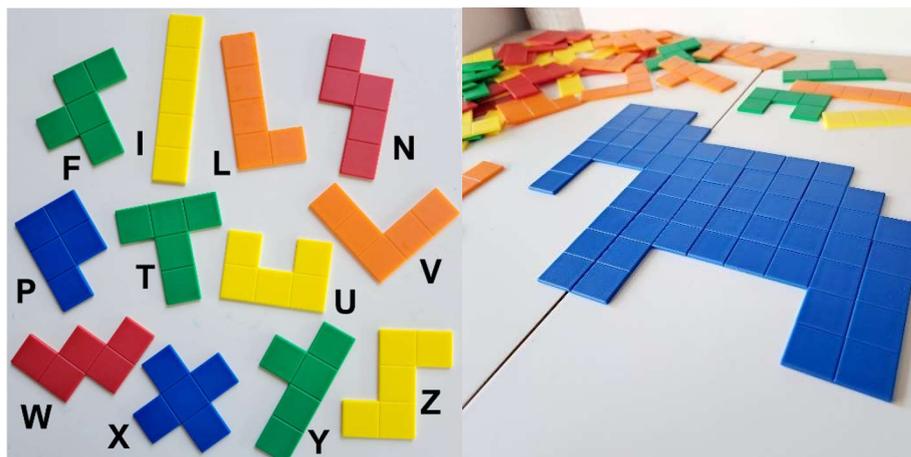
Nota: Fuente @mamatematica (2023g)

Anexo 13 - Pentominós

Descripción

Un pentominó es una figura geométrica compuesta por cinco cuadrados unidos por sus lados. Hay exactamente doce formas distintas. Pueden usarse para trabajar las figuras planas (composición, descomposición y simetrías), comprender el concepto de perímetro y área, comparar formas y desarrollar el razonamiento lógico.

Figura 32
Pentominós

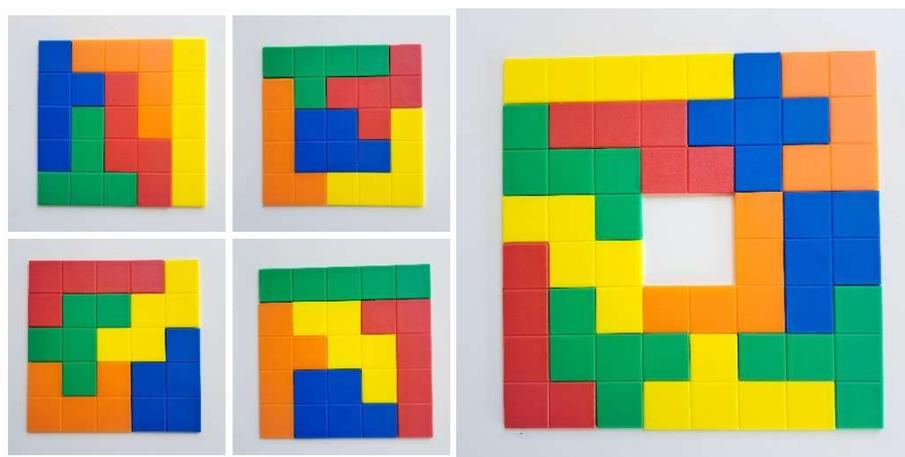


Nota: Fuente @mamatematica (2024m)

Actividad (rompecabezas)

Elaboración de estrategias para la construcción de cuadrados (área 25 o 64, con 4 agujeros) usando algunos o todos los pentominós, respectivamente.

Figura 33
Actividad pentominós (rompecabezas)



Nota: Fuente @mamatematica (2024n)

Anexo 14 - Decálogo Maria Antònia Canals

María Antònia Canals describió el siguiente "Decálogo para trabajar con materiales manipulables ", donde expone su filosofía educativa y su enfoque sobre cómo utilizar de manera efectiva los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas:

