Enseñanza de las matemáticas en 2º de ESO: Primera aproximación al Método Singapur

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Autor: Aurkene Moreno Birichinaga
Tutor: Dra. Karen Armijos Yambay
Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas
Año: 2023

DECLARACIÓN

El que suscribe declara que el material de este documento, que ahora presento, es fruto de mi propio trabajo. Cualquier ayuda recibida de otros ha sido citada y reconocida dentro de este documento. Hago esta declaración en el conocimiento de que un incumplimiento de las normas relativas a la presentación de trabajos puede llevar a graves consecuencias. Soy consciente de que el documento no será aceptado a menos que esta declaración haya sido entregada junto al mismo.

Firma: ……………………………………
Aurkene Moreno Birichinaga

Resumen

Este trabajo presenta una estrategia innovadora de la enseñanza de las matemáticas, el Método Singapur, que destaca por promover el desarrollo de las habilidades matemáticas a partir del razonamiento y mediante un aprendizaje activo y significativo.

El presente trabajo tuvo como objetivo implementar dos propuestas de intervención en dos grupos naturales de 2º de la ESO, una diseñada en base a los fundamentos principales del Método Singapur y otra en base a las directrices del Método Tradicional, para recoger evidencias que demuestren el impacto de utilizar un método u otro en la motivación por aprender y en la adquisición de los conocimientos matemáticos de los alumnos.

Los instrumentos de observación y evaluación permitieron evidenciar la capacidad que tiene el Método Singapur de motivar y fomentar las buenas actitudes del alumnado hacia las matemáticas. Sin embargo, en cuanto a la adquisición de los conceptos matemáticos, se analizó una clara tendencia que evidenció la necesidad de implementar las dos metodologías conjuntamente para fomentar tanto la comprensión instrumental como la comprensión relacional.

Resum

Aquest treball presenta una estratègia innovadora de l'aprenentatge de les matemàtiques, el Mètode Singapur, que destaca per promoure el desenvolupament de les habilitats matemàtiques a partir del raonament i partint d'un aprenentatge actiu i significatiu.

El present treball va tenir com a objectiu implementar dues propostes d'intervenció en dos grups naturals de 2n d'ESO, una dissenyada d'acord amb els fonaments principals del Mètode Singapur i un altre a partir de les directrius del Mètode Tradicional, per recollir evidències que demostrin l'impacte d'utilitzar un mètode o un altre en la motivació per aprendre i en l'adquisició dels coneixements matemàtics dels alumnes.

Els instruments d'observació i avaluació van permetre evidenciar la capacitat que té el Mètode Singapur de motivar i fomentar les bones actituds de l'alumnat cap a les matemàtiques. No obstant això, respecte a l'adquisició dels conceptes matemàtics, es va analitzar una clara tendència que va evidenciar la necessitat d'implementar les dues *metodologies conjuntament per promoure tant la comprensió instrumental com la comprensió relacional.*

Abstract

This document presents an innovative strategy for teaching mathematics, the Singapore Method, which stands out for promoting the development of mathematical skills based on reasoning and through active and meaningful learning.

The aim of this work was to implement two intervention proposals in two natural groups of 2nd year of ESO, one designed based on the main fundamentals of the Singapore Method and the other based on the guidelines of the Traditional Method, in order to collect evidence that demonstrates the impact of using one method or the other on the motivation to learn and on the acquisition of mathematical knowledge of the students.

The observation and evaluation instruments provided evidence of the Singapore Method's ability to motivate and foster students' good attitudes towards mathematics. However, with regard to the acquisition of mathematical concepts, a clear trend was analyzed that showed the need to implement the two methodologies together in order to foster both instrumental and relational understanding.

Palabras claves / Paraules clau / Keywords

Método Singapur –Matemáticas –– Álgebra – Educación secundaria

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Índice de Anexos

Introducción

Las matemáticas son de vital importancia en el desarrollo intelectual de los jóvenes, ya que por medio de estas se logra obtener un pensamiento lógico-deductivo, que contribuye a la adquisición y consolidación de conocimientos, además del crecimiento personal y social. Esta área de la enseñanza es significativa en la vida diaria, ya que es de gran utilidad en ámbitos económicos, políticos o sociales; llegando a ser una de las disciplinas con más valor en las carreras de estudio profesionales del mundo. Ejemplo de ello es España, que no escapa de esta situación debido a que las matemáticas ocupan un lugar preponderante en los currículos de estudio en todos los niveles, desde la educación básica hasta los programas de posgrado (Lapuebla-Ferri et al, 2019).

Sin embargo, los resultados obtenidos por España en las últimas pruebas internacionales como lo son *Trends in International Mathematics and Science Study (*TIMSS, por sus siglas en inglés) y *Programme for International Student Assessment* (PISA, por sus siglas en inglés) dejan al descubierto las múltiples dificultades que tienen los estudiantes españoles en el desarrollo de la competencia de matemáticas. Concretamente en la última evaluación PISA realizada en el año 2018, la puntuación media alcanzada por los estudiantes de España fue de 481 puntos, una puntuación algo inferior a la media de los 38 estados de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, quienes obtuvieron una media de 489 puntos, y al de los 27 estados de la Unión Europea, quienes obtuvieron una media de 494 puntos. Esta evaluación también mostró la gran distancia que hay entre España y países punteros como lo son China (591), Singapur (569) o Hong Kong (551) quienes consiguieron las puntuaciones más altas de la evaluación (Cebrián, 2019).

Dichos resultados apuntan a que, en los países con menores puntuaciones, puede que esté sucediendo algo en cuanto a las metodologías que se utilizan para la enseñanza de las matemáticas. Según diversos expertos, Villamizar (2012) y Etchepare (2017), el exceso de cálculo y la falta de conexión con los problemas cotidianos son una de las principales causas por las que los alumnos se sienten desmotivados y con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Debido a estas hipótesis, en los últimos años, uno de los países con mejores resultados, Singapur, ha despertado el interés de muchos por el alto rendimiento de sus estudiantes en el área de matemáticas y a su vez por desarrollar en los alumnos actitudes positivas hacia ellas. En efecto, el exitoso Método Singapur cada vez va ganando más renombre a nivel mundial. Dicho método busca cambiar la forma tradicional de enseñar basada en el modelo de transmisión en el que el profesor es el experto y los estudiantes aprenden y memorizan lo que se les enseña, y tiene como objetivo la compresión de las matemáticas desde el desarrollo del pensamiento crítico. Y es que pone énfasis en la comprensión y en la capacidad de pensar razonadamente, y no tanto en los cálculos y en los procedimientos matemáticos.

El principal objetivo de este TFM consiste en diseñar sesiones de algebra, unas basadas en el Método Singapur y otras basadas en el método tradicional, e implementarlas en dos grupos de estudiantes de 2º de la ESO para obtener evidencias que demuestren si utilizar un método u otro tiene un impacto en la motivación por aprender y en los conocimientos matemáticos de los estudiantes.

Para ello, este trabajo se compone de seis grandes capitulo. El primer capítulo está compuesto por el marco teórico, que consta de tres capítulos. Por un lado, los epígrafes 1 y 2, Conociendo Singapur y Método Singapur respectivamente, donde se recopilan las bases teóricas y los elementos que fundamentan el Método Singapur. Y seguidamente el epígrafe 3, donde se presenta el sistema educativo español y la educación matemática en España y Cataluña. En el segundo capítulo del trabajo se presenta la metodología de la investigación realizada, pues este TFM mezcla la investigación con la innovación, y a continuación, el tercer capítulo conformada por el epígrafe 5, se explica el contexto del centro y del grupo clase en el cual se realizará la propuesta.

En el cuarto capítulo del trabajo, que consta de dos epígrafes -epígrafe 6 y 7-, se presenta la propuesta de intervención llevada a cabo y se describen diversos aspectos de las sesiones: los objetivos, la metodología, la descripción, la organización y etc. En el quinto capítulo del trabajo, se muestran los resultados obtenidos y, finalmente, en el último capítulo se concluye sintetizando brevemente los resultados más relevantes obtenidos que dan respuesta a si se han alcanzado los objetivos de este TFM.

I. Marco Teórico

1. Conociendo Singapur

1.1 Historia

Singapur es una pequeña República, situada al Suroeste Asiático, con al menos seis millones de habitantes, y es considerado como uno de los países más pequeños del mundo por tener solo setecientos kilómetros cuadrados. En el siglo II, Ptolomeo, gran prominente matemático y geógrafo, lo incluyó y destacó por primera vez en uno de sus mapas. De igual manera existen registros del siglo III en China, donde denominan a Singapur como “La Isla en el Final”, por su localización en uno de los extremos de la Península Malaya (Lee, 2022).

A lo largo de un siglo, Singapur fue una de las colonias más importantes de la corona del imperio británico, hasta el logro de su independencia en el año 1946. A raíz de dicho acontecimiento, se iniciaron muchas reformas que trajeron consigo el crecimiento industrial del país; en consecuencia, se aumentó el movimiento en los puertos y se redujo la tasa de desempleo. Además, durante estas últimas décadas, Singapur se ha convertido en un núcleo industrial de interés para todos los países, ha desarrollado altas tecnologías, como las industrias petroquímicas avanzadas, además de haberse convertido en un país puntero en el sector turístico (Calleros, 2020). Su rápido y exitoso desarrollo económico es considerado una hazaña histórica por los académicos, economistas y responsables políticos globales. Así pues, Singapur ha llegado a estar al mismo nivel que otros países relevantes como Hong Kong, Corea del Sur o la Alemania de 1997 (Lee, 2022).

En la actualidad, Singapur tiene el octavo PIB per cápita más alto del mundo, sólo un puesto por debajo de EE. UU. Asimismo, ocupa el primer puesto en el Informe de Competitividad Global y el segundo puesto para la facilidad en mantener negocios en el Índice del Banco Mundial. Se caracteriza también por ser un país desarrollado con instalaciones y tecnologías de última generación en todos sus sectores. Todo ello, en un país multicultural, con multitud de etnias, religiones y lenguas donde los chinos representan el 75% de la población, los malayos un 15%, los indios un 7,5% y las personas de origen euroasiático un 1,5% (Lee, 2022). Al contrario de los diferentes países de Asia, Singapur ha adoptado el inglés como su lengua principal tanto para los negocios como para la educación, aunque también se hablan otras lenguas como son el mandarín, el malayo y el tamil (Bautista, 2015).

Entre los elogios que Singapur ha acumulado a lo largo de los años, el más relevante es que se considera uno de los países con mejor desempeño en educación a nivel mundial. Y es que, año tras año, Singapur alcanza las mejores puntuaciones en evaluaciones internacionales como TIMSS y PISA desde su primera participación en el año 2009. Los singapurenses consideran que su supervivencia depende en gran medida del “capital humano” y consideran que la educación es la clave del futuro a largo plazo de cualquier pueblo. Por dicha razón, Singapur está constantemente esforzándose por mejorar la calidad de su sistema educativo y la preparación y las oportunidades de desarrollo profesional de todos sus ciudadanos (Bautista, 2015).

1.2 Sistema Educativo Singapurense

El sistema educativo de Singapur es uno de los más importantes en el mundo y está orientado a desarrollar aptitudes, valores y habilidades que permitan a los estudiantes enfrentarse a los cambios en la sociedad y al desarrollo de nuevas tecnologías (Zapatera, 2021). Investigaciones actuales indican que los factores que determinan dicho éxito están ligados a tres bloques independientes. En primer lugar, el nivel macro, ligado a factores socioculturales y políticos; en segundo lugar, el nivel organizacional relacionado con la calidad de las escuelas, de los profesores y de los planes y las metodologías de estudio; y en tercer lugar el nivel familiar, relacionado con la crianza y la socialización (Tan y Dimmock, 2014).

Organizacionalmente el sistema educativo protagonista está completamente centralizado y controlado por el Ministerio de Educación (MOE, por sus siglas en inglés), quienes son los responsables de contratar a los maestros, formar a los mismos y desarrollar los currículos del sistema (Bautista, 2015). Sin embargo, antes de la independencia de Singapur, las escuelas eran dirigidas y organizadas por organizaciones étnicas que diseñaban sus propios currículos y establecían sus propias lenguas predominantes. A medida que la independencia se estableció en el país, el gobierno fue tomando el control de las escuelas y estandarizó el inglés como el idioma curricular de estas. El primer conjunto de currículos establecido por el MOE se presentó a nivel nacional en el año 1960, por aquel entonces las matemáticas no eran todavía una asignatura obligatoria (Lee, 2022).

No obstante, los años 80 trajeron consigo importantes cambios en el programa de la educación matemática en Singapur. En primer lugar, la asignatura de matemáticas se añadió como obligatoria en el sistema educativo y, en segundo lugar, en el currículo matemático se incluyeron dos modelos prácticos para la enseñanza de las matemáticas que se explicarán con detalle en el capítulo dos: el enfoque C-P-A inspirado en la teoría de Jerome Bruner y el método de Modelo de Barras creado por el Dr. Kho Tek Hong en el año 1983. Después de establecer estas dos prácticas en el currículo nacional del país en 1988, el Ministerio de Educación creó un comité para la revisión del Marco Curricular Escolar de las Matemáticas (SMCF por sus siglas en inglés), el cual sigue vigente y cuya función es revisar el currículo de matemáticas cada seis meses (Lee, 2022).

Actualmente, aunque el sistema educativo que rige en el país conserva muchos de los componentes del currículo de 1980, el MOE ha diseñado su sistema educativo mediante un cuidadoso examen de las “mejores prácticas” que se realizan en la educación a nivel internacional. Para ello, han tenido en cuenta escuelas exitosas, nuevas políticas educativas, nuevos currículos y programas de desarrollo (Gopinathan, 2012).

Hoy en día el Sistema educativo de Singapur se estructura bajo tres niveles básicos obligatorios: preescolar, primaria y secundaria. A posteriori, existen otros dos niveles de carácter no obligatorio: postsecundaria y universitario (Gil, 2022).

La escolarización inicia en preescolar para niños de 4 años y permanecen en esta etapa hasta los 6 años. Seguidamente, la educación primaria dura de los 6 a los 12 años. Una vez culminado dicho periodo, los alumnos son sometidos al examen denominado *Primary Scholl Leaving Examination* (PSLE por sus siglas en inglés). Dependiendo de la nota obtenida en dicho examen, los alumnos recorrerán un itinerario u otro y serán asignados a un centro u otro (Gil, 2022).

En cuanto a la educación secundaria se caracteriza por su versatilidad en comparación con otros sistemas educativos. Y es que ofrece numerosas opciones a las que los estudiantes pueden acceder dependiendo de sus habilidades y de sus objetivos. Concretamente, se divide en tres posibles itinerarios (Gil, 2022):

- La educación secundaria especial que es para estudiantes con alta calificación o especialmente dotados en una disciplina en concreto (por ejemplo, artes o deporte). Es una fusión de la secundaria con la postsecundaria que sigue un plan específico para entrar a la universidad. Al finalizar, los estudiantes no necesitan realizar un examen posterior para poder acceder a la universidad.

- La educación secundaria exprés está dirigida a aquellos estudiantes que también han obtenido una buena calificación, y se les orienta y se les forma con vistas a un futuro universitario. Al finalizar dicha etapa, los alumnos deben de realizar el examen *General Certificate of Education Ordinary Level* (*GCE "O" levels* por sus siglas en inglés) que les permita acceder a la universidad.

- La educación secundaria normal está orientada a la obtención de certificados profesionales. Los estudiantes pueden elegir entre una formación académica enfocada a prepararse para convertirse en profesionales- esta formación es seguida por el mayor porcentaje de los estudiantes del país-; y la formación técnica enfocada a que los estudiantes reciban una instrucción y un entrenamiento más manual y práctico.

1.3 Modelo de enseñanza

El Modelo de enseñanza en Singapur hace hincapié en la importancia de un buen plan de enseñanza, que incita a los alumnos a aprender mediante la comprensión y a construir su propio aprendizaje. Para ello, cada estudiante es valorado como una persona que tiene diversas necesidades de aprendizaje y trae consigo una amplia gama de experiencias, creencias, conocimientos y habilidades. Para que el aprendizaje sea efectivo, en Singapur, fundamentan la enseñanza en conocer los intereses y las propias experiencias del alumno, adaptan el ritmo de enseñanza y les involucran en un aprendizaje activo y reflexivo (MOE, 2022).

Las prácticas pedagógicas de los docentes de Singapur (STP por sus siglas en inglés) describen cuatro procesos de enseñanza que hacen explícito lo que los docentes ponen en práctica antes, durante y después de su interacción con los estudiantes (MOE, 2022). Dichas prácticas se recogen en la siguiente Tabla 1.

Tabla 1

Prácticas pedagógicas de los docentes de Singapur (STP)

Evaluación y retroalimentación	Cultura del aula positiva
- Verificar la comprensión - Brindar retroalimentación - Apoyar el aprendizaje autodirigido - Establecer asignaciones significativas	- Establecer interacción y compenetración - Mantener una disciplina positiva - Establecer expectativas y rutinas - Empoderar a los alumnos
Promulgación de la lección	**Preparación de la lección**
- Activar el conocimiento previo - Despertar el interés - Fomentar la participación del alumno - Marcar el ritmo - Facilitar el aprendizaje colaborativo - Usar preguntas para profundizar en el aprendizaje - Concluir la lección	- Determinar los objetivos de la lección - Considerar perfil de los alumnos - Seleccionar y secuenciar el contenido - Planificar las preguntas clave - Decidir sobre las estrategias de instrucción - Decidir ayudas didácticas y de aprendizaje

Nota. Traducción realizada por la autora del TFM a partir de MOE (2022, p.35).

Estos aspectos se planifican y se ejecutan en torno a un modelo basado en los estudios de Ashlock en 1983, quien hace énfasis en que un buen plan de enseñanza debe de conectar los objetivos de aprendizaje con el tipo de tareas que se desarrollan (Tapia & Murillo, 2020). Según Tapia y Murillo (2020) este modelo de enseñanza establece diferentes fases de aprendizaje y define la estructura de las sesiones en tres etapas principales: comprensión, consolidación y transferencia. Dicha estructura se muestra en la siguiente Figura 1.

Figura 1

Estructura del Modelo de Enseñanza en Singapur

Nota. Tomado *de El método Singapur como propuesta metodológica en la transición de Primaria a ESO* (p.23) por Gil Sáez, B, 2022.

Comprensión

La comprensión se va dando a medida que el estudiante se aproxima y se implica con un determinado concepto que se introduce en el aula. Es la primera etapa y se subdivide en tres partes: iniciación, abstracción y esquematización.

En la iniciación se presenta a los estudiantes un concepto determinado que implica la creación de un nuevo conocimiento en base de otros ya existentes. Para ello, los docentes introducen las nuevas ideas usando conocimientos previos.

En la abstracción, los alumnos tienen que ser capaces de asimilar el concepto aprendido y desarrollar ideas clave. En esta etapa los docentes toman decisiones deliberadas sobre las estrategias de instrucción a utilizar en función de los perfiles y de las necesidades de los alumnos, y, también, en base a la naturaleza de los conceptos que se enseñan.

La esquematización, conocida como la fase final de la comprensión, contiene la adquisición del concepto total por parte del estudiante, a través de la identificación de patrones o relaciones con su vida diaria.

Consolidación

En esta segunda etapa los estudiantes consolidan su aprendizaje. La finalidad del docente consiste en ayudar a los estudiantes a razonar, para ello se resumen y se revisan los puntos clave del aprendizaje y se incorporan actividades lúdicas como juegos.

Transferencia

En la tercera etapa, se proponen diversas tareas o actividades donde los alumnos puedan transferir y aplicar los conocimientos adquiridos en nuevas situaciones. Se introducen actividades de extensión y de refuerzo que conecten dichos conceptos con otros conocimientos matemáticos, con conceptos de otras áreas curriculares o con situaciones o problemas de la vida real.

Evaluación

Al contrario que en otros modelos educativos, la evaluación es una parte integral de la enseñanza que se lleva a cabo de manera continuada y que recopila evidencias e información sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Puede ser formativa, sumativa o ambas (MOE, 2020).

Específicamente, el propósito de la evaluación formativa es ayudar a los estudiantes a mejorar su aprendizaje y ayudarlos a autodirigirse en todo el proceso. Su integración en la planificación de las lecciones se puede llevar a cabo mediante actividades de clase, incluyendo técnicas de entrevistas o de reflexión o realizando tareas individuales o grupales (MOE, 2022). Uno de los aspectos clave a destacar de este tipo de evaluación es la retroalimentación que trae consigo beneficios tanto para los estudiantes como para los profesores. Gracias a esta evaluación se informa a los estudiantes sobre en qué punto se encuentran en su aprendizaje y lo que necesitan hacer para mejorar. La evaluación formativa también brinda información a los maestros sobre lo que deben de hacer para abordar las brechas de aprendizaje, por ejemplo, qué modificaciones de actividades llevar a cabo o qué cambios realizar a la hora de instruir. Este tipo de evaluación también puede llegar a ser útil para promover el aprendizaje activo y para que los estudiantes aprendan unos de otros (MOE, 2022).

En cuanto a la evaluación sumativa, sirve para medir hasta qué punto los alumnos han logrado los objetivos de aprendizaje establecidos por los programas de estudio. Se suele llevar a cabo mediante exámenes o test que se realizan tanto al principio como al final de cada lección (MOE, 2022).

1.4 Plan de estudios de las matemáticas de secundaria en Singapur

Tal y como se ha mencionado antes, según diversos informes de evaluaciones internacionales, el sistema educativo de Singapur destaca por el alto nivel de sus alumnos en la asignatura de matemáticas. Concretamente el ministerio de educación de Singapur afirma que la educación en matemáticas desempeña un papel fundamental a la hora de dotar a cada ciudadano de los conocimientos y aptitudes necesarios y de la capacidad de pensar de manera lógica, crítica y analítica para participar en la economía y en la sociedad (MOE, 2022)

Como se ha observado anteriormente, la educación secundaria en Singapur es una etapa clave, donde los estudiantes descubren sus intereses y son orientados hacia el futuro. A su vez, también es la fase final de la educación matemática obligatoria, ya que los estudiantes tienen diferentes necesidades e inclinaciones hacia las matemáticas. Por un lado, se encuentran los estudiantes que ven esta asignatura ligada a sus estudios futuros y que necesitan aprender matemáticas más avanzadas. Por otro lado, encontramos a los estudiantes que ven las matemáticas simplemente como una herramienta que utilizarán para satisfacer las necesidades de la vida cotidiana y para los que la educación matemática formal terminará en esta etapa (MOE, 2020).

Teniendo en cuenta estos dos aspectos, los objetivos de la educación matemática secundaria son garantizar que todos los estudiantes alcancen un nivel de dominio que les permita funcionar eficazmente en la vida cotidiana y; para aquellos que tienen el interés y la capacidad de aprender más, darles herramientas y dotarles de habilidades para que puedan seguir con el estudio de las matemáticas en las siguientes etapas (MOE, 2020).

Por estas razones, el plan de estudios de las matemáticas en secundaria se divide en cinco programas que atienden a las necesidades, intereses y habilidades de todos los estudiantes: matemáticas de nivel O, matemáticas de nivel N(A), matemáticas de nivel

N(T), matemáticas adicionales de nivel O y matemáticas adicionales de nivel N(A) (MOE, 2020).

Los planes de estudios de matemáticas de nivel O, N(A) y N(T) brindan a los estudiantes los conocimientos y las habilidades básicas. Para los que estén interesados en las matemáticas en los niveles secundarios superiores, pueden elegir los 2 niveles de las matemáticas adicionales (nivel O y nivel N(A) adicional) como materias optativas (MOE, 2020).

En cuanto al contenido curricular de las matemáticas en secundaria, este está desarrollado en torno a las “grandes ideas” que fundamentan la naturaleza propia de las matemáticas. Según el ministerio de educación de Singapur, las grandes ideas expresan ideas que son centrales para las matemáticas. Aparecen y conectan diferentes temas y contenidos y hay una continuación de las ideas a través de los diferentes niveles de la educación (MOE, 2022).

Es por ello por lo que, uno de los objetivos clave del programa es que los alumnos desarrollen una mayor conciencia sobre la naturaleza de las matemáticas y las grandes ideas. Dicho progreso es fundamental para la disciplina y aporta coherencia y conexión entre los diferentes temas y contenidos que se desarrollan. De esta manera, los estudiantes logran una comprensión más profunda y sólida de las matemáticas y una mejor apreciación de la disciplina. Las 8 grandes ideas que se identifican son las siguientes: diagramas, equivalencia, funciones, invariancia, medidas, notaciones, modelos y proporcionalidad (MOE, 2020). Estas atraviesan y se conectan con todos los contenidos de las diferentes líneas del currículo que se organizan en tres bloques: números y álgebra, geometría y medición, y estadística y probabilidad. En la siguiente Tabla 2, a modo de ejemplo, se muestra un fragmento del contenido específico para el segundo curso de segundaria para el nivel 0 de matemáticas (MOE, 2020):

Tabla 2

Contenido específico matemáticas del nivel de matemáticas 0 para el segundo curso de secundaria

SEGUNDO CURSO DE SECUNDARIA – NIVEL O
1. NÚMERO Y ÁLGEBRA
Ecuaciones y desigualdades
1. Concepto de ecuación y desigualdad 2. Resolver desigualdades simples y representando las soluciones en la recta numérica 3. Gráficas de ecuaciones lineales en dos variables 4. Resolver ecuaciones lineales simultáneas en dos variablesResolver ecuaciones cuadráticas por factorización

Nota. Traducción literal realizada por la autora del TFM del MOE (p.17-23) (2022).

2. Método Singapur

El Método Singapur se define como una herramienta pedagógica útil para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, el Método Singapur es calificado como una estrategia concreta, que beneficia el desarrollo de procesos, actitudes y habilidades que avivan el pensamiento matemático. Esta metodología propone dejar a un lado la memorización y el cálculo tradicional y su objetivo es que los estudiantes se animen a explorar y jugar con los conceptos matemáticos para comprender mejor cómo funcionan y cómo se aplican. Es decir, el Método Singapur promueve el desarrollo cognitivo del alumno en el campo del pensamiento lógico matemático (Zapatera, 2020).

Es de gran importancia mencionar que el Método Singapur surge del resultado de un estudio realizado a nivel internacional acerca de los mejores métodos de enseñanza.

Sus principales precursores son los pedagogos Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp (Tapia & Murillo, 2020). A continuación, se presentan y explican cada una de las teorías que sustentan a este método novedoso.

2.1 Teorías que sustentan al Método Singapur

2.1.1 Jerome Bruner

El pedagogo Jerome Bruner, en su investigación sobre el desarrollo cognitivo de los niños, desarrolló en los años 60 la teoría del aprendizaje constructivista que se conoce también como el aprendizaje por descubrimiento. Esta teoría dio paso a cambiar los métodos tradicionales que se centraban en la figura del docente y percibían a los estudiantes como receptores pasivos de los conocimientos. La teoría de Bruner promueve que los estudiantes adquieran los conocimientos por sí mismos; es decir, comprendía el aprendizaje como un proceso activo que fomenta la competencia de "aprender a aprender" y donde el estudiante construye su propio proceso de aprendizaje (Zapatera, 2020).

Dicha teoría contempla que la estructura mental del alumno es uno de los aspectos más determinantes en el aprendizaje de nuevos conocimientos. Y es que, según Bruner, hay tres modos de representación por los que los niños almacenan y codifican el conocimiento en sus memorias: la representación enactiva, basada en la acción; la representación icónica, basada en imágenes; y la representación simbólica basada en el lenguaje. Según Bruner, para la adquisición total del conocimiento toda persona debe de pasar por esas tres representaciones de manera secuencial. En la representación enactiva, se representan acontecimientos, hechos y experiencias y se aprende mediante la acción. En la representación icónica, se trata de representar el conocimiento a través de imágenes y esquemas y se recurre a la imaginación. En la última representación, se utiliza el lenguaje hablado o escrito para adquirir, almacenar y comunicar las ideas acerca del conocimiento (Marín, 2021).

2.1.2 Zoltan Dienes

Otra teoría en la que se basa el Método Singapur es la variación sistémica de Zoltan Dienes, quien apoya sus planteamientos sobre la base de los teóricos Piaget y Bruner; los cuales han establecido lo que es y lo que debe ser la educación matemática.

Dienes sostiene que las matemáticas deben de ser enseñadas empleando diferentes vías o aplicaciones, con el objetivo de evitar la repetición, la memorización y la mecanización, utilizando, por ejemplo: juegos divertidos y materiales manipulables, entre otros. Cabe destacar que Dienes fue el inventor de algunos materiales manipulables que hoy en día se utilizan, como lo son los bloques multibase (Tapia, et. al., 2020).

Bruner, por otro lado, de acuerdo con sus investigaciones, sustenta que, de forma conjunta, distintos estudiantes pueden llegar a abordar un mismo problema de manera diferente. Esto conlleva a que cada estudiante pueda resolver el problema de acuerdo con lo que considere correcto. Precisamente dicha teoría apoya al estudiante a desarrollar la habilidad de generar estrategias mentales a la hora de abordar un problema matemático. Para ello, Dienes analizó algunos de los principios que se utilizan en los primeros grados de la enseñanza que, a su parecer, deben de ser usados también en niveles superiores (Tapia, et. al., 2020):

- Principio de la constructividad: El aprendizaje debe de ser constructivista; es decir, el estudiante debe de construir y elaborar dichos conceptos. Por ejemplo, mediante la manipulación de objetos que ayudan a que los niños aprendan y creen el conocimiento a partir de la experiencia.
- Principio dinámico: Los estudiantes deben revelar experiencias mediante el material adecuado y en forma de juego, para que sea un aprendizaje significativo para ellos.
- Principio de la variabilidad: El aprendizaje debe de incluir diferentes situaciones, diversas maneras de buscar la solución y diversos materiales.

2.1.3 Richard Skemp

Otro teórico que aportó importantes ideas para el Método Singapur fue Richard Skemp, quien examinó la diferencia entre el saber y el hacer, desde la comprensión relacional (saber qué) y la comprensión instrumental (saber hacer). Según Skemp, los estudiantes deben de ser capaces de desarrollar estos dos tipos de comprensiones, para adquirir un conocimiento total acerca de un concepto (Tapia & Murillo, 2020).

La comprensión relacional, de acuerdo con el autor, se sustenta en la capacidad que se tiene para explicar el propio conocimiento. Se basa en el desarrollo del pensamiento lógico matemático, el cual permite a los estudiantes comprender la estructura conceptual de los contenidos y los procedimientos matemáticos. De esta manera, ellos mismos trabajan en la construcción del conocimiento y en la estrategia resolutiva. En cuanto a la comprensión instrumental, permite tener la capacidad de resolver una operación matemática con la utilización de reglas generales y mediante la instrucción del docente. La comprensión instrumental, acelera el proceso de enseñanza-aprendizaje, y se basa en la memorización de fórmulas para obtener la respuesta más confiable y rápida (Tapia, et al., 2020).

2.1.4 Lev Vygotsky

Otra de las teorías que sustenta e influye al Método Singapur es el trabajo de Lev Vygotsky y su teoría sobre la zona de desarrollo próximo (ZPD por sus siglas en inglés). La zona de desarrollo próximo se define como la diferencia existente entre el nivel de desarrollo real del estudiante, lo que es capaz de resolver de manera independiente, y el nivel de desarrollo potencial, lo que es capaz de resolver bajo la supervisión de un adulto o compañero (Vygotsky, 2006). La estructura de las diferentes zonas desarrollada por Vygotsky se muestra en la Figura 2:

Figura 2

Zona de desarrollo próximo

Nota. Tomado de *Los Secretos del currículo de matemáticas de clase mundial. Método Singapur* (p.19), por Wenxi Lee, 2022, Bowker.

Como se puede observar, dentro de la ZPD los alumnos pueden encontrarse en diferentes zonas y esto puede afectarles en su desarrollo y en el aprendizaje (Lee, 2022):

- Zona de desarrollo real (zona A en la imagen): El alumno se mueve entre lo que es capaz de hacer, por lo que, su nivel de competencia será mayor y no encontrará estimulo ni motivación alguna.
- Zona de desarrollo potencial (zona B en la imagen): El alumno se mueve entre lo que no sabe hacer ni siquiera con ayuda, en consecuencia, perderá motivación y autoestima.
- Zona de desarrollo próximo (zona ZPD en la imagen): El alumno se mueve entre lo que ya sabe y lo que podría aprender con la ayuda y la orientación de un compañero o de una persona con conocimientos. En esta zona el alumno aprende y, a su vez, evita la monotonía y la frustración.

Vygotsky centra su teoría en el estudio de la zona ZPD, donde se encuentran los conocimientos que todavía no han madurado, pero que en un futuro próximo alcanzarán su madurez. Vygotsky defiende que la madurez de dichos conocimientos se debe en gran medida al entorno social y a la interacción con otras personas. Destaca el papel tan importante que deben de desempeñar los docentes y los compañeros más avanzados a la hora de apoyar y guiar el aprendizaje del alumno. Por ello, su principal aportación al método fue integrar en el aula el aprendizaje colaborativo y un estilo de enseñanza recíproco (Vygotsky, 2006).

Por otro lado, también teorizó con la manera adecuada de enseñar los contenidos. Para ello, sostuvo que el docente debe conocer la zona de desarrollo próximo en la que se encuentran sus alumnos y, en base a ello, desarrollar unas actividades u otras. Según Vygotsky, la mejor manera de desarrollar el aprendizaje es dividir las actividades en tareas más pequeñas y de manera continua. Primeramente, el profesor debe desarrollar ejercicios o tareas que resulten alcanzables para motivar a los alumnos y, a posteriori, aumentar progresivamente la dificultad. Es decir, estos ejercicios progresivos -conocidos también como aprendizajes “llave” favorecerán a que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos para enfrentarse a nuevos retos y, en consecuencia, ayudarán a que los estudiantes avancen en su aprendizaje. (Vygotsky, 2006).

2.2 Componentes clave del currículo Matemático del Método Singapur

En este apartado, adentrándonos ya en el currículo Matemático, se detallan los componentes clave del Método Singapur. Se presenta el marco conceptual del método para, tras ello, explicar el enfoque C-P-A que se mencionó en el capítulo 1 de este TFM. Asimismo, se muestra la estructura espiral que tiene el currículo y, finalmente, se presenta y explica el Modelo de Barras.

2.2.1 Marco conceptual del Método Singapur

El currículo de matemáticas de Singapur, desde la creación de su marco conceptual en 1988, está orientado a la resolución de problemas, apoyando su enfoque en cinco componentes interrelacionados: los conceptos, las habilidades, los procesos, la metacognición y las actitudes. El Marco conceptual del Método Singapur (SMCF por sus silgas en inglés) no sólo representa la filosofía del currículo, sino que dirige a los profesores en cómo estructurar las lecciones, además de ayudar al MOE a la hora de diseñar y revisar el currículo (Zapatera, 2020). Los cinco componentes se muestran en la siguiente Figura 3.

Figura 3

Marco curricular del Método Singapur

Nota. Tomado de *El Método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje* (p.265), por A. Zapatera, 2020.

Conceptos: El currículo de Singapur hace hincapié en el dominio de los conceptos, y las conexiones inter e intra-conceptuales. Y es que, en dicho currículo, todos los conceptos están conectados e interrelacionados entre ellos (Lee, 2022). Las conexiones inter-conceptuales fomentan que los alumnos reconozcan las relaciones entre los conceptos, por ejemplo, la resta es la operación inversa de la suma. En cuanto a las conexiones intra-conceptuales, consolidan el conocimiento de los alumnos dentro de los propios conceptos, ejemplo de ello es, conocer la suma no solo consiste en sumar cosas, sino también en la comprensión de las distintas propiedades que se mantienen constantes cada vez que se suma (Lee, 2020).

Procesos: El currículo da importancia a las habilidades que se involucran en el proceso de adquisición y en la aplicación del conocimiento matemático. Se incluyen: el razonamiento, es decir, la capacidad de analizar situaciones matemáticas y desarrollar argumentos lógicos; la comunicación, ligada a la habilidad de utilizar el lenguaje matemático para expresar ideas; las conexiones, como la habilidad de relacionar ideas y conceptos matemáticos; y, por último, las aplicaciones y el modelado, habilidades para conectar las matemáticas con la resolución de problemas del mundo real (Godino, 2003).

Habilidades: El currículo de Singapur está diseñado para enfocar la instrucción matemática tanto en las habilidades del cálculo como en el pensamiento lógico-matemático. Se basan en que, sin un cierto nivel de habilidad técnica, los niños son incapaces de desarrollar el pensamiento racional. A su vez, sin la comprensión conceptual y sin la capacidad de razonar matemáticamente, es más probable que los niños tengan habilidades de cálculo más bajas. Por ello trabajan conjuntamente tanto las habilidades como la comprensión tanto relacional como instrumental (Lee, 2020).

Metacognición: Uno de los aspectos clave de este currículo, que se sustenta en la teoría de Bruner, es el desarrollo de la metacognición. Que se conceptualiza como el "pensamiento del pensamiento", es decir, la toma de conciencia, el monitoreo y la regularización del propio pensamiento y del aprendizaje (Lee, 2020).

Actitudes: El currículo tiene en cuenta aspectos afectivos que tengan los estudiantes con el aprendizaje de las matemáticas, como pueden ser las creencias sobre las matemáticas, el interés o el disfrute que tienen en su aprendizaje, su confianza o su perseverancia (Lee, 2020).

2.2.2 Enfoque CPA

El enfoque de la enseñanza de las matemáticas en el Método Singapur, conocido como Enfoque C-P-A, nace de la teoría del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner. Con este enfoque los estudiantes consiguen desarrollar un conocimiento conceptual completo a través de tres etapas que están graduadas según su complejidad: etapa concreta, etapa pictórica y etapa abstracta. A lo largo de estas tres etapas los alumnos descubren y exploran por sí mismos los conceptos, las relaciones y los procedimientos como partes de un todo organizado (Alonso, 2013):

Etapa concreta: En esta primera etapa comienzan a comprender un concepto mediante la manipulación de objetos y mediante la acción. Los estudiantes utilizan material concreto, real, palpable y cercano; es decir, objetos que se usan en la vida diaria como, por ejemplo: bloques, fichas, piezas y etc.