1. Presentar una propuesta de trabajo, a ser posible en forma de pequeña investigación.
2. Invitar a la acción, dejando bien claro qué es lo que se tiene que hacer.
3. Observar a los niños y niñas, sus reacciones, sus intereses y acoger las posibles ideas e iniciativas.
4. Estar dispuesto a cambiar el camino previsto para seguirlas, aceptando lo imprevisto.
5. Pedir la estimación de resultados en las medidas y el cálculo (base del cálculo mental) y la anticipación de fenómenos geométricos en el espacio.
6. Provocar y acompañar el descubrimiento de algo nuevo. Cuando lo hayan hecho, maravillarse y felicitarlos calurosamente.
7. Potenciar el diálogo, invitando a los alumnos a expresar aquello que han hecho y han visto. Pedirles una explicación oral y coherente.
8. Resumir lo que se ha hecho, se ha dicho y, sobre todo, lo que se ha aprendido. Ayudar a formar conclusiones.
9. Relacionarlo con conceptos que se han trabajado anteriormente y, a veces, con otras actividades (calculadora, estadística...).
10. De manera opcional, pasar algo a lenguaje escrito, primero coloquial y después matemático (con cifras y signos).

Anexo 15 - Enlaces web bancos de recursos

- CESIRE CREAMAT (Centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques): <https://sites.google.com/xtec.cat/cesire-matematiques-campanyes/inici?authuser=0>
- FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya): <https://recullfm.feemcat.org/>
- ARC (Aplicació de Recursos al Currículum): <https://apliense.xtec.cat/arc/node/349>
- EDUCAIXA: [https://educaixa.org/es/landing-recursos?filter_niv =\[18654\]&filter_area =\[170\]](https://educaixa.org/es/landing-recursos?filter_niv =[18654]&filter_area =[170])
- PuntMat: <https://puntmat.blogspot.com/>
- Calaix +ie: <https://calaix2.blogspot.com/p/qui-soc.html>
- CentMat (Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic de les Illes Balears): <https://www.caib.es/govern/sac/fitxa.do?lang=ca&codi=3050079>
- Concurso Primavera UCM (Facultad de Ciencias Matemáticas): <https://www.concursoprimavera.es/index.html#concurso>
- OAOA (Otros Algoritmos Operaciones Aritméticas): <http://oaoamaticas.org/>
- ATE (Área de Tecnología Educativa Gobierno de Canarias): <https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/ate/area-de-tecnologia-educativa/>
- Repositorio Junta de Extremadura: <https://matematicas.educarex.es/index.php/blog/recursos-destacados>
- INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado): <https://intef.es/recursos-educativos/situaciones-aprendizaje/>
- Mariel Mates: <https://marielmatesblog.wordpress.com/>
- NRICH (University of Cambridge): <https://nrich.maths.org/frontpage>
- Mathigon: <https://es.mathigon.org/>

Figura 37
Diseño en Canva del cuestionario (reverso)

LA TEVA OPINIÓ SOBRE ELS MATERIALS MANIPULATIUS:

A continuació, es presenten unes preguntes en relació amb el què has experimentat avui. Com abans, a les afirmacions següents, indica en quina mesura estàs d'acord, segons l'escala 1 a 6 (gens d'acord - totalment d'acord). Marca les respostes amb una X.

	Gens d'acord		Totalment d'acord			
M'ha agradat la classe d'avui.	1	2	3	4	5	6
M'he avorrit a la classe d'avui.	1	2	3	4	5	6
M'he sentit capaç de realitzar les activitats que em proposaven.	1	2	3	4	5	6
M'he divertit fent les activitats amb els materials.	1	2	3	4	5	6
He après usant els materials manipulatius.	1	2	3	4	5	6
M'he sentit motivat realitzant les activitats proposades.	1	2	3	4	5	6
Em semblen més fàcils d'entendre les matemàtiques amb els materials manipulatius.	1	2	3	4	5	6
Crec que la meua preocupació per les matemàtiques disminuiria si utilitzés més sovint els materials manipulatius.	1	2	3	4	5	6
M'agradaria usar els materials més vegades a classe.	1	2	3	4	5	6
M'agradarien més les matemàtiques si utilitzés més sovint materials manipulatius.	1	2	3	4	5	6

PREGUNTES FINALS:

En les següents preguntes pots expressar amb sinceritat el que sents:

Què t'ha semblat l'experiència d'avui?

Quina nota li posaries a l'experiència amb materials manipulatius del 0 al 10?