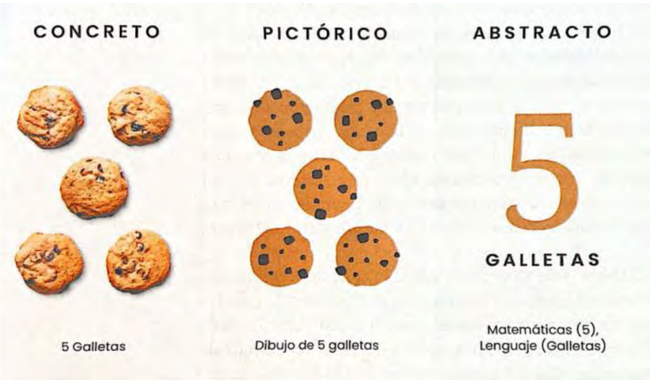
Etapa pictórica: Los alumnos avanzan en la comprensión del concepto mediante la representación gráfica. Representan mediante dibujos o imágenes las relaciones entre cantidades o los procesos matemáticos subyacentes.

Etapa abstracta: En esta última etapa los estudiantes representan el proceso mediante el lenguaje matemático, es decir mediante signos o símbolos matemáticos.

Se muestra un ejemplo de las tres etapas en la Figura 4.

Figura 4

Ejemplo de aplicación enfoque Concreto-Pictórico-Abstracto



Nota. Adaptado de *Los Secretos del currículo de matemáticas de clase mundial. Método Singapur* (p.21), por Wenxi Lee, 2022, Bowker.

2.2.3 Currículo Espiral

El currículo en el Método Singapur destaca por tener una estructura espiral que como se puede observar en la Figura 5, fomenta el aprendizaje continuo, evitando que los conceptos se olviden con facilidad y, en consecuencia, favorece que estos se consoliden en los alumnos (Gibbs, 2014).

Figura 5

Currículo en espiral

Nota. Tomado de *Los Secretos del currículo de matemáticas de clase mundial. Método Singapur* (p.19), por Wenxi Lee, 2022, Bowker.

Este tipo de enseñanza se consolida de la siguiente manera; se introduce un concepto y se trabaja con él varias veces durante el mismo año y en años posteriores, aumentando gradualmente su complejidad y su nivel de abstracción (Gibbs, 2014). Con el currículo en espiral, se fortalecen los conocimientos previos que, a su vez, sostienen los nuevos conocimientos. Los conceptos son revisados continua y sistemáticamente, de manera que los estudiantes analizan y estudian los conceptos en diferentes y variados momentos, y su aprendizaje se encamina a lo abstracto y a lo complejo nivel tras nivel. Por ejemplo, al enseñar un tema en forma de espiral, los docentes no abarcan toda la información de un concepto en una sola clase. Como alternativa al método tradicional, el contenido se desglosa en lecciones manejables para que los alumnos puedan fortalecer los contenidos previos, y tras ello, ser expuestos a ideas cada vez más difíciles. (Gibbs, 2014).

2.2.4 Modelo de Barras

El Modelo de Barras se considera una de las estrategias de resolución más importantes del Método Singapur y fue implantado dentro del método a principios de los años 90. El Modelo de Barras, a través del modelado, permite crear la representación de datos visualmente y permite explorar distintos conceptos matemáticos. El Dr. Kho Tek Hong, autor de este modelo, destaca cuatro razones para el uso del modelado dentro de la enseñanza del Método Singapur (Kho,1987):

- Ayuda los alumnos a obtener mejor comprensión de los conceptos matemáticos como las fracciones, los cocientes y los porcentajes
- Ayuda a los alumnos a planificar los pasos de resolución de un problema matemático
- Emplea un método comparable y menos abstracto que el método algebraico
- Estimula a los alumnos a involucrarse en la resolución de problemas desafiantes

El Modelo de Barras es esencial a la hora de prolongar la etapa pictórica del enfoque C-P-A en los niveles más altos de la enseñanza, como, por ejemplo, en secundaria. Los niños desde los primeros años de enseñanza interiorizan el valor de la visualización a la hora de resolver los problemas y esto les ayuda a aplicarlo en otros entornos, pues es una herramienta que permite fortalecer la comprensión conceptual en muchos ámbitos.

Es importante destacar que el Modelo de Barras tiene un orden o estructura base que está compuesta por tres formas de modelado: partes-todo, comparación y antes-después (Lee, 2022):

Modelado Partes-Todo: Esta estructura se utiliza para representar situaciones donde el todo se compone de diferentes partes; es decir, el todo se divide en dos o más partes. En primaria se utiliza para representar el concepto de que un número puede estar formado por dos o más partes. Una vez conocidas las partes, el estudiante será capaz de conocer el todo, al sumar las partes. Cuando éste conozca el todo y así una o alguna de sus partes, se puede encontrar la parte faltante, con la utilización de la resta. En los cursos superiores, el modelo ayuda a los alumnos a visualizar los problemas de multiplicación y división, así como las fracciones y los porcentajes.

***Modelado* de Comparación:** Se utiliza esta estructura para comparar dos o más cantidades y analizar sus diferencias. En primaria se suele utilizar para enseñar los conceptos de «mayor que» o «menor que». En niveles más avanzados, el modelo de comparación se suele utilizar para resolver problemas de multiplicación, división, cocientes, porcentajes y fracciones.

Modelado Antes – Después: El modelado antes y después, relaciona dos valores; el nuevo valor y el valor original luego de un incremento o decremento. Generalmente se utiliza este tipo de modelo para las estructuras más complejas como las que se usan en los cálculos.

3. Educación Matemática en España

3.1 Sistema Educativo Español

El Sistema Educativo Español es regulado por la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación (LOMLOE) (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], s.f.). El sistema educativo se organiza en etapas, ciclos, grados, cursos y niveles de enseñanza de una manera en que se posibilita la transición entre unas y otras. Por nivel educativo, se estructura en cuatro grandes bloques: educación infantil, educación secundaria básica, educación secundaria postobligatoria y educación superior. La educación infantil es la primera etapa educativa, que se divide en dos periodos según su obligatoriedad. El primer periodo, abarca desde los 0 a los 3 años y no es obligatorio, por lo contrario, el segundo periodo es de carácter obligatorio para todos los niños de entre 3 y 6 años. La educación primaria, consta de 6 cursos académicos donde los alumnos comienzan a desarrollarse cognitiva y socialmente. Estos seis cursos se centran en adquirir fundamentalmente los siguientes conocimientos básicos: escribir, leer, expresarse y calcular (MEFP, s.f.).

La Educación Secundaria Obligatoria, está formada por cuatro cursos, en los que los estudiantes tienen edades promedio entre 12 y 16 años. Se organiza en dos ciclos, el primero consta de tres cursos escolares y el segundo de uno. El último curso tiene un carácter orientativo, los alumnos pueden escoger entre la opción de enseñanzas académicas para la iniciación al Bachillerato o la opción de las enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional (MEFP, s.f.)

Por consiguiente, la educación postobligatoria la cual no es de acceso obligatorio y tiene una duración de 2 años, está fundamentalmente dirigida a enseñar al alumno conocimientos específicos del área en el que se quiere especializar. Encontramos en este bloque, el bachillerato, en donde los estudiantes se forman para acceder a la universidad, y los ciclos formativos de grado medio, en donde los estudiantes se pueden especializar como técnicos. En la educación superior, se encuentran los ciclos formativos de grado superior en los que los estudiantes se especializan como técnicos superiores y la enseñanza universitaria con la disponibilidad de posteriormente acceder a una maestría y a un doctorado (MEFP, s.f.).

Uno de los principios de la Ley de Educación es que toda la comunidad educativa trabaja en conjunto para garantizar una educación equitativa y de calidad. La responsabilidad del éxito académico de los alumnos no recae solo en los estudiantes individualmente, sino que también en sus familias, profesores, escuelas, administraciones educativas y, en última instancia, en la sociedad en su conjunto. Cada uno de ellos realiza una contribución específica: las familias colaboran y se comprometen con el trabajo del día a día de sus hijos y con la vida del centro educativo. En cuanto a las escuelas y los docentes, deben de crear entornos de aprendizaje enriquecedores, estimulantes y exigentes. Además de ello, el profesorado participa en la toma de decisiones pedagógicas y en el control y la gestión de los centros. Las administraciones educativas son los encargados de gestionar y proporcionar los recursos necesarios para proporcionar a todos los alumnos una educación de calidad (MEFP, s.f.).

A continuación, se muestran dos de las características propias del sistema educativo español como son su descentralización y su educación por competencias.

3.1.1 Un sistema descentralizado

El proceso de descentralización del sistema educativo español comenzó gracias a las normas establecidas por la Constitución de 1978. Una de las primeras comunidades que obtuvo dicha autonomía fue Cataluña en 1981, que recuperó el Parlamento y el gobierno de la Generalitat, que entre otras responsabilidades se encarga de gestionar el sistema educativo. La descentralización se planteó como una manera de fortalecer los rasgos propios de las comunidades, mejorar el servicio público y lograr la participación de todos los grupos de la comunidad. De esta manera, se esperaba que las autonomías tradujesen y ejecutasen las políticas educativas centrales (Blanch, 2011).

Actualmente, el estado establece las normas básicas sobre la ordenación general del sistema, los aspectos básicos del currículo y fija las condiciones necesarias para la obtención de los títulos. En cuanto a las autonomías, tienen la autoridad de establecer y concretar el currículo por completo, promulgar y crear leyes y decretos, desarrollar nuevas formas de gestión y también tienen competencia plena sobre los centros, los profesores y los alumnos. Por otro lado, las enseñanzas mínimas establecidas por el estado varían en el caso de las comunidades autónomas que tienen una lengua propia como puede ser el catalán. En estos casos, la enseñanza mínima representa el 55% del horario total, en contra de aquellos que no tienen una lengua propia en las cuales la enseñanza mínima representa un 65% (Blanch, 2011).

Sin embargo, a la hora de completar los currículos, las autonomías deben de respetar la estructura general de los niveles educativos en los respectivos cursos, áreas y asignaturas establecidas por el gobierno central. Es por eso por lo que, aunque cada comunidad establece un modelo educativo con rasgos propios, el sistema educativo español se consolida como unitario y con un carácter general para todo el territorio nacional (Frías, 2007).

3.1.2 Modelo Competencial

Una de las características propias del sistema educativo español es la educación por competencias entrada en vigor gracias a la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, impuesto por la política educativa de la Unión Europea (Contreras, 2019). El enfoque por competencias busca el desarrollo integral de los estudiantes a partir de la adquisición y el desarrollo de habilidades, actitudes y valores, así como de conocimientos que sean transferibles a los distintos contextos laborales, profesionales y sociales. El modelo competencial, se fundamenta en un sistema de enseñanza y aprendizaje donde los estudiantes desarrollan la autonomía y la capacidad de aprender a aprender. En todo este proceso educativo, existen dos tipos de competencias, las competencias clave o también llamadas transversales y las competencias específicas (Villa et al., 2007).

Las competencias claves son aquellas habilidades necesarias que todas las personas deben de tener para su desarrollo personal, para su empleabilidad, para la integración social y para vivir de una manera sostenible y saludable. Estas se desarrollan permanentemente, desde la primera infancia hasta la vida adulta, por medio del aprendizaje tanto formal e informal en todos los contextos, incluyendo la familia, el centro educativo, el lugar de trabajo o el entorno (MEFP, s.f.). Las competencias clave se desarrollan de manera transversal, ya que no existe jerarquía entre ellas y no están ligadas a una única área o ámbito, sino que todas se desarrollan mediante el aprendizaje en diferentes campos o disciplinas. Dichas competencias son desarrolladas por el Ministerio de Educación y Formación profesional del Gobierno de España y enumeradas y descritas en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero (MEFP, s.f., párr. 2):

CV1. Competencia en comunicación lingüística: es el desarrollo de la acción comunicativa a través de múltiples modalidades desde la oralidad y la escritura hasta la mediada por la tecnología.

CV2. Competencia plurilingüe: utilizar distintas lenguas de forma apropiada y eficaz.

CV3. Competencia digital: desarrollo del uso seguro, saludable, crítico y responsable de las tecnologías digitales.

CV4. Competencia emprendedora: desarrollar un enfoque vital dirigido a actuar sobre oportunidades e ideas, utilizando los conocimientos específicos necesarios para generar resultados de valor para otras personas.

CV5. Competencia personal, social y de aprender a aprender: capacidad de reflexionar sobre uno mismo para auto conocerse, aceptarse y promover un crecimiento personal.

CV6. Competencia en conciencia y expresión culturales: comprender y respetar el modo en que las ideas, las opiniones, los sentimientos y las emociones se expresan y se comunican de forma creativa y por medio de una amplia gama de manifestaciones artísticas y culturales.

CV7. Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería: comprender el mundo utilizando métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería.

CV8. Competencia ciudadana: desarrollarse como un ciudadano responsable y participar plenamente en la vida social y cívica, comprometidos con la sostenibilidad y el logro de una ciudadanía mundial.

En cuanto a las competencias específicas, estas son las habilidades o los desempeños que el alumnado debe de desarrollar en actividades o en situaciones que requieren de los saberes básicos de cada área o asignatura. En la mayoría de los casos son reguladas y desarrolladas por los organismos de cada comunidad autónoma (MEFP, s.f.).

3.2 Las matemáticas en la educación secundaria obligatoria

En la educación secundaria obligatoria la matemática es considerada como la tercera asignatura con más cantidad de horas lectivas junto con las asignaturas de lenguas. Y es que como se ha observado anteriormente, la “competencia matemática” es una de las competencias clave que debe de alcanzar un estudiante en todo su proceso educativo (Lapuebla-Ferri et al., 2019). El currículo de las matemáticas se desarrolla en base al objetivo de adquirir las competencias clave de la etapa, siendo sus líneas principales la resolución de problemas y las destrezas socioafectivas (MEFP, s.f.). A continuación, se presenta el modelo didáctico de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria y, tras ello, se explican tanto el antiguo como el nuevo currículo de matemáticas en Cataluña, pues durante este curso de transición (2022-2023) tras la aprobación del Decreto 175/2022, de 27 de septiembre se han utilizado ambos currículos.

3.2.1 Modelo didáctico de la enseñanza de las matemáticas

Para contextualizar la situación de la enseñanza de las Matemáticas en España, se han revisado los resultados obtenidos en las evaluaciones internacionales como lo son TIMSS y PISA, que dejan al descubierto las múltiples dificultades que tienen los estudiantes españoles en el desarrollo de la competencia de matemática. Los resultados obtenidos a lo largo de los años no han sido tan buenos, concretamente en la última evaluación PISA realizada en el año 2018, la puntuación media alcanzada por los estudiantes de España fue de 481 puntos. Como ya se mencionó antes, la puntuación de España fue inferior a la media OCDE (489) y al total de la Unión Europea (494). Esta evaluación también mostró la gran distancia que hay entre España y países punteros como lo son China (591), Singapur (569) o Hong Kong (551) quienes consiguieron las puntuaciones más altas de la evaluación (Cebrián, 2019).

En la búsqueda para identificar posibles errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas en España, encontramos múltiples teorías que buscan hallar una explicación a lo que realmente está sucediendo. Todos los autores de trabajos de investigación coinciden en que no es un factor, si no un conjunto de factores los que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dejando a un lado los factores culturales y sociológicos, se distinguen principalmente los siguientes factores propios del sistema educativo (Beltrán, 2020): formación del profesorado y practicas docentes, materiales didácticos presentes en el aula, organización y diseño curricular, organización de los centros escolares y financiación.

En recientes informes de la OCDE se menciona que el currículo oficial establecido para la educación secundaria es demasiado amplio y denso. Este problema también está afectando a otros países, quienes describen el currículo como "*mile wide and an inch deep"*, es decir, un currículo extenso y muy poco profundo (Beltrán, 2020). Por consiguiente, la necesidad de tener que impartir la mayor parte de los contenidos establecidos por el currículo hace que la práctica del docente no sea del todo adecuada. Las unidades son vistas rápidamente y se utilizan estrategias poco innovadoras, las cuales acaban siendo memorizadas y aplicadas mecánicamente por parte de los alumnos (Beltrán, 2020). Desde esta perspectiva, a pesar de que las metodologías van evolucionando hacia el constructivismo, todavía se observan aulas donde el método tradicional está muy presente. El modelo tradicional, que tiene un enfoque empirista, se sustenta en la imitación. El alumno actúa como agente pasivo, aprende mediante mecanismos estandarizados y memorísticos, y se basa en la repetición y en la memorización para adquirir conceptos que raramente comprende (De la Torre, 2021). Dicho modelo se estructura de esta manera: primeramente, se introducen en el aula los nuevos conceptos mediante definiciones, teoremas o descripciones propias de la matemática teórica. A continuación, los docentes realizan ejercicios de demostración o ejemplificación en el que se aplican los conceptos teóricos dados. Finalmente, son los propios alumnos los que ejercitan y realizan diferentes actividades ligadas al contenido (Rodríguez, 2022).

Por otro lado, actualmente no se revisan los libros y los materiales didácticos que se utilizan en el aula, ya que la necesidad de una revisión y aprobación previa por parte de la administración central fue eliminada en el año 1997 (Beltrán, 2020). Por lo general, el libro de texto es la principal herramienta educativa de la educación matemática en España. Generalmente, los libros determinan la programación, la planificación y el desarrollo de las materias, dejando poco espacio a la exploración, a la investigación y a la experimentación por parte de los propios alumnos. Y es que, mediante los libros se presentan los conceptos de una manera rígida y cerrada, de manera que los alumnos no construyen el conocimiento.

En este hilo y a diferencia de la Educación Primaria, los materiales manipulables no suelen ser utilizados en dicha etapa. Aparentemente, en España hay una cierta falta de formación por parte de los profesores a la hora de aplicar y desarrollar materiales manipulables y tampoco se encuentran disponibles en el mercado libros de textos que utilicen dicha metodología constructivista (Gil, 2022).

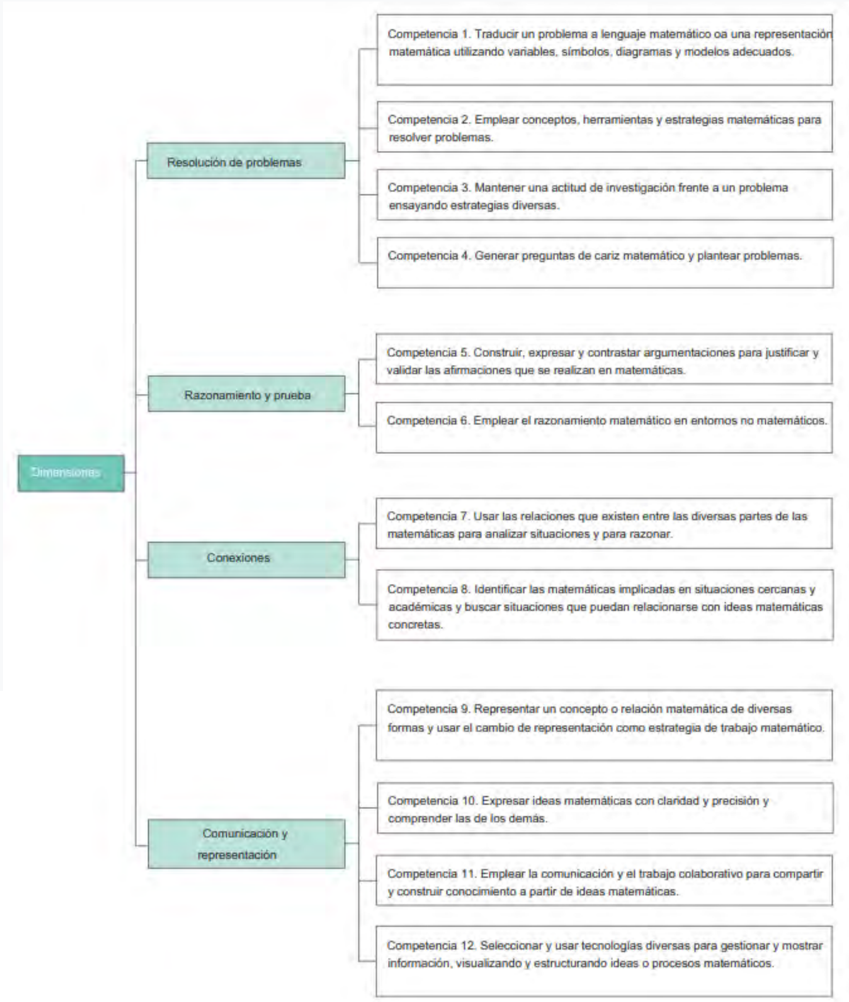
Por otra parte, con el objetivo de transferir los conocimientos de un nivel educativo a otro, desde la ley LOCE de 2003 se incluye la necesidad de que la enseñanza matemática deba ser tratada de forma cíclica. Los currículos deben de ser diseñados en base a la adquisición del conocimiento a partir de la repetición de los contenidos del curso anterior. En consecuencia, en cada curso se introducen nuevos contenidos y se revisan los de los cursos anteriores, aumentando de esta manera su campo de aplicación y las relaciones entre los contenidos (Marcellán, 2017). Sin embargo, la Real Sociedad Matemática Española (RSME) considera que no es necesaria la revisión de los conocimientos de cursos anteriores y hace hincapié en la importancia de trabajar los contenidos con profundidad y no tanto repitiéndolos (Marcellán, 2017).

3.2.2 El currículo matemático en Cataluña

En Cataluña, de acuerdo con el artículo 97 de la LEC (Ley 12/2009, de 10 de julio) los centros ejercen la autonomía pedagógica a partir del marco curricular establecido en el Decreto 187/2015 de 25 de agosto, donde se concretan las competencias específicas, los contenidos clave y los criterios de evaluación para el ámbito matemático en la educación secundaria obligatoria (Generalitat de Catalunya Departament d' Ensenyament [GCDE], 2017). La elaboración de la propuesta de competencias matemáticas, que se compone de doce competencias específicas, se estructura en cuatro dimensiones: resolución de problemas; razonamiento y prueba; conexiones; y comunicación y representación (GCDE, 2007). A continuación, en la siguiente Figura 6 se muestran las competencias clave que abarca cada bloque dimensional:

Figura 6

Competencias especificas ámbito matemático en Cataluña



Nota. Adaptado de *Competències bàsiques de lámbit matemàtic* por Generalitat de Catalunya Departament d' Ensenyament, 2017.

Dichas competencias, están totalmente integradas y conectadas con los contenidos del currículo. Sin embargo, han realizado una elección de aquellos contenidos que contribuyen en mayor medida a la obtención de cada competencia, los cuales son nombrados como contenidos clave (GCDE, 2017). Explícitamente, los contenidos clave son los siguientes: sentido del número y de las operaciones, razonamiento proporción, cálculo, lenguaje y cálculo algebraicos, patrones, relaciones y funciones, representación de funciones, análisis del cambios y tipos de funciones, sentido espacial y representación de figuras tridimensionales, figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción, relaciones y transformaciones geométricas, magnitudes y medida, relaciones métricas y cálculo de medidas en figuras, sentido de la estadística, datos, tablas y gráficos estadísticos, métodos estadísticos de análisis de datos, sentido y medida de la probabilidad.

A modo de ejemplo, a continuación, en la Tabla 3 se muestran un fragmento de los contenidos curriculares de las matemáticas para el segundo ciclo de la educación secundaria. El contenido curricular al completo se muestra en el Anexo 1.

Tabla 3

Un fragmento del contenido curricular matemático para el segundo curso de secundaria en Cataluña

SEGUNDO CURSO DE SECUNDARIA
CAMBIOS Y RELACIONES
Ecuaciones de 1º (CC4, CC5)
- Reglas del álgebra - Orígenes del álgebra simbólica - Calculo algebraico con calculadora o GeoGebra - Resolución de problemas con ecuaciones

Nota. Tabla elaborada por la autora de este TFM con la información obtenida de la Generalitat de Catalunya Departament d' Ensenyament, 2017.

En cuanto a la evaluación, forma parte de todo el proceso de enseñanza, tanto durante su transcurso como en la comprobación de los aprendizajes adquiridos mediante la evaluación final. Se requiere que las actividades de evaluación final de las competencias deben ser lo suficientemente ricas para que los alumnos puedan mostrar todo lo que saben. Por lo tanto, deben de tener más de una solución, deben de poder ser resueltas de diversas formas, deben de hacer posible que el alumno tome decisiones y aplique conexiones y deben de pedir justificaciones acerca de los procesos y las soluciones que se han realizado (GCDE, 2017).

3.2.3 El nuevo currículo en Cataluña

El nuevo Decreto 175/2022, del 27 de septiembre, establece la ordenación de las enseñanzas de la educación básica en Cataluña, incluyendo el nuevo currículo básico de la educación secundaria obligatoria. En este decreto se define la estructura del currículo, que incluye como novedad las competencias clave, los indicadores competenciales al final de la etapa y los nuevos elementos curriculares para el despliegue de las áreas y materias: vectores, competencias específicas, criterios de evaluación, saberes y situaciones de aprendizaje.

Concretamente, el desarrollo curricular de las matemáticas de secundaria presta especial atención a la consecución de las competencias clave establecidas en el perfil competencial de salida del alumnado, que como en el antiguo currículo tiene como líneas principales la resolución de problemas y las destrezas socioemocionales. Específicamente, en la resolución de problemas se destaca la capacidad de interpretación de los problemas, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias de resolución, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de la solución.

En cuanto a las destrezas socioemocionales, el nuevo currículo se basa en las diversas investigaciones didácticas que muestran que el rendimiento en matemáticas puede mejorarse si se contribuye a superar los prejuicios preestablecidos y desarrollar emociones positivas hacia las matemáticas. Destaca que trabajar el dominio de destrezas socioemocionales como la identificación y el manejo de emociones, afrontar los desafíos, mantener la motivación y la perseverancia y desarrollar el autoconcepto, entre otros, permitirá al alumnado aumentar su bienestar general, construir su capacidad de resiliencia y prosperar como estudiante de matemáticas.

A su vez, las competencias específicas de matemáticas se relacionan entre sí y han sido agrupadas en torno a cinco bloques competenciales según su naturaleza: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación y gestión socioemocional.

Se ha establecido que dichas competencias, se deben trabajar mediante la elaboración de situaciones de aprendizaje, que conectes los conceptos matemáticos con la realidad y que inviten al alumnado a la reflexión, a la colaboración y a la acción. Además de ello, las competencias específicas se valorarán a través de los criterios de evaluación. Los cuales concretan los aprendizajes que queremos identificar en el alumnado y la forma de cómo debemos evaluarlos (Generalitat de Catalunya [Gencat], 2022). Las competencias específicas y los criterios de evaluación del nuevo currículo se muestran en el Anexo 2.

Por su parte, los criterios de evaluación también establecen los saberes que se deben de desarrollar durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos saberes integran conocimientos, destrezas y actitudes que ayudarán a la consecución de las competencias específicas a lo largo de la etapa.

Los saberes han sido agrupados en sentidos como conjuntos de destrezas relacionadas con los distintos ámbitos de las matemáticas: numérico, medida, algebraico y el pensamiento computacional, espacial, estocástico y socioemocional. A continuación, a modo de ejemplo para evitar extendernos más de lo necesario, se muestran un fragmento de los contenidos para el sentido algebraico para los tres primeros cursos de la educación secundaria. La enumeración de los 6 sentidos principales con sus correspondientes contenidos se muestra en el Anexo 3.

Sentido algebraico

- Modelo matemático
    - Modelización y resolución de problemas contextualizados, también de la vida cotidiana, secundándose en representaciones matemáticas y en el lenguaje algebraico.

- Obtención de conclusiones razonables sobre una situación de la vida cotidiana una vez modelizada.

- Variable
  - Comprensión del concepto de variable en sus distintas naturalezas.

II. Diseño metodológico

Antes de pasar a los distintos apartados de esta parte II, es importante señalar que este TFM tiene una estructura que denominamos “híbrida”, pues se fusiona el trabajo de investigación con el de innovación. Aunque la innovación tiene mayor peso en este TFM, se ha visto necesario añadir un capítulo de metodología para clarificar de qué manera también se ha llevado a cabo el trabajo de investigación.

4. Metodología

Este TFM “híbrido” se basa en una metodología de investigación con abordaje mixto; es decir, se recurre tanto a la metodología cualitativa como a la metodología cuantitativa para la recolección de datos y su análisis posterior. El abordaje mixto de esta investigación ha sido necesario para recopilar evidencias y lograr captar algún posible impacto que podría tener el uso de un método u otro en los siguientes tres aspectos: los contenidos aprendidos por los alumnos, la actitud y la motivación por las matemáticas del alumnado y la transferencia de las matemáticas a ámbitos diferentes.

Esta parte de investigación del TFM tiene un diseño cuasiexperimental en el que se cuenta con dos grupos: a) el grupo experimental, que recibirá las sesiones de matemáticas diseñadas con el método Singapur; y, b) el grupo control, que recibirá las sesiones de matemáticas con el método tradicional.
A continuación, se detalla el problema de investigación, los objetivos de esta y, finalmente, se explica la población y la muestra.

4.1 Problema de investigación.

Uno de los cambios principales que podemos observar en el nuevo currículo es que se orienta al alumnado hacia un tipo de aprendizaje más profundo, significativo y funcional, en el que aquello que se aprende puede llegar a utilizarse en contextos diferentes, perdura a lo largo del tiempo, y permite resolver diferentes situaciones o problemas de la vida real. Actualmente, la mayoría de los colegios de secundaria están en una etapa de transición entre el currículo antiguo y el nuevo. Concretamente, de acuerdo con el *Departament d’Educació de la Generalitat de Catalunya* (XTEC), utilizar el nuevo currículo durante el curso 2022-2023 tan solo es obligatorio para los cursos de 1º y 3º de la ESO.

El Instituto en el que se desarrollará este trabajo de innovación-investigación es el centro Oms i de Prat en Manresa (Barcelona), pues la autora de este TFM ha tenido la oportunidad de realizar sus prácticas allí y es ella quien ha sido la que ha puesto en práctica en este instituto su proyecto de investigación-innovación. En este centro, durante este curso 2022-2023 aún se trabajan las matemáticas siguiendo las directrices del antiguo currículo basado en el método tradicional en la enseñanza de las matemáticas. Las sesiones y los contenidos desarrollados por los docentes se centran en los cálculos, en la manipulación de conceptos y operaciones y se intuye que puede que esto haga que los alumnos tengan serias dificultades a la hora de construir su aprendizaje. A su vez, tras una conversación inicial llevada a cabo con los alumnos, en gran medida no pocos estudiantes demostraron ideas y emociones negativas hacia dicha asignatura.

Esto hace patente la necesidad de redirigir la metodología de la enseñanza de las matemáticas hacia una metodología en la que el alumnado deje de lado los procesos automáticos y construya sus conocimientos en base a la comprensión, al razonamiento lógico y a un aprendizaje significativo conectado con su día a día. Aunque todos estos matices ya están incluidos en el nuevo currículo de secundaria, hasta ahora no ha sido posible encontrar algún trabajo de innovación que sirva de guía para que los docentes puedan implementar metodologías no tradicionales y afines al nuevo currículo en sus clases de matemáticas.

Desde esta perspectiva, este TFM —que tiene las vertientes de investigación e innovación— adquiere importancia a la hora de redirigir a este instituto y, ¿por qué no?, a muchos otros institutos de secundaria, hacia nuevas metodologías de enseñanza de las matemáticas y, de este modo, facilitarles la implementación del nuevo currículo que regirá oficialmente a partir del curso 2023-2024.

4.2 Objetivos generales

El objetivo principal de la parte de investigación de este TFM es descubrir, a través de la recolección de evidencias empíricas, si utilizar el Método Singapur o el método tradicional tiene un impacto en la actitud y la motivación por las matemáticas del alumnado, los contenidos aprendidos por los alumnos, y la transferencia de las matemáticas a ámbitos diferentes. Para ello se han establecido los siguientes objetivos más específicos:

- Identificar la actitud y motivación de los estudiantes hacia las matemáticas en las sesiones de algebra
- Obtener datos que evidencien los conocimientos adquiridos por los estudiantes.

- Observar la capacidad de transferir los conocimientos trabajados a situaciones propias de la vida real.

4.3 Muestra y técnica de muestreo

La muestra de este TFM está conformada por los alumnos de segundo de la ESO del centro Oms i de Prat en Manresa (Barcelona), con edades entre 13 y 14 años. En el estudio se tienen en cuenta los grupos-clase ya creados, siendo la cantidad de alumnos 30 alumnos para el grupo A y 31 alumnos para el grupo B. El grupo A fue el grupo experimental en el que se aplicó el Método Singapur; y el grupo B fue el grupo control en el que se siguió la metodología tradicional establecida en el centro.
Con relación a la técnica de muestreo, esta ha sido no probabilística y por conveniencia, puesto que la autora de este TFM, al encontrarse realizando sus prácticas en el centro Oms i de Prat en Manresa (Barcelona), tuvo fácil acceso y pudo contar con esta muestra para su investigación-innovación.

4.4 Instrumentos y criterios de obtención de datos

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron los siguientes: cuestionario, creado y validado por Muñóz y Mato (2008) para medir las actitudes de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria ante las matemáticas, ficha de observación y finalmente una prueba final del contenido trabajado. Mediante dichos instrumentos se buscó recopilar datos de los tres aspectos relacionados directamente con los objetivos específicos establecidos: la actitud y la motivación por las matemáticas del alumnado, los contenidos aprendidos por los alumnos, y la transferencia de las matemáticas a ámbitos diferentes.

4.4.1 Cuestionario para medir las actitudes de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria antes las matemáticas

Para medir las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas se buscaron cuestionarios y, por la extensión y practicidad —además de contener matices afines a lo que se buscaba en este TFM— finalmente se utilizó el cuestionario validado de Muñóz y Mato (2008), que está compuesto por 19 ítems divididos en dos factores: a) actitud del profesor percibida por el alumno; y b) agrado y utilidad las matemáticas en el futuro. Para su valoración se utiliza una escala Likert de 1 a 5, en donde 1 significa muy en desacuerdo y 5 muy de acuerdo. Dicho cuestionario fue realizado por los alumnos de los dos grupos después de recibir el total de las sesiones programadas. El cuestionario y los ítems evaluativos por cada factor se muestran en el Anexo 4.

Además de los ítems del cuestionario, se consideró oportuno añadir preguntas abiertas para complementar con información cualitativa lo obtenido en el cuestionario. Las preguntas que se añadieron para los dos grupos fueron las siguientes: ¿qué crees que podría ayudarte a estar más atento o motivado en clases de matemáticas? y, por otro lado, ¿qué es lo que más te ha gustado de las sesiones del algebra? Además, para el Grupo A, se añadió una más: ¿te gustaría seguir trabajando con el nuevo método?

4.4.2 Fichas de Observación

El segundo instrumento es una ficha de observación (ver Anexo 5) elaborada por la autora de este TFM y tiene como propósito recoger las observaciones de la autora de este TFM, quien fue la instructora, acerca de lo que ella percibía sobre los aspectos socioemocionales —más relacionados con la motivación— que se involucran en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se realizó un registro en la mayoría de las sesiones, donde se procuró reflejar los hechos más significativos que ocurrieron a nivel grupal e individual. Entre los ítems que guiaron la observación se encuentran los siguientes aspectos:

- Ambiente en la clase
- Atención y participación de los alumnos
- Interés y motivación mostrado

- Interacción y trabajo cooperativo
- Reacción de los alumnos ante las actividades realizadas

4.4.3 Prueba final

Mediante la prueba final se evaluaron los conocimientos adquiridos por los alumnos. La prueba se dividió en dos bloques: el bloque [I], compuesto de ejercicios procedimentales y de teoría, con los cuales se evaluó la comprensión instrumental adquirida; y el segundo bloque, compuesto de problemas algebraicos cotidianos donde se evaluó la compresión relacional y la transferencia de los conceptos matemáticos a contextos del día a día.

Los alumnos obtuvieron notas numéricas en una escala de 10, las cuales se sustituyeron por resultados cualitativos que se expresaron de la siguiente manera: Insuficiente para las calificaciones numéricas 1, 2, 3 y 4, suficiente para el 5, bien para el 6, notable para un 7 y un 8 y sobresaliente para las notas 9 y 10. La prueba evaluativa se encuentra en el Anexo 6.

4.5 Análisis de la información

Se realizó una triangulación de datos tomando en cuenta las evidencias de cada instrumento de medición. En el caso del cuestionario, validado por Muñóz y Mato (2008), se describen las puntuaciones tanto del grupo A (método tradicional) como B (método Singapur) y se realiza una comparación gráfica de ambas. De igual modo, se extrae un resumen de las observaciones más relevantes para contrastar lo observado en ambos grupos e incluir citas de los propios alumnos obtenidas durante la observación. Finalmente, en el caso de la prueba final, se realiza una comparación gráfica de ambos grupos en tres formatos: calificaciones generales, calificaciones obtenidas en el bloque I y calificaciones obtenidas en el bloque II.

Tras esta breve explicación sobre la metodología de investigación, a continuación, se presenta lo trabajado en la vertiente de innovación de este TFM.