0

Intenta buscar a la teva ment un record positiu a una classe de matemàtiques, me l'expliques? Com et senties?



Nota: Fuente elaboración propia.

El cuestionario está en catalán ya que es la lengua vehicular del centro en la enseñanza y en la comunicación.

Anexo 19 - Ecuaciones método balanza

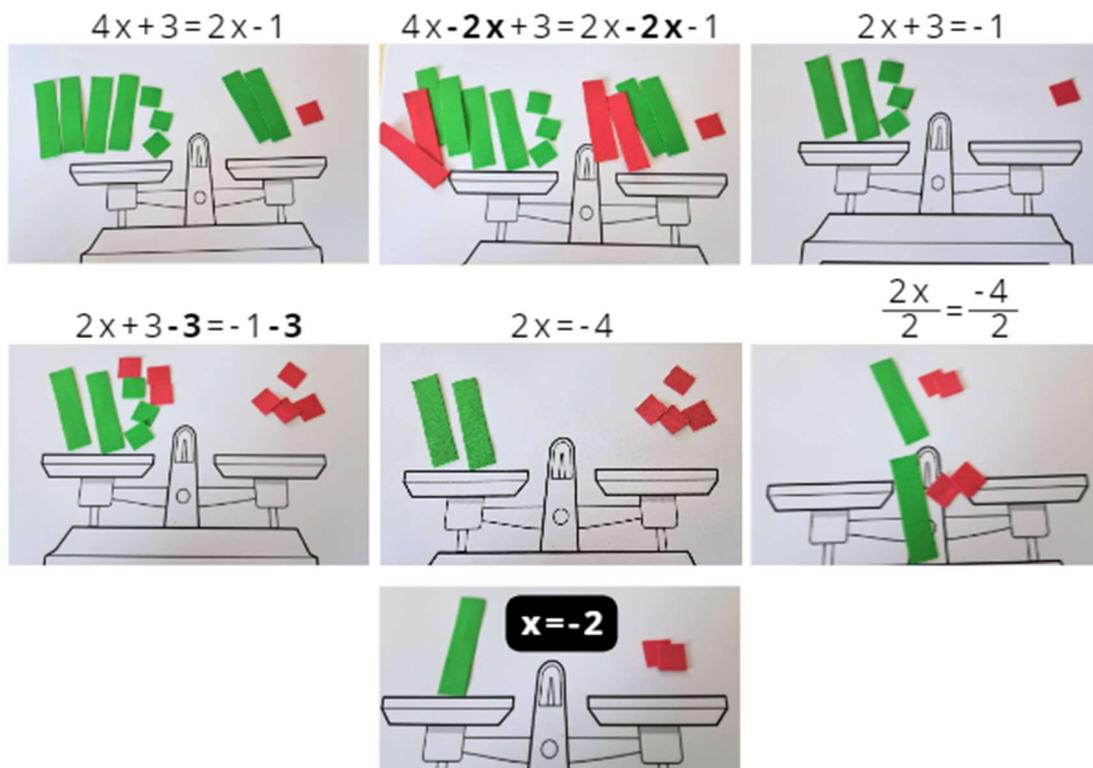
Descripción

Una ecuación es como una balanza en equilibrio: en lugar de objetos con el mismo peso en ambos lados, se tienen expresiones algebraicas del mismo valor en ambos lados. Por tanto, las operaciones permitidas para compensar esta balanza y que no se desequilibre son:

- Sumar o restar en ambos lados (miembros de la ecuación) lo mismo.
- Multiplicar o dividir por el mismo número (diferente de cero) en ambos lados
- Intercambiar las expresiones de los dos lados.

Material manipulativo (visible en el apartado 4.3): los rectángulos representan las x y los cuadrados, los términos independientes. El color verde es positivo y el rojo, negativo.

Figura 39
Ejemplo ecuación de primer grado



Nota: Fuente elaboración propia.

Este mismo método puede emplearse para resolver ecuaciones de segundo grado. Se recomienda consultar los materiales de Mariel Montenegro (@marielmates) en su blog *Las Mates de Mariel* (<https://marielmatesblog.wordpress.com/>), que han servido de inspiración y ejemplo para el conocimiento de esta metodología y su desarrollo en el aula.