III. Contexto de la Propuesta de Intervención

5. Análisis del contexto

5.1 Contextualización del centro

Esta propuesta de intervención se realiza en el 2º curso de educación secundaria en el centro Oms i de Prat. El centro Oms i de Prat está situado en la ciudad de Manresa, provincia de Barcelona, ubicada en un barrio de nivel económico medio, en el centro de la ciudad. Actualmente, es una escuela concertada unida a la acción educativa transformadora de la Fundación Cataluña de La Pedrera desde el año 1968. La oferta educativa del centro abarca la educación infantil, la educación primaria y la educación secundaria obligatoria, además de actividades extraescolares. Todos los niveles educativos tienen dos líneas, y con toda esta oferta tienen un total de aproximadamente 700 alumnos. El proyecto educativo del centro se caracteriza por tres ejes (Vila, 2017):

- Educación emocional: Aprender estrategias, herramientas y procesos para mejorar la capacidad cognitiva, emocional de toda la comunidad educativa. Este eje contempla tres ámbitos de actuación: el ámbito estructural, el ámbito funcional y el ámbito de las capacidades.

- Lenguas extranjeras: Los aspectos que se llevan a cabo son tener profesores nativos cualificados en el equipo docente, la realización de algunas actividades de las áreas de ciencias, matemáticas y tecnología en inglés, así como introducir unas horas para practicar el habla con grupos reducidos de alumnos. Además del inglés, los estudiantes tienen la opción de escoger asignaturas optativas en francés y en alemán. A su vez, el alumnado de la ESO también tiene la posibilidad de cursar todo un trimestre en el extranjero.

- Asesoramiento en el espacio del comedor y catering. En dicho eje se realizan varias propuestas que ayudan asesorar a los alumnos a la hora de desarrollar hábitos saludables alimenticios. Por un lado, se realiza una propuesta de productos de proximidad para dar a conocer los productos de la zona. La segunda se realizan diversos grupos de trabajo con los alumnos que se quedan a comer en el centro, para conocer la percepción y valoración que tienen los alumnos a cerca del funcionamiento del comedor y de la comida que se les sirve. Por último, se toman acciones para el reciclaje, de manera que el alumnado sea consciente de la importancia del cuidado del medio ambiente y que esta práctica pueda trasladarse a su entorno personal.

Para llevar a cabo dicho proyecto educativo, la esencia del motor son todos los integrantes del centro educativo, que trabajan conscientes de la dependencia mutua, del trabajo unido y la ilusión de compartir un mismo objetivo para obtener resultados en equipo. Concretamente, el centro parte de un equipo humano de 50 docentes, 20 de los cuales son docentes de educación secundaria, además del personal de administración, de comedor, de la biblioteca, los técnicos deportivos de las extraescolares, y de la limpieza. En su organización se ha creado una perspectiva más distributiva y participativa que pretende llegar a un entorno de aprendizaje colaborativo.

5.2 Contextualización de los grupo-clase

La propuesta se aplica en la asignatura de matemáticas de 2º ESO, concretamente en los dos grupos que conforman las 2 líneas principales de la oferta educativa. Los dos grupos cuentan con 30 alumnos para el grupo A y 31 alumnos para el grupo B y la edad de los estudiantes oscila entre los 13 y 14 años.

Se trata de grupos heterogéneos debido a la procedencia de los alumnos: Marruecos, Ecuador, Pakistán, Colombia, Rumania y China. En lo relativo al nivel educativo, en la mayoría de los casos, no hay grandes diferencias entre los alumnos de nacionalidades extranjeras y españolas, debido a que ya están integrados en el centro desde la educación infantil. Sin embargo, en uno de los grupos dos alumnos necesitan un plan individualizado por desconocimiento de la lengua catalana y castellano y, además, por no haber cursado la educación secundaria en sus países natales. Estos dos niños estuvieron fuera del aula durante la aplicación de la propuesta de intervención, por lo que no fueron considerados dentro de los participantes.

Por otro lado, también encontramos a un alumno con un trastorno del espectro autista y tres alumnos con trastorno por déficit de atención qué estaban totalmente integrados, siguiendo el currículo establecido sin dificultades notorias.

IV. Propuesta de intervención

Con esta propuesta de intervención, se pretende trabajar paralelamente el tema del álgebra y los conceptos relacionados con sus operaciones. La propuesta de innovación se ha realizado en base a lo obtenido en el Marco Teórico y en base al marco curricular establecido en el Decreto 187/2015, de 25 de agosto, el cual se está llevando a cabo actualmente en el centro y donde se han concretado las competencias básicas y los contenidos. Concretamente, como se ha indicado en el punto 3.2.2 del Marco Teórico de este TFM, el contenido curricular de 2º de la ESO tiene como contenido clave el lenguaje y el cálculo algebraico; el cual se considera como uno de los pilares básicos de la enseñanza de las matemáticas, aunque generalmente su aprendizaje no suele ser fácil para la mayoría de los alumnos, dada su naturaleza abstracta. Por medio del método tradicional, los alumnos se centran en operar y simplificar expresiones algebraicas basando su aprendizaje solo en el cálculo. En consecuencia, los alumnos no desarrollan el pensamiento lógico-abstracto y no ven el álgebra como un lenguaje preciso que describe la realidad o como un posible instrumento de razonamiento o pronóstico.

Por consiguiente, el Método Singapur será, en nuestro caso, la metodología que se aplicará para abordar la necesidad de ayudar a que el alumnado consiga desarrollar las competencias antes mencionadas. A través de la intervención con el Método Singapur se pretende que el alumnado deje de lado los procesos automáticos y construya sus conocimientos en base a la comprensión, al razonamiento lógico y en base a un aprendizaje significativo, todo ello fomentando las actitudes positivas hacia las matemáticas.

6. Organización de la intervención

6.1 Metodología de la intervención

Como se ha indicado antes, en la intervención se tiene un grupo experimental (Grupo A que recibe las sesiones con el Método Singapur) y un grupo control (Grupo B que recibe las sesiones con el Método tradicional). Cada grupo recibe 4 sesiones de clase que se resumen en la Tabla 4. Para diferenciar las sesiones de cada grupo se utilizan diferentes nomenclaturas: para el Grupo A las sesiones se identifican con números (1, 2, 3 y 4); mientras que, para el Grupo B, se utilizan letras (A, B, C y D).

En el Grupo A, al inicio de cada clase, se realizará una pequeña explicación magistral introduciendo los conceptos algebraicos nuevos con los que a posteriori trabajan los estudiantes. Seguidamente, se utilizarán diversos materiales manipulativos o actividades interactivas en donde los alumnos tienen que resolver las situaciones planteadas a través de la exploración y la manipulación. De esta manera, se pretende que los alumnos se abstraigan y desarrollen la comprensión relacional de las operaciones; es decir, que comprendan mejor el porqué de sus acciones en el cálculo. Por otro lado, con el objetivo de que desarrollen la comprensión total y se evite la memorización o la utilización de procesos automáticos, se trabajan diferentes procedimientos o estrategias para resolver los ejercicios.

En sesiones posteriores, se ejercita la consolidación de los conceptos mediante la realización de diferentes juegos. En estos juegos los estudiantes pueden aplicar lo aprendido, fomentando la interacción social y el trabajo cooperativo. Para finalizar, en la última sesión se propondrán diversas actividades para que los alumnos puedan transferir lo aprendido a situaciones de la vida cotidiana y puedan relacionarlos con contenidos matemáticos futuros. En resumen, y siguiendo las pautas del método Singapur, las 4 sesiones de intervención con Grupo A están divididas de la siguiente manera: las dos primeras sesiones serán para la “comprensión”, la sesión siguiente para la “consolidación” y, por último, la cuarta sesión, para la “transferencia”.

En cuanto al desarrollo de la propuesta de intervención para el Grupo B, se desarrollará en base a las prácticas docentes que se realizan en el propio centro, caracterizadas por tener un enfoque más tradicional, en el que no se utilizan materiales manipulativos o actividades interactivas. En la primera parte de la clase, se introducen los contenidos teóricos clave de una manera magistral y explicativa, y también se realizarán diversos ejercicios en los que se aplican dichos contenidos. En este método el alumnado tiene un papel fundamentalmente pasivo, y construye sus conocimientos gracias a la instrucción del profesor. A posteriori, los alumnos realizan diversos ejercicios para aplicar los contenidos teóricos explicados y utilizan lápiz o bolígrafo para resolver las fichas de ejercicios impresas que reciben.

Tabla 4

Resumen de las 8 sesiones

Método Singapur			Método Tradicional	
Sesión 1	**Comprensión**	Introducción de conceptos: - Explicación - Realización de ejemplos - Actividades guiadas	**Sesión A**	Teoría: - Explicación teórica - Realización de ejemplos
		Actividades grupales, actividades individuales, debates		Práctica: - Realización de ejercicios
Sesión 2	**Comprensión**	Introducción de conceptos: - Explicaciones - Realización de ejemplos - Actividades grupales	**Sesión B**	Teoría: - Explicación teórica - Realización de ejemplos
		Etapa Concreta: - Manipulación de objetos		Práctica:

		Etapa abstracta: - Ejercicios		- Realización de ejercicios
Sesión 3	**Consolidación**	Juegos Actividades lúdicas Competiciones	**Sesión C**	Teoría: - Explicación teórica - Realización de ejemplos
				Práctica: - Realización de ejercicios
Sesión 4	**Transferencia**	Actividades que relacionen los contenidos con situaciones reales	**Sesión D**	Repaso del contenido
		Ejercicios evaluativos		Ejercicios evaluativos

6.2 Objetivos de la unidad didáctica de la intervención

A lo que a la unidad didáctica del álgebra respecta, los objetivos específicos establecidos son los siguientes:

- Construir expresiones algebraicas que incluyen cocientes u operadores en lo que intervienen variables.
- Simplificar y resolver ecuaciones algebraicas.

- Emplear lenguaje algebraico para explicar, explorar y resolver problemas o situaciones variadas.
- Modelizar situaciones cotidianas planteando ecuaciones que relacionan dos cantidades desconocidas, y desarrollar estrategias para encontrar la resolución del problema.
- Desarrollo del autoconocimiento, ser conscientes de su propio aprendizaje.
- Compartir ideas, razonamientos y conocimientos con los compañeros.

6.3 Componentes curriculares de la intervención

Los componentes curriculares que se trabajan con ambos grupos en esta propuesta de innovación son los contenidos correspondientes al bloque "Cambios y Relaciones" que contiene los siguientes temas:

- Reglas del álgebra
- Calculo algebraico
- Resolución de problemas con ecuaciones

Dichos contenidos se asocian a los siguientes contenidos clave:

CC4. Lenguaje y calculo algebraico

CC5. Patrones, relaciones y funciones

Y contribuyen en mayor medida a la obtención de las siguientes competencias específicas asociadas a tres dimensiones diferentes:

Resolución de problemas

- Competencia 1: Traducir un problema a lenguaje matemático o a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados
- Competencia 2: Emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolver problemas

Razonamiento y prueba

- Competencia 6: Emplear el razonamiento matemático en entornos no matemáticos

Comunicación y representación

- Competencia 10: Expresas ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los demás
- Competencia 11: Emplear la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas

7. Descripción de las sesiones

7.1 Sesiones con el Método Singapur

7.1.1 Sesión 1

En esta primera sesión primeramente se realizó una actividad mediante el cual se introdujo al alumnado el lenguaje algebraico, trabajando aspectos teóricos clave que les fueron posteriormente de ayuda a la hora de trabajar con expresiones algebraicas y a la hora de resolverlas. A posteriori, se trabajó la interpretación de las expresiones algebraicas con el objetivo de fortalecer sus destrezas lógicas e iniciarles en el pensamiento abstracto. Para ello se realizaron 2 actividades que permitieron al alumnado reflejar mediante letras y números distintas situaciones; y transformar enunciados en expresiones algebraicas. La última actividad de la sesión se utilizó para contextualizar el algebra a través de ámbitos cotidianos y otras áreas de las matemáticas como es la geometría. A continuación, a modo de ejemplo se muestran la ficha correspondiente a la sesión en la Tabla 5:

Tabla 5

Ficha Sesión Nº1

<table>
<tr><th colspan="3">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión : 1</td><td>Introducción a él álgebra</td><td>Método Singapur</td></tr>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Aspectos teóricos del lenguaje algebraico:
Letras y números
Coeficiente y parte literal
Expresiones algebraicas
Monomios y polinomios
2. Relación de expresiones habituales con el lenguaje algebraico
3. Resolución de problemas</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Introducir aspectos clave del lenguaje algebraico y relacionar las expresiones algebraicas con expresiones o situaciones cotidianas.</td></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES</th><th>Descripción</th><th>Recursos</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Conceptos teóricos del álgebra</td><td rowspan="6">En esta primera actividad de la sesión, se introducen en el aula los conceptos clave del lenguaje algebraico. Todo esto será expuesto y explicado por el docente, mediante la utilización de la pizarra y utilizando como guía la explicación del Anexo 7. Para la introducción de dichos conocimientos se utilizarán conocimientos que se han trabajado anteriormente y se han planificado preguntas clave que fomenten la reflexión y la participación. También se guiará el aprendizaje</td><td>Pizarra

Anexo 7</td></tr>
<tr><th>Organización</th></tr>
<tr><td>Clase Magistral</td></tr>
<tr><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>30 minutos</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

	mediante una actividad que será resuelta grupalmente, y que también se encuentra en el Anexo 7 como “Actividad guiada”.	
Traducción del lenguaje algebraico	En esta segunda actividad el objetivo es relacionar el lenguaje habitual con el lenguaje algebraico. Para ello se repartirán tarjetas de color amarillo con enunciados escritos y tarjetas color rosa con expresiones algebraicas (Anexo 8). El objetivo es que los alumnos relacionen cada enunciado con la expresión algebraica que le corresponde, consiguiendo así relacionar conceptos abstractos con conceptos cotidianos. Esto les ayudará a percibir el álgebra como una herramienta útil para percibir y expresar acciones de la vida cotidiana.	**Recursos** Anexo 8 **Organización** Grupos de 5-6 **Tiempo** 30 minutos
Desarrollando la creatividad	En esta actividad 3, se les proporcionara a los alumnos tarjetas con expresiones algebraicas escritas (Anexo 9), y ellos deberán de crear un enunciado que le corresponda. La idea es que los alumnos, mediante experiencias propias, construyan por ellos mismos situaciones de la vida cotidiana que puedan ser descritas a través de números, variables y operaciones que aparecen en las tarjetas. De esta manera, se trabajará el pensamiento	**Recursos** Tarjetas Anexo 9 **Organización** Grupos de 2-3 **Tiempo** 30 minutos

	lógico-abstracto de los alumnos. Las respuestas serán comentadas en voz alta con la idea de debatir si son correctas o no, fomentando la participación y la reflexión del alumno. Se tendrá en cuenta que una misma expresión puede representar diferentes situaciones.	
Problemas algebraicos	En esta actividad, los alumnos deberán de utilizar el lenguaje algebraico para resolver 2 problemas matemáticos. Concretamente uno de ellos, fomenta la conexión entre diferentes contenidos del currículo como lo son el álgebra y la geometría. Se utilizará la plataforma *Sciencie Bits*. Los problemas combinan respuestas abiertas y respuestas cerradas, donde el alumnado debe razonar y justificar sus respuestas. Los problemas se encuentran en el Anexo 10.	**Recursos** Ordenador Science Bits Anexo 10 **Organización** Individual **Tiempo** 30 minutos

7.1.2 Sesión 2

En esta segunda sesión se trabajó la resolución de ecuaciones lineales mediante el enfoque C-P-A. Primeramente, se realizó una pequeña clase magistral donde se introdujeron los conceptos teóricos. Posteriormente, y ya siguiendo las directrices del enfoque, se trabajó la resolución de ecuaciones mediante el modelo de la balanza, el cual ayudó a los alumnos a visualizar el proceso de resolver una ecuación. Este modelo crea un símil entre una balanza en equilibrio y una ecuación; puesto que en la balanza se observan objetos del mismo peso en ambos lados y en las ecuaciones se exhiben números o variables del mismo valor en ambos lados. Mediante el simulado Phet los alumnos tuvieron que explorar y manipular los objetos de la balanza, jugando con las variables y las igualdades.

De manera secuencial, se trabajaron dos estrategias de resolución de ecuaciones; por un lado, la balanza dinámica basada en el principio del equilibrio, y por otro lado la balanza fija basada en las operaciones inversas de los términos de la ecuación.

Para terminar, en la etapa abstracta, se trabajaron la resolución de las ecuaciones de una manera más simbólica, con el objeto de que los alumnos pudieran conectar los conocimientos adquiridos mediante la manipulación y la acción con los símbolos y las operaciones propias de las matemáticas. La ficha de la sesión se muestra en el Anexo 11.

7.1.3 Sesión 3

En esta tercera sesión se realizaron dos juegos interactivos donde los alumnos pudieron consolidar lo aprendido en las dos sesiones anteriores. Por un lado, se trabajó la resolución de ecuaciones lineales mediante un juego de cartas. Para ello, tuvieron que utilizar una de las estrategias trabajadas en la anterior sesión, como son las operaciones inversas. Por otro lado, se trabajó la evaluación de expresiones algebraicas a través de un parchís.

Los juegos se llevaron a cabo de manera grupal, fomentando el aprendizaje colaborativo y el trabajo grupal. La ficha de la sesión y la descripción de los que se encuentran en el Anexo 12.

7.1.4 Sesión 4

Con el objetivo de que el aprendizaje fuese lo más significativo posible y transferir los conocimientos adquiridos a otros ámbitos y contextos, se trabajaron dos problemas matemáticos relacionados directamente con la vida cotidiana.

Por un lado, el primer problema planteaba una situación cotidiana en un mercado donde los alumnos ante un error y simulando que eran compradores debían de encontrar los precios y la cantidad de kilos de los productos que habían supuestamente comprado. Por otro lado, el segundo problema, puso a los alumnos enfrente de una situación laboral. El problema presentaba un contrato laboral donde aparecían diversas variables relacionadas con el sueldo que iban a percibir y los alumnos mediante el algebra tuvieron que calcular el valor de esas variables. La descripción de la sesión se muestra en el Anexo 13.

7.2 Sesiones con el Método tradicional

7.2.1 Sesión A

En esta primera sesión se trabajó con los alumnos los aspectos clave del lenguaje algebraico. En la primera parte de la sesión, se realizó una clase magistral donde se enseñaron las nociones básicas para la construcción de expresiones algebraicas y se realizaron diversas actividades de ejemplificación. En el segundo periodo de la clase, se propusieron diversas actividades relacionadas con los contenidos explicados que debieron de resolver los alumnos individualmente. La ficha de la sesión se muestra en la Anexo 14.

7.2.2 Sesión B

Como en la anterior sesión y siguiendo la metodología tradicional, en esta sesión se trabajó con los alumnos las ecuaciones lineales de una manera teórica y posteriormente de una manera práctica. En la primera parte de la sesión, se realizó una clase magistral donde se explicó el procedimiento a seguir para resolver las ecuaciones. Mediante diversas pautas marcadas, se realizaron ejercicios de ejemplificación. En el segundo periodo de la clase, se propusieron diversas actividades para trabajar los conceptos explicados y para finalizar la clase se corrigieron dichas actividades de una manera grupal y fomentado la participación de los alumnos. La ficha de la sesión se muestra en la Anexo 15.

7.2.3 Sesión C

Esta sesión tuvo como objetivo trabajar la resolución de problemas algebraicos. Para ello, en la primera parte, se les expuso a los alumnos la manera general de abordar un problema y también se les explico los pasos que debían de seguir para llegar a la solución. Como demostración, se realizaron dos problemas de ejemplificación.

Además, como en las anteriores sesiones, también se les dio la mitad del tiempo de la sesión para que ellos mismos resolviesen diversos problemas de manera autónoma. La descripción de la sesión se puede ver en la Anexo 16.

7.2.4 Sesión D

La última sesión se enfocó en resolver las dudas de los alumnos y en evaluar el grado de conocimientos adquiridos, en relación con la comprensión instrumental y relacional. Como se ha mencionado anteriormente, dicha evaluación se realizó mediante la prueba final del y la ficha de la sesión completa se muestra en la Anexo 17.

V. Resultados

8. Resultados y discusión

En este capítulo, se exponen las evidencias recogidas en los diferentes grupos con el fin de realizar un análisis comparativo que muestre el impacto de utilizar un método u otro respecto a los ítems que previamente se han establecido: actitud y motivación, comprensión instrumental y transferencia.

8.1 Cuestionario de actitud

El cuestionario de actitud completado por los alumnos evidencia las percepciones de los alumnos acerca de la utilidad de las matemáticas en el futuro, además de mostrar lo que ellos opinan sobre las sesiones desarrolladas y la actitud del profesor que han percibido. Para su realización, se dejó claro a los alumnos que debían responder en base a lo trabajado solo en las sesiones que recibieron de algebra, sin tener en cuenta unidades pasadas.

En este TFM se ha tenido mayor interés en hacer una triangulación cualitativa y por ello se han escogido los ítems del cuestionario que desde la percepción de la autora permiten alcanzar mejor los objetivos del trabajo: identificar la actitud y motivación de los estudiantes hacia las matemáticas en las sesiones de algebra. Entre los 19 ítems establecidos en el cuestionario validado, se han escogido los siguientes 7 ítems: 5,9,10,12,17,18 y 19; quienes tienen una tendencia similar entre ellos. Los resultados obtenidos de los ítems 5, 10, 11 y 19 se reflejan en las siguientes Figuras 7, 8,9 y 10:

Figura 7

Respuestas al ítem 5: Me siento motivado en clase de matemáticas.

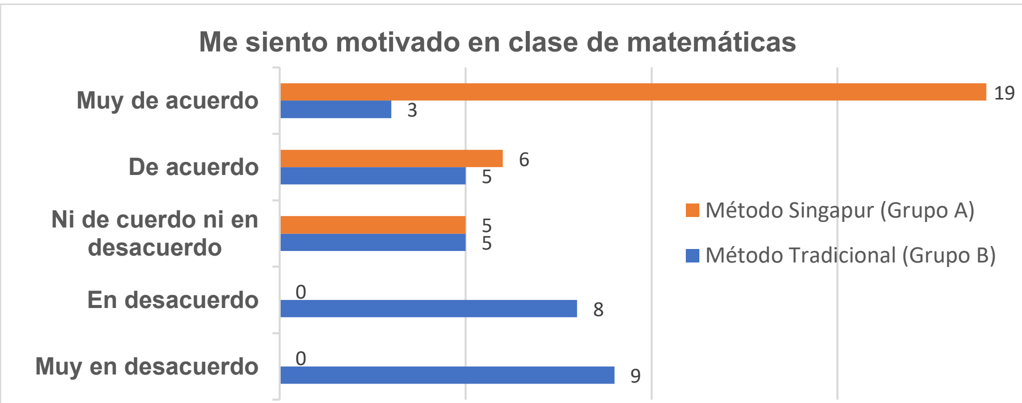


Figura 8

Respuestas al ítem 10: El profesor tiene en cuenta los intereses de los alumnos

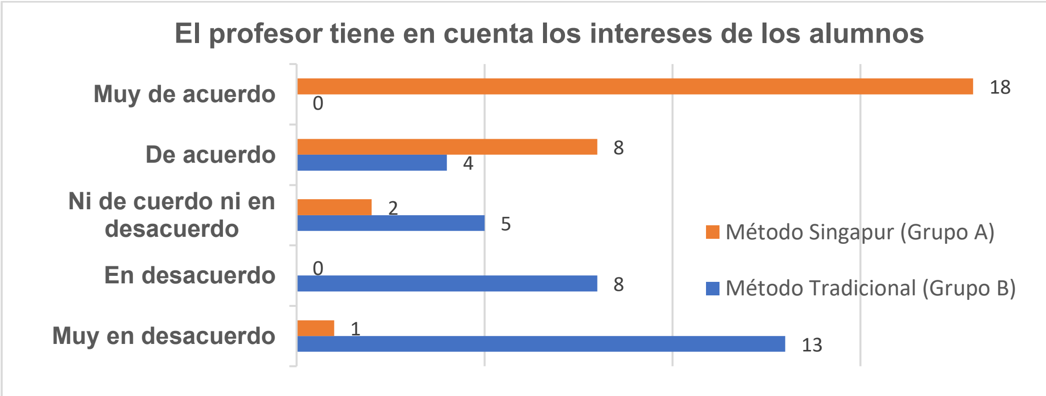


Figura 9

Respuestas al ítem 11: Me gusta como enseña mi profesor de matemáticas

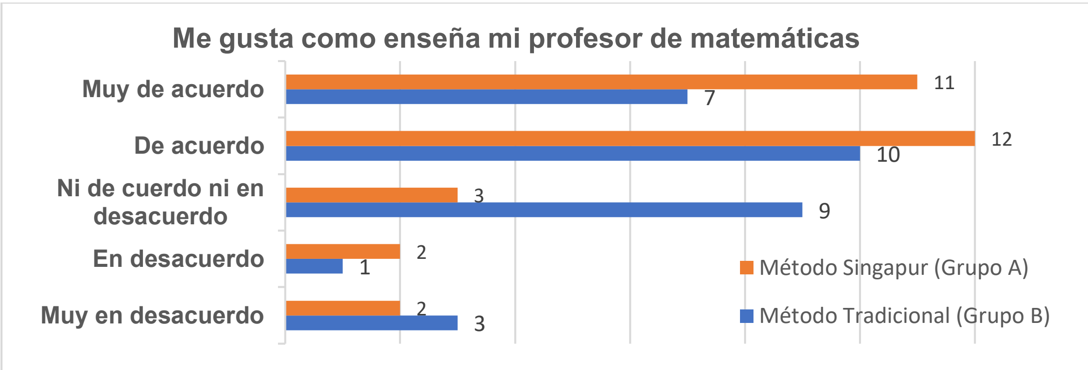
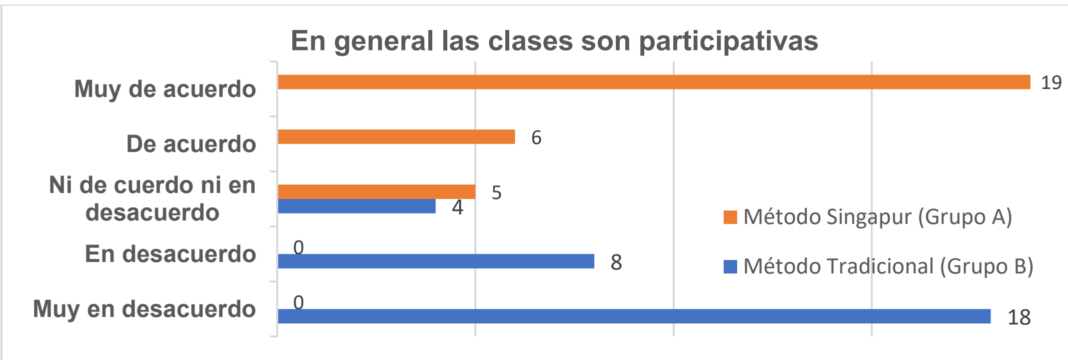


Figura 10

Respuestas al ítem 19: En general, las clases son participativas



Como se puede observar, se destacan diferencias llamativas en los siguientes ítems: “Me siento motivado en clase de matemáticas”, “El profesor tiene en cuenta los intereses de los alumnos” y “En general las clases son participativas”. Claramente, los alumnos que han aprendido en base al Método Singapur se sienten mucho más motivados. A su vez, perciben las clases mucho más participativas y cercanas a sus intereses, por lo que se podría considerar, que los resultados obtenidos en estos dos últimos aspectos también están relacionados con la motivación y la actitud. En cambio, para el ítem “Me gusta como enseña mi profesor de matemáticas” se han obtenido resultados semejantes.

En cuanto a las creencias de los propios alumnos, relacionadas con la percepción de sus conocimientos y sus habilidades matemáticas, así como a sus emociones acerca de ellas, se han obtenido los siguientes resultados.

Figura 11

Respuestas al ítem 17: Soy bueno en matemáticas

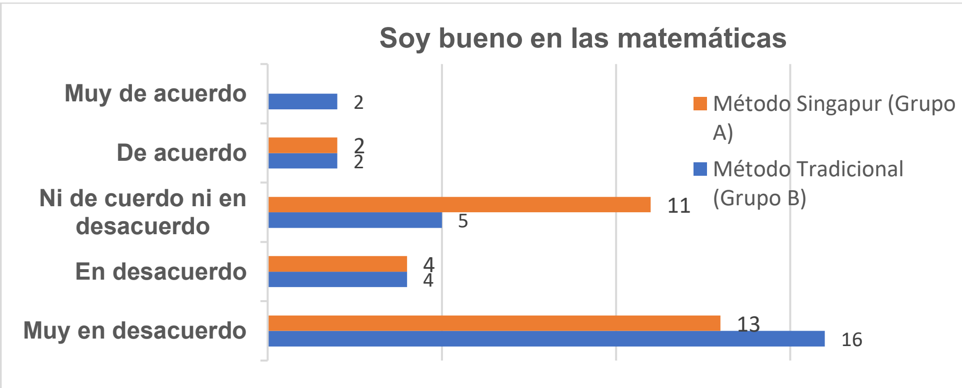
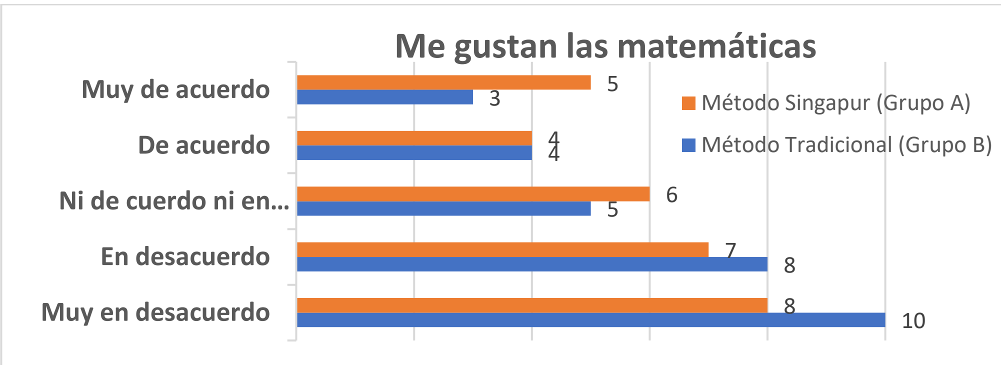


Figura 12

Respuestas al ítem 18: Me gustan las matemáticas



A más de la mitad de la clase de los dos grupos les sigue sin gustar las matemáticas y tampoco sienten que sean habilidosos. Esto nos permite intuir que puede que, a diferencia de lo esperado —ver resultados más positivos en el grupo que recibió las sesiones con el Método Singapur—, hacer uso de un método u otro no conlleva una diferencia significativa. Aunque esto podría no reflejar el impacto real que podría tener Método Singapur por las escasas sesiones realizadas en esta propuesta de innovación.

No obstante, lo obtenido en las respuestas de los estudiantes a las preguntas abiertas desvelan unos matices importantes a destacar. Ante la pregunta de "¿Qué cosas crees que podrían ayudarte a estar más atento o motivado en clase de matemáticas?", por unanimidad los alumnos del Grupo B respondieron lo siguiente: "menos teoría, más juegos y más ejercicios de competición entre grupos". Las respuestas del Grupo A también siguieron el mismo hilo.

En cuanto a la pregunta de "¿Qué es lo que más te ha gustado de las sesiones?", el Grupo A en general destacó los juegos, específicamente el parchís algebraico, y los materiales manipulativos. Del Grupo B, algunas de las respuestas recogidas fueron: "me ha gustado el algebra, es divertida", "aprender a resolver ecuaciones".
Para finalizar, como respuesta a ¿te gustaría seguir trabajando con el nuevo método?, más del 95% de los alumnos del Grupo A respondieron" Sí".

8.2 Observación

En relación con las observaciones recogidas en las fichas acerca de la motivación y la actitud mostrada por los alumnos durante las sesiones se pueden destacar los siguientes aspectos.
En el Grupo A, la utilización de material manipulativo y juegos algebraicos despertó el interés del alumnado creando un ambiente mucho más distendido en el aula. Los estudiantes se mostraron mucho más participativos, atentos y motivados. A su vez, mostraron una conducta más exploratoria, indagando y profundizando mucho más en comparación con los alumnos del Grupo B, quienes se limitaron a seguir las directrices marcadas. Se destacan alguna de las frases dichas por los alumnos del Grupo A: "¡Ojalá todas las clases de matemáticas fuesen así!" y "¡las matemáticas son mucho más divertidas con juegos que haciendo ejercicios!".

Cabe destacar que, al comienzo de la unidad los alumnos del Grupo B mostraron serias dificultades a la hora de trabajar con conceptos algebraicos no tangibles o visibles -las incógnitas-. Mostraron su frustración con frases como estas: “Esto no me va a servir de nada en mi vida, no se para que lo tengo que estudiar” y “¿por qué se mezclan los números con las letras? …no tiene sentido”. Sin embargo, en el Grupo A, se observó una actitud distinta al realizar las primeras actividades “Traducción del lenguaje algebraico” y “Desarrollando la creatividad”, las cuales resultaron exitosas. Los alumnos se mostraron activos e implicados en el desarrollo de su propio pensamiento abstracto y dichas actividades fueron de vital importancia a la hora de introducir sin dificultad algunos conceptos algebraicos más abstractos en sesiones posteriores.

Aún con todo lo positivo que se observó en el Grupo A en el que se aplicó el Método Singapur, es importante destacar un “hándicap” recogido en la segunda sesión con este grupo. En esa segunda sesión, al comienzo de la clase se trabajó la resolución de ecuaciones mediante materiales manipulativos y mediante diferentes estrategias. Tras ello, se planteó a los alumnos la actividad “Resolución de ecuaciones: Método analítico” con el cual se presentaron diversos ejercicios en los que los alumnos debían de resolver ecuaciones esta vez de una manera más analítica y mediante las operaciones propias de la matemática y sin objetos manipulativos. Esto evidenció, un claro inconveniente a la hora utilizar el Método Singapur. Y es que, a la hora de resolver los ejercicios sin recursos manipulativos, los alumnos del Grupo A se mostraron mucho más torpes y lentos. La mayoría de ellos no fueron capaces de comenzar los ejercicios sin un claro procedimiento a seguir y esto les hizo mostrarse inseguros y perdidos. De lo contrario, los alumnos del Grupo acostumbrados al método tradicional y a seguir reglas y pasos establecidos, resolvieron los ejercicios sin ninguna dificultad notoria. Sin embargo, en una corrección de los resultados realizada en una de las sesiones, ningún alumno del Grupo B fue capaz de argumentar o explicar qué es lo que había hecho o el por qué había seguido dichos pasos. La mayoría de los alumnos expresaban lo siguiente: “He hecho lo que has explicado tú en la pizarra”.

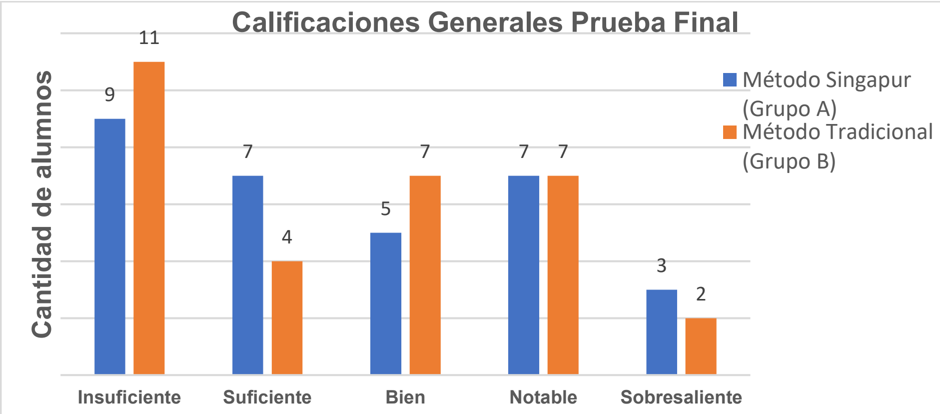
8.3 Prueba final

Como se ha mencionado en el capítulo 4, la prueba final consta de dos bloques claramente diferenciados. Por un lado, en el bloque I se desarrollan ejercicios propios de la matemática más teórica donde los alumnos muestran la capacidad de comprensión instrumental que han adquirido durante las sesiones. En cuanto al bloque II, se observa la comprensión relacional, en la cual los alumnos muestran su capacidad de transferir los conocimientos del algebra a ámbitos de la vida real o en la resolución de problemas.

En un primer análisis de las calificaciones, se puede observar que no hay una clara diferencia entre las calificaciones totales obtenidas por los alumnos en los dos grupos. A continuación, en la Figura 13 se muestra dichas evidencias.

Figura 13

Calificaciones generales de la prueba final Grupo A y B

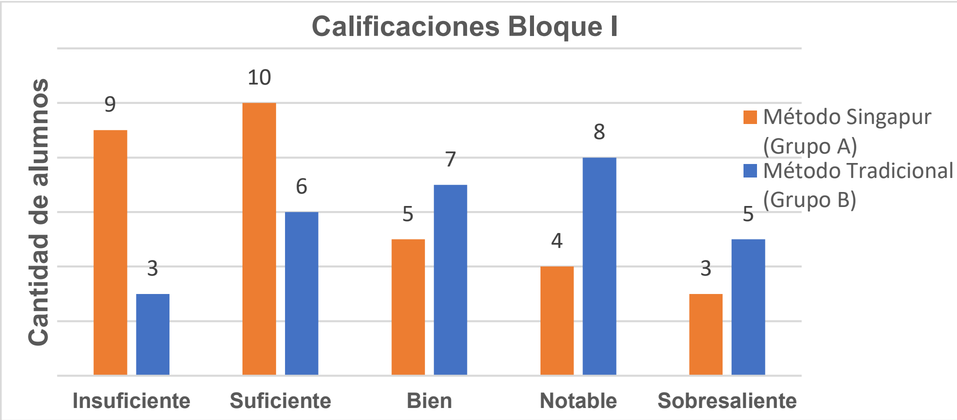


Se puede observar que la cantidad de alumnos que han obtenido calificaciones similares es muy parecida en los dos grupos. Tanto para el Grupo A como para el Grupo B más de un 60% de los alumnos obtuvieron calificaciones más altas que un insuficiente, por lo que en reglas generales más de la mitad de la clase de los dos grupos desarrollaron los conocimientos necesarios para superar dicha unidad.

Sin embargo, si analizamos dicha prueba por bloques de compresión, en esta ocasión si se han obtenido diferencias claras. Para el bloque I, las calificaciones se muestran en la siguiente Figura 14.

Figura 14

Calificaciones para el bloque I de la prueba final, Grupo A y B



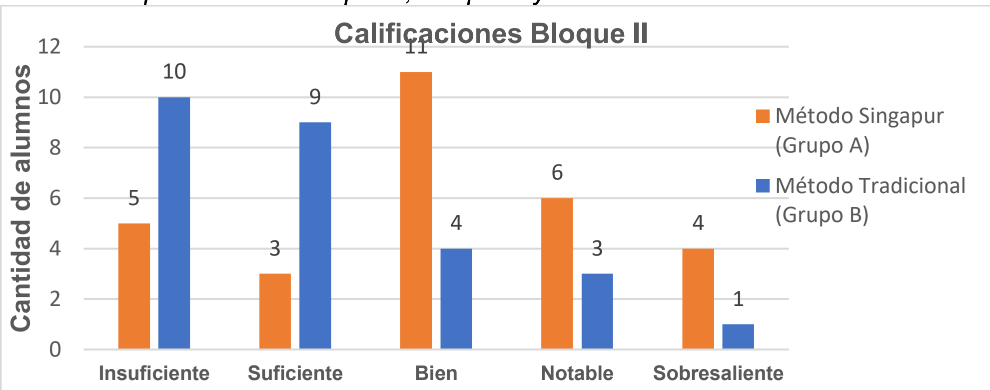
La Figura 14 hace patente que, en el Grupo B, el grupo en el que se han desarrollado las sesiones en base a la metodología tradicional, los alumnos mostraron mejores calificaciones en comparación al Grupo A. Debido a esto, nos atrevemos a indicar que los alumnos han desarrollado una mejor comprensión instrumental y que por ello se han mostrado más hábiles a la hora de aplicar los conceptos teóricos y a la hora de realizar los cálculos y los procedimientos subyacentes del algebra. Y es que solo un 10% de los alumnos del Grupo B no fueron capaces de resolver los ejercicios de una manera correcta y más del 60% de las calificaciones oscilan entre el bien y el sobresaliente.

Sin embargo, para el Grupo A, más del 60% de los alumnos obtuvieron resultados suficientes o insuficientes, por lo que los resultados muestran un claro impacto de un método u otro a la hora de desarrollar la comprensión instrumental de los alumnos.

Siguiendo la misma tendencia, las calificaciones del bloque II muestran resultados opuestos. Aunque en esta ocasión los mejores resultados pertenecen al Grupo A, al grupo del Método Singapur. Esto se muestra en la siguiente Figura 15:

Figura 15

Calificaciones prueba final bloque II, Grupo A y B



Esta vez, de una manera más contundente, se muestra que los alumnos del Grupo B tuvieron serias dificultades a la hora de resolver los problemas relacionados con la vida cotidiana. Específicamente más del 70% de los alumnos no fueron capaces de resolver ni plantear los problemas, y no pudieron llegar al nivel mínimo esperado. Para el Grupo A, se evidencia que la mayoría de los alumnos si fueron capaces de transferir los conocimientos algebraicos trabajados en las sesiones para resolver problemas de la vida real. La mayoría de ellos fueron capaces de comprender los problemas, y plantearlos correctamente. En cierta medida, dichos resultados respaldan que el Método Singapur es una metodología que fomenta la compresión de las matemáticas desde el razonamiento y el pensamiento crítico.

Sin embargo, junto a las fichas de observación, la prueba final también muestra que las dos metodologías presentan inconvenientes a la hora de desarrollar la comprensión total de las matemáticas. Por un lado, se ha demostrado que el Método Singapur es un método eficaz a la hora de desarrollar la comprensión relacionar, que lleva consigo a entender el porqué de los procedimientos y de los cálculos, así como entender el porqué de la utilidad de las matemáticas. Por lo contrario, la metodología tradicional fomenta la comprensión instrumental, permitiendo a los alumnos adquirir mecanismos que permiten llegar a la respuesta deseada de una manera rápida y fiable.

VI. Conclusiones

Mediante la implementación del Método Singapur en un aula de 2º de la ESO se pudieron recoger evidencias de que este método, sin lugar a duda, se trata de una buena estrategia para mejorar la motivación y la actitud de los alumnos hacia las matemáticas. Sin embargo, en cuanto a la adquisición de conocimientos hay varios aspectos que se deben tener en cuenta para procurar que su implementación sea lo más exitosa y satisfactoria posible. A continuación, se exponen las conclusiones que se obtuvieron durante la intervención acerca de los ítems establecidos en los objetivos generales: la motivación y la actitud de los alumnos, la comprensión de los contenidos y la transferencia.

Las evidencias obtenidas mediante el cuestionario de percepción y la observación de los estudiantes permiten intuir que las sesiones del Método Singapur fueron del agrado de los alumnos, haciendo que se sintiesen más motivados y con una actitud más positiva. A su vez, se mostraron mucho más participativos y colaboradores, y se pudo observar también un mayor aprovechamiento de la clase.

La prueba final confirmó que el Método Singapur cumple con la efectividad de mejorar la capacidad de los alumnos de pensar y razonar abstractamente, así como transferir el conocimiento matemático a otros ámbitos. Ciertamente, los resultados demuestran que los alumnos del Grupo A desarrollaron un mayor grado de compresión relacional del algebra, siendo capaces de resolver problemas cotidianos mediante el algebra con mayor facilidad que el demostrado por los alumnos del Grupo B.

Por el contrario, en cuanto a la adquisición de la compresión instrumental y los contenidos, el método tradicional se mostró mucho más efectivo proporcionando a los alumnos reglas y procedimientos útiles para hallar la solución de ejercicios. Así pues, los alumnos del Grupo B se mostraron mucho más hábiles y seguros a la hora de resolver los ejercicios y los cálculos algebraicos, a diferencia de los alumnos del Grupo A. Esto indica que, como teorizó Skemp (1978), tanto la compresión instrumental como la relacional son necesarias en el desarrollo de la compresión total de los conceptos matemáticos. Por ello, con las evidencias recogidas se puede concluir que su efectividad podría ser mejorada con la implementación conjunta del método tradicional y el Método Singapur.

En cuanto al proyecto de innovación, en el diseño e implementación de la propuesta de intervención desarrollada en base al Método Singapur se han observado dificultades que se deben tener en cuenta:

Sin lugar a duda, la implementación del Método Singapur requiere mucho tiempo y mucho trabajo. Además, es todo un reto desarrollar actividades y recursos que estimulen a los estudiantes a construir nuevos conocimientos y dirigirlos en su propio aprendizaje desde la comprensión relacional. Y es que, además, actualmente en el mercado, existen pocos recursos y materiales que pueden ser aplicables en niveles de la ESO, por lo que es un trabajo del propio docente crearlos.

A su vez, el tiempo es uno de los aspectos más críticos de la implementación de dicho método, pues enseñar mediante el Método Singapur requiere mucho más tiempo que el método tradicional, debido a todos los recursos que se deben utilizar —como son los materiales manipulativos, las diferentes estrategias de resolución y los juegos—. Se ha estimado que para una mejor intervención de dicha propuesta se hubieran necesitado dos sesiones más. De esta manera, se hubiese podido profundizar mucho más en las actividades, así como también darles a los alumnos un mejor seguimiento. En esta misma línea, se considera que el currículo matemático de 2º de la ESO actual es demasiado extenso como para poder implementar el Método Singapur como alternativa al método tradicional. Por lo que, de ser una opción, las alternativas sería rebajar el contenido curricular o utilizar el Método solamente en ciertos contenidos específicos.

Limitaciones

Durante el transcurso del trabajo se han podido observar también diferentes limitaciones que se deben de tener en cuenta a la hora de interpretar los resultados y las conclusiones del estudio.

En cuanto al proyecto de investigación cabe destacar que, debido a que la autora está trabajando en el centro en el que se ha desarrollado la propuesta, la muestra ha sido

una muestra por conveniencia obtenida a partir de un grupo natural ya creado. Por lo que es posible que la muestra utilizada puede no ser representativa y los resultados obtenidos pueden ser, asimismo, difíciles de extrapolarlos a la población general.
A su vez, hay ciertas variables o factores intrínsecos de los alumnos que no se han estudiado ni analizado previamente, como pueden ser la actitud, la predisposición por aprender o la participación; y que también pueden influir en los resultados que se han obtenido. Además, debido a que el proyecto de investigación ha tenido restricciones en cuanto al tiempo, las sesiones han sido muy pocas, por lo que la cantidad de datos que se han podido recopilar no ha sido muy alta. Por ello, para investigaciones futuras se reconoce la necesidad de aplicar la propuesta en un periodo de tiempo mayor para explorar y controlar más detalladamente los cambios o evidencias que se produzcan. Además de estudiar previamente el estilo de aprendizaje, sería importante considerar actitud de los alumnos hacia las matemáticas para poder valorar el progreso o la verdadera efectividad de los métodos comparando los resultados iniciales con los resultados finales.

Por otro lado, y en relación con las características de la propia investigadora —con no mucha experiencia en el campo y está en una etapa de formación— se considera que el método de recolección de datos o la manera de evaluar a los estudiantes puede ser mejorada. Para futuros proyectos de investigación seria conveniente utilizar cuestionarios validados siguiendo todos los ítems preestablecidos y seguir las puntuaciones tal y como se indican. Sin embargo, como el objetivo de este trabajo ha sido fundamentalmente la vertiente de la innovación se ha visto oportuno utilizar solamente aquellos ítems que presentan una homogeneidad directa con los objetivos preestablecidos.

En referencia a las limitaciones del proyecto de innovación, principalmente se destaca que las sesiones no siguen el nuevo currículo ni el marco estructural de las situaciones de aprendizaje. No obstante, se han elaborado las sesiones de esta manera en base a dos motivos: seguir las directrices del antiguo currículo que se sigue implementando en el propio centro y desarrollar sesiones afines al propio diseño que el Método Singapur plantea y que, además, tiene en cuenta la comprensión, la consolidación y la transferencia.

Prospectivas futuras

Ante las conclusiones obtenidas, se podría concebir como una línea prospectiva para futuros trabajos, implementar una propuesta de intervención híbrida —en donde se trabaje con ambos métodos— que pueda hacer frente a los diversos inconvenientes observados en la intervención realizada, como son, la falta de tiempo a la hora de realizar todas las actividades que conlleva el Método Singapur en solitario, así como, la necesidad de trabajar tanto la compresión relacional como la comprensión instrumental.

En este sentido, podría ser muy valioso para el aprendizaje de los estudiantes realizar intervenciones en donde se ponga en práctica tanto el método Singapur como el método tradicional en las diferentes sesiones. Así pues, se finaliza este TFM presentando el diseño de una posible futura intervención que se encuentra en el Anexo 18 y que implementa ambos métodos y que, además, sigue las directrices del nuevo currículo.

Bibliografía

Alonso Tello, C., López Barriga, P., & De La Cruz Vicente, O. (2013). CREER TOCANDO. *TENDENCIAS PEDAGÓGICAS Nº*, *21*, 249–262. https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/issue/view/TP21

Bautista, A., Wong, J., & Gopinathan, S. (2015). Desarrollo Profesional Docente en Singapur: Describiendo el Panorama. *Psychology, Society, & Education*, *7*(3), 423-441. https://doi.org/10.25115/psye.v7i3.524

Beltrán, M. L., Gordo, L. A., Palomares, I. F., Montejo-Gámez, J., Alonso, P. R., Bayés, A. S., & Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94).

Blanch, J. (2011). Descentralización y autonomía en el sistema educativo en España. El caso de Catalunya. *Italian Journal of Sociology of Education*, *3*(2), 11-30.http://ijse.padovauniversitypress.it/system/files/papers/2011_2_2.pdf

Calleros Alarcón, J. C. (2020). Singapur. *Anuario Asia Pacífico El Colegio de México*, (19), 1–21. https://doi.org/10.24201/aap.2020.308

Cebrián, A., Trillo, A., & González, A. (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

De la Torre Pardo, L. (2021). *Aplicación del Método Singapur para facilitar la resolución de problemas en primaria.* [Tesis de Grado, Universidad del País Vasco]. https://addi.ehu.es/handle/10810/50154

Etchepare, G. C., Pérez, C., Bolaños, J. A. C., & Ruiz, R. O. (2017). Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un análisis multidisciplinar. *Psychology, Society & Education*, *9*(1), 1-10.

Frías, A.-S. (2007). El currículo escolar y la descentralización educativa en España. *Revista de Educación*, 343, 199-221. https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:602926f2-b581-4d5b-94f9-a6aa01676046/re34310-pdf.pdf

Generalitat de Catalunya Departament d' Ensenyament, [GCDE]. (2017). *Competències básiques de l'ambit matemàtic.* Direcció General d'Eduacació Secundària Obligatoria i Batxillerat.

Generalitat de Catalunya Departament d' Ensenyament. (2022). *Curriculum 175/2022.* XTEX, Xarxa telemática educativa. https://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/curriculum-175-2022/

Ibbs, B.C. (2014). Reconfiguring Bruner: Compressing the Spiral Curriculum. *Phi Delta Kappan*, 95*(7)*, 41-44. https://doi.org/10.1177/003172171409500710

Gil Sáez, B. (2022). *El método Singapur como propuesta metodológica en la transición de Primaria a ESO.* [Tesis de Maestría, Universidad de Valladolid] https://uvadoc.uva.es/handle/10324/57571

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. *Actualidades en Psicología*. La Mediana. https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gopinathan, S. (2012). Fourth Way in action? the evolution of Singapore's education system. *Educational Research for Policy and Practice*, *11*(1), 65–70. https://doi.org/10.1007/s10671-011-9117-6

Kho, T. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. In Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMISEAMS). *Mathematical Education in the 1990's*, 345-351.

Lapuebla-Ferri, A., Giménez-Palomares, F., & Jiménez-Mocholí, A. J. (2019). Comprender las matemáticas de secundaria y bachillerato desde las asignaturas universitarias: Una propuesta de docencia transversal basada en elasticidad y resistencia de materiales. *Modelling in Science Education and Learning*, *12*(2), 125-134. https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/11800/11699

Lee, W. (2022). *Los secretos del currículo de matemáticos de clase mundial, Metodo Singapur.* Bowker

Marcellán, F. (2017). Propuestas de la Real Sociedad Matemática Española para el Pacto Educativo. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *20*(2), 235-242. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1386

Marín Real, M. (2021). *Propuesta de intervención educativa para desarrollar las competencias matemáticas en la resolución de problemas a través del Método Singapur* [Tesis de Grado, Universidad Católica de Valencia] https://riucv.ucv.es/handle/20.500.12466/2107

Método Singapur. Características de Matemáticas Método Singapur. (s. f.). matematicas-singapur. https://www.metodosingapur.com/caracteristicas-metodo-singapur

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (s.f.) *Evaluación del sistema educativo.* https://educagob.educacionyfp.gob.es/sistema-educativo.html

Ministry of Education (MOE). (2020). *Mathematic Syllabuses. Secondary Express Corurse.* https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.ashx

Rodríguez-García, A., & Arias-Gago, A. R. (2022). Modelos didácticos en matemáticas: relación e influencia en el rendimiento académico. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *26*(1), 281-302. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/16948/22997

Tan, C. Y., & Dimmock, C. (2014). How a 'top-performing' Asian school system formulates and implements policy: the case of Singapore. *Educational Management Administration & Leadership*, *42*(5), 743-763. https://doi.org/10.1177/1741143213510507

Tan, Liang See & Tan, Keith & Hung, David. (2017). Republic of Singapore: Singapore education landscape*. En Education Systems and Reforms in Southeast Asia and China* (pp.189-237). Bangkok.

Tapia Reyes, R. A., & Murillo Antón, J. (2020). El método Singapur: sus alcances para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Muro de La Investigación*, *5*(2), 13–24 https://doi.org/10.17162/rmi.v5i2.1322

Vigotsky LS. (2006) *Interacción entre aprendizaje y desarrollo*. Psicología del desarrollo escolar. Selección de lecturas. (pp. 45-60). Editorial Félix Varela.

Vila, M. (2017, 12 enero). Inauguració del col·legi Oms i de Prat (1968). El Pou. https://www.elpou.cat/noticia/2642/inauguracio-collegi-oms-prat-1968

Villamizar, N. L. H., Velandia, W. M., & Jaimes, S. P. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista virtual universidad católica del norte*, (35), 254-287. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194224362014

White, L.L., & Reyes, M. (2014) Factores que influyen en los alumnos para que no se encuentren motivados en la clase de matemáticas y qué papel juega el docente como agente motivador. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 1(2). **https://www.pag.org.mx/index.php/PAG/article/view/191/239**

Zapatera Linares, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD Revista de Psicología.* https://revista.infad.eu/index.php/IJODAEP/article/view/1980/1708

ANEXOS

Anexo 1

Contenidos para el segundo curso de secundaria en Singapur

SEGUNDO CURSO DE SECUNDARIA
ESPACIO Y FORMA
Figuras y cuerpos geométricos (CC8, CC9)
- Identificación de objetos de dos y tres dimensiones - Construcción, composición y descomposición de objetos de dos y tres dimensiones - Tamaño, posición y orientación de figuras planas en mosaicos y elementos del entorno real - Representación plana de objetos de tres dimensiones - Desarrollo plano de cuerpos geométricos
Proporcionalidad y semejanza de figuras de dos dimensiones (CC9, CC10)
- Ángulos, longitudes y áreas - Escalas - Proporciones geométricas relevantes - Uso de proporcionalidad para resolver problemas
Teoremas de Tales y Pitágoras (CC9, CC10)
- Razonamiento y prueba - Demostración de teoremas en diferentes contextos históricos - Uso de teoremas para la resolución de problema en triángulos rectángulos
MEDIDA
Unidad de medida de áreas y volúmenes (CC11, CC12)
- Selección de unidades adecuadas en cada situación

- Relación entre unidades y conversión de unidades

Longitud, perímetros y áreas de figuras planas (CC11)

- Medidas directas
- Medidas indirectas (Semejanza, Tales y Pitágoras)
- Uso de relaciones entre longitudes, perímetro y áreas para la resolución de problemas en diferentes contextos

Superficies y volúmenes de formas del espacio (CC11, CC12)

- Estrategias para calcular las medidas de prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas
- Representación plana de objetos tridimensionales en la resolución de problemas de cálculo de áreas y volúmenes

ESTADISTICA Y AZAR

Estudios Estadísticos (CC13, CC14)

- Diseño de investigaciones y recogida de datos
- Población e individuo, muestra y variables estadísticas
- Tablas, frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumulativas

Graficas estadísticas (CC14)

- Diagrama de barras, de líneas y de sectores
- Hoja de cálculos y herramientas TAC

Herramientas de análisis de datos (CC15)

- Medidas de centralización: media, mediana y moda
- Medidas de dispersión: valor máximo, mínimo y rango

Conceptos básicos de probabilidad (CC16)

- Predicción de resultados en experimentos aleatorios
- Proporcionalidad por asignar
- Simulaciones y comprobación de predicciones
- Herramientas TAC para simulaciones y cálculos de probabilidad, calculadoras y GeoGebra

- Historias de juegos de azar en diferentes culturas

NUMERACIÓN Y CALCULO

Nombres racionales (CC1, CC2, CC3)

- Significado en diversos contextos
- Expresión: fracción, decimal y porcentaje
- Representación gráfica (recta numérica)
- Operaciones (reglas de cálculo e interpretación gráfica)
- Origen y utilización de las fracciones antiguamente (Egipto, India y Grecia)
- Uso de fracciones para resolver problemas en contextos diversos
- Herramientas digitales (calculadoras, programación libre y GeoGebra)

Porcentajes (CC2, CC3)

- Cálculo
- Aumento y disminución porcentuales
- Uso de porcentajes para resolver los problemas en contextos diversos

Calculo mental (CC1, CC2, CC3)

- Con fracciones
- Con porcentajes sencillo
- Operaciones inversas
- Estimación de resultados

CAMBIOS Y RELACIONES

Proporcionalidad directa e inversa (CC2, CC5)

- Razones y proporciones para representar relaciones entre cantidades
- Representación (enunciado, expresión verbal, tabla, gráfica y formula)
- Resolución de situaciones con magnitudes proporcionales

Funciones (CC5, CC6)

- Generales, sin fórmula
- Tasas de variación
- Lineales y no lineales

- Recursos digitales interactivos para la representación de tablas y gráficos
- Resolución de problemas con funciones

Ecuaciones de 1º (CC4, CC5)

- Reglas del álgebra
- Orígenes del álgebra simbólica
- Calculo algebraico con calculadora o GeoGebra
- Resolución de problemas con ecuaciones

Anexo 2

Competencias especificas nuevo currículo

Competencias Especificas	Criterios de Evaluación
1. Interpretar, modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana, propias de las matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar procedimientos y obtener soluciones.	1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando su información dada y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2 Elaborar representaciones matemáticas eficaces, con recursos manipulables, gráficos y digitales, que conduzcan a la comprensión y resolución de problemas y situaciones de la vida cotidiana. 1.3 Analizar y seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando y contrastando su eficacia e idoneidad de forma razonada en la resolución de problemas. 1.4 Obtener soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos necesarios y discriminando la existencia o no de una o más soluciones de un problema.
2. Argumentar la idoneidad de las soluciones de un problema, evaluando las respuestas obtenidas a través del razonamiento y la lógica matemática, para verificar su validez y generar nuevas preguntas y retos.	2.1 Construir y expresar con coherencia ideas y razonamientos que permitan justificar la validez de las soluciones, procesos y conclusiones desde diferentes perspectivas (de género, sostenibilidad, consumo responsable...). 2.2 Generar preguntas a partir de argumentos matemáticos que permitan plantear nuevos retos relacionados con el problema resuelto.
3. Formular conjeturas sencillas o problemas, utilizando el razonamiento y	

argumentación, creatividad y herramientas tecnológicas, para integrar y generar nuevo conocimiento matemático	3.1 Plantear preguntas en contextos diversos que puedan responderse a través del conocimiento matemático. 3.2 Realizar conjeturas matemáticas sencillas de forma autónoma y razonada en un contexto en el que el alumno/a tenga libertad creativa haciendo uso, si es necesario, de herramientas tecnológicas (lenguajes de programación, hojas de cálculo, GeoGebra, fotografía matemática, vídeo, etc.) .). 3.3 Proponer problemas de forma autónoma, creativa y razonada en un contexto.
4.Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconocimiento patrones, interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficiente.	4.1 Descomponer un problema o situación de la vida cotidiana en distintas partes, abordándolas de una en una para poder encontrar la solución global con dispositivos digitales. 4.2 Reconocer patrones, similitudes y tendencias en los problemas o situaciones a solucionar. 4.3 Encontrar los principios que generan los patrones de un problema descartando los datos irrelevantes identificando las partes más importantes. 4.4 Generar instrucciones paso a paso para resolver un problema y otros similares probando y realizando posibles soluciones con dispositivos digitales
5. Conectar distintos elementos matemáticos relacionando conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado	5.1 Identificar y usar las conexiones entre diferentes representaciones de un mismo concepto matemático cuando se extrae información de una de ellas para su aplicación a la otra. 5.2 Reconocer y relacionar conexiones entre distintos conceptos y conocimientos matemáticos a través de situaciones de la vida cotidiana para sacar conclusiones y tener una visión integrada de las matemáticas

6. Vincular y contextualizar las matemáticas con otras áreas de conocimiento, interrelacionando conceptos y procedimientos, para resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.	6.1 Reconocer y utilizar las matemáticas presentes en la vida cotidiana usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar, predecir…, en situaciones susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos. 6.2 Reconocer y utilizar las conexiones entre las matemáticas y otras materias, en situaciones susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos. 6.3 Identificar y valorar la aportación actual e histórica de las matemáticas al progreso de la humanidad, también desde una perspectiva de género, frente a los retos que plantea la sociedad actual. 6.4 Desarrollar el espíritu crítico y el potencial creativo de las matemáticas argumentando propuestas innovadoras en contextos científicos, tecnológicos, sociales, artísticos y culturales.
7. Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.	7.1 Comunicar información de forma organizada, utilizando el lenguaje matemático adecuado, oralmente y por escrito, para describir, explicar justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones. 7.2 Representar con claridad conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando diferentes herramientas y formas de expresión, como por ejemplo a través del dibujo, la fotografía, los vídeos, las obras visuales y musicales, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos. 7.3 Dialogar entre iguales y debatir ideas matemáticas para describir, explicar y justificar razonamientos, procesos y conclusiones.

8. Desarrollar destrezas personales, como la autorregulación, que ayuden a identificar y gestionar emociones, aprendiendo del error y afrontando las situaciones de incertidumbre como una oportunidad, para perseverar y gozar del proceso de aprender matemáticas.	8.1 Gestionar las propias emociones y desarrollar la autoconfianza para encarar nuevos retos matemáticos perseverando en su resolución en cualquier situación de aprendizaje propuesta. 8.2 Tener conciencia de que se está aprendiendo y de cómo se está aprendiendo en cualquier situación de aprendizaje propuesta 8.3 Identificar los errores propios y expresar de forma razonada cuál es el motivo que los provocan (conceptuales, de procedimiento, de estrategia...), en la resolución de retos o problemas, perseverando en su resolución. 8.4 Participar de la propia evaluación gestionando estrategias que ayuden a superar las dificultades en la revisión de las producciones realizadas. 8.5 Apreciar el potencial creativo de las matemáticas, así como su capacidad de generar armonía y belleza, en las creaciones y producciones realizadas

9. Desarrollar destrezas sociales, como la cooperación, participando activamente en equipos de trabajo inclusivos reconociendo la diversidad y el valor de las aportaciones de los demás, para compartir y construir conocimiento de matemático de forma colectiva.	9.1 Cooperar en el trabajo en equipo tanto en entornos presenciales como virtuales, escuchando a los demás y valorando sus aportaciones, respetando la perspectiva de género, en situaciones en las que se comparta y construya conocimiento de forma conjunta. 9.2 Colaborar activamente con los demás, alcanzando y cumpliéndolos acuerdos, para alcanzar los objetivos del grupo relativos a la construcción del conocimiento matemático, valorando el éxito colectivo como una estrategia de mejora personal. 9.3. Equilibrar las necesidades personales con las del grupo, desde la empatía y el respeto, reconociendo la diversidad y el valor de las aportaciones de los demás para generar nuevo aprendizaje matemático, tanto individual como colectivo. 9.4. Ayudar a identificar errores y dificultades de aprendizaje de las compañeras y compañeros haciendo aportaciones constructivas y concretas que puedan ayudar a superarlos y mejorar.

Anexo 3

Los 6 saberes establecidos para los tres primeros cursos de la educación secundaria

Sentido numérico

- Conteo
  - Resolución de problemas y situaciones de la vida cotidiana en los que se vayan a realizar recuentos sistemáticos, utilizando diferentes estrategias (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, etc.).

- Cantidad
  - Interpretación de números grandes y pequeños, reconocimiento y utilización de la notación exponencial y científica. Incluyendo la lectura de estas cantidades en la calculadora o hoja de cálculo
  - Expresión de estimaciones con la precisión requerida.
  - Empleo de los números enteros, fracciones, decimales y raíces para expresar cantidades en diferentes contextos, incluidos los de la vida cotidiana, con la precisión requerida.
  - Uso de los números indo-arábigos, la introducción del cero y los números negativos en la historia de las matemáticas.
  - Uso de las fracciones en la antigüedad (Egipto, India y Grecia) y en la actualidad.
  - Reconocimiento y aplicación de distintas formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica.
  - Selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad (natural, entera, decimal o fracción) para cada situación o problema.

- Sentido de las operaciones
  - Aplicación de estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales.
  - Reconocimiento y aplicación de las operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales útiles para resolver situaciones contextualizadas.
  - Comprensión y utilización de las relaciones inversas, entre: la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, la potencia y las raíces, para simplificar y resolver problemas.
  - Interpretación de los efectos de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales.
  - Uso de las propiedades de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) para realizar cálculos de forma eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo, adaptando las estrategias a cada situación.

- Relaciones
    - Utilización de factores primos, múltiplos y divisores para resolver problemas, mediante estrategias y/o herramientas diversas, incluido el uso de la calculadora.
    - Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes con eficacia hallando su situación exacta o aproximada en la recta numérica.

- Razonamiento proporcional
    - Identificación de situaciones proporcionales y no proporcionales (incluyendo situaciones de proporcionalidad inversa) en problemas de la vida cotidiana. Comprensión y representación de las relaciones cuantitativas.
    - Porcentajes: comprensión y utilización en la resolución de problemas, incluidos los mayores que 100% o menores que 1%.
    - Desarrollo y análisis de métodos para resolver problemas en situaciones de proporcionalidad directa en distintos contextos (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, cambios de divisas, cálculos geométricos, escalas, etc.).

- Educación financiera
    - Interpretación de la información numérica en sencillos contextos financieros.
    - Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable dadas las relaciones calidad-precio y al valor-precio en contextos cotidianos.

Sentido de la medida

- Magnitud
    - Atributos medibles de los objetos físicos y matemáticos: búsqueda y relación entre ellos.
    - Elección de las unidades y operaciones adecuadas en situaciones que impliquen medida.
    - Comparación de las unidades propias del sistema métrico decimal con otras presentes en distintos contextos.
    - Evaluación de la importancia del establecimiento del metro como medida universal en el contexto histórico en el que se produjo y en el contexto actual.

- Medición
    - Selección y uso de instrumentos (analógico o digital) y unidades adecuadas para medir de forma directa diferentes magnitudes del entorno.
    - Deducción, interpretación y aplicación de las principales estrategias para obtener longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales.
    - Relación entre las aplicaciones de los teoremas de Tales y de Pitágoras en los distintos contextos históricos en los que se han utilizado (Grecia, India, China).

  - Empleo de representaciones planas de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas de áreas, entre otros.
  - Generación de representaciones planas, manual o digitalmente, de objetos geométricos planos o tridimensionales, con características dadas, como las longitudes de los lados, las medidas de los ángulos, las longitudes de las aristas.

- Estimación y relaciones
  - Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
  - Toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.
  - Valoración de las medidas del radio de la Tierra y de las distancias Tierra-Luna en la Grecia antigua.

Sentido espacial

- Formas geométricas de dos y tres dimensiones
  - Descripción y clasificación de formas geométricas planas y tridimensionales en función de sus propiedades o características.
  - Reconocimiento de las relaciones geométricas como la congruencia, semejanza y relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales.
  - Construcción de formas geométricas con distintas herramientas: materiales manipulables, instrumentos de dibujo, programas de geometría dinámica, realidad aumentada, etc.
  - Construcción de figuras geométricas en distintos contextos históricos, en particular en la Grecia antigua (Euclides).

- Localización y sistemas de representación
  - Localización y descripción de relaciones espaciales: coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.

- Movimientos y transformaciones
  - Análisis de transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas y/o manipulativas.

- Visualización y modelización geométrica
  - Empleo de modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas.
  - Reconocimiento de conexiones entre el sentido espacial con los demás sentidos (numérico, algebraico…) y con otras disciplinas (arte, ciencia, vida diaria).

Sentido algebraico

- Patrones
  - Patrones: identificación y comprensión, determinando la regla de formación de colecciones numéricas o gráficas.
  - Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización.
  - Identificación de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea en la naturaleza.

- Modelo matemático
  - Modelización y resolución de problemas contextualizados, también de la vida cotidiana, secundándose en representaciones matemáticas y en el lenguaje algebraico.
  - Obtención de conclusiones razonables sobre una situación de la vida cotidiana una vez modelizada.

- Variable
  - Comprensión del concepto de variable en sus distintas naturalezas.

- Igualdad y desigualdad
  - Empleo del álgebra simbólica para representar relaciones lineales y cuadráticas en situaciones contextualizadas, también de la vida cotidiana.
  - Análisis de los distintos métodos de resolución de ecuaciones a lo largo de la historia, en particular los métodos geométricos de Al-Khwarizmi.
  - Identificación y aplicación de la equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas.
  - Búsqueda de soluciones en ecuaciones o sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas, tanto de forma manual como utilizando la tecnología.

- Relaciones y funciones
  - Aplicación y comparación de las distintas formas de representación de una relación.
  - Identificación y uso de funciones, lineales o no lineales y comparación de sus propiedades a partir de tablas, gráficas o expresiones algebraicas.
  - Identificación de relaciones cuantitativas en situaciones contextualizadas, incluyendo la vida cotidiana y determinación de los tipos de funciones que las modelan (lineales y cuadráticas).
  - Deducción de la información relevante de una función mediante el uso de distintas representaciones simbólicas.

- Pensamiento computacional

- Identificación y uso de estrategias cuando se interpretan, modifican o crean algoritmos de programación por bloques y/o programaciones textuales que incorporan: diferenciación entre procesos secuenciales y paralelos; comprensión de las instrucciones de bucle, condicionales e instrucciones anidadas; comprensión de la gestión de datos con variables; uso de operadores lógicos y de eventos.
- Formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas utilizando programas y otras herramientas.

Sentido estocástico

- Distribución
  - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas.
  - Recogida y organización de datos de situaciones contextualizadas, incluyendo la vida cotidiana, que involucran a una sola variable.
  - Generación de representaciones gráficas adecuadas mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, apps...) para averiguar cómo se distribuyen los datos, interpretarlos y obtener conclusiones razonadas.
  - Medidas de centralización y dispersión: interpretación y cálculo.
  - Comparación de dos conjuntos de datos dadas las medidas de centralización y dispersión.
  - Reconocimiento de que las medidas de dispersión describen la variabilidad de los datos.
  - Cálculo, con soporte tecnológico, e interpretación de las medidas de centralización y dispersión en situaciones reales.

- Inferencia
  - Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población.
  - Presentación de datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas.
  - Obtención de conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.
  - Uso de datos estadísticos a lo largo de la historia en la construcción de censos de población.
  - Usos de datos estadísticos en la medicina actual y en la historia, el caso de Florence Nightingale.
- Predictibilidad e incertidumbre
  - Identificación de fenómenos deterministas y aleatorios.
  - Interpretación de la probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios.
  - Planificación y realización de experiencias sencillas para analizar el comportamiento de fenómenos aleatorios.

- Asignación de la probabilidad a partir de la experimentación y el concepto de frecuencia relativa.
- Análisis del origen de la teoría de la probabilidad (Fermat y Pascal) en el contexto de los juegos de azar.
- Asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace.

Sentido socioemocional

- Creencias, actitudes y emociones
  - Desarrollo de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia hacia el aprendizaje de las matemáticas.
  - Gestión de las emociones que intervienen en el aprendizaje como la autoconciencia y la autorregulación.
  - Desarrollo de la flexibilidad cognitiva para aceptar un cambio de estrategia cuando sea necesario y transformar el error en una oportunidad de aprendizaje ya su vez, interpretar cada problema resuelto como una oportunidad para generar nuevas preguntas.

- Trabajo en equipo y toma de decisiones
  - Asunción de responsabilidades y participación activa para optimizar el trabajo en equipo.
  - Selección de técnicas cooperativas para compartir y construir conocimiento de forma colectiva.
  - Empleo de estrategias de gestión y toma de decisiones adecuadas para resolver situaciones propias del trabajo en equipo.

Anexo 4

Cuestionario de actitudes

	¿Qué tan de acuerdo estás con los siguientes enunciados?	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo
1	Las matemáticas serán importantes para mi profesión					
2	El profesor me anima para que estudie más matemáticas					
3	El profesor me aconseja y me enseña a estudiar					
4	Las matemáticas son útiles para la vida cotidiana					
5	Me siento motivado en clase de matemáticas					
6	El profesor se divierte cuando nos enseña matemáticas					
7	Pregunto al profesor cuando no entiendo algún ejercicio					
8	Entiendo los ejercicios que me manda el profesor para resolver en casa					
9	El profesor de matemáticas me hace sentir que puedo ser bueno en matemáticas					
10	El profesor tiene en cuenta los intereses de los alumnos					
11	En primaria me gustaban las matemáticas					
12	Me gusta cómo enseña mi profesor de matemáticas					
13	Espero utilizar las matemáticas cuando termine de estudiar					
14	Después de cada evaluación, el profesor me comenta los progresos hechos y las dificultades encontradas					
15	El profesor se interesa por ayudarme a solucionar mis dificultades con las matemáticas					
16	Saber matemáticas me ayudará a ganarme la vida					
17	Soy bueno en matemáticas					
18	Me gustan las matemáticas					
19	En general, las clases son participativas					

ESTRUCTURA CUESTIONARIO FINAL Y DISTRIBUCIÓN DE ÍTEMS	
Factores	**Ítems (19)**
Actitud del profesor percibida por el alumno	2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 19
Agrado y utilidad de las matemáticas en el futuro	1,4, 8, 11, 13, 16, 17, 18

Anexo 5

Ficha de observación

Grupo:	**Sesión:**	**Método**

Aspectos	**Observaciones**
Ambiente en la clase	
Atención y participación	
Interés y motivación	
Trabajo Grupal (Competencia 10 y 11)	
Reacción ante las actividades	

Anexo 6

Prueba final
BLOQUE 1: Contenidos

1. **Resuelve la siguiente ecuación: $3x - 1 = 2x + 5$. Explica los pasos que has seguido.**

2. **Halla el valor numérico de x+3x+5 para x=-2.**

3. **Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x:**

   a) $y = 0.5 + 3x$ para x = 3 **b) $y = 1.6x$ para $x = 0.75$**

4. **Simplifica las siguientes expresiones:**

   a) $3a^2b - 2a^2b + 7a^2b$ **b) 5xy + 7xy – 2xy**

BLOQUE 2: Transferencia

5. **Una barbacoa familiar cuesta 800 euros. Cada persona paga una parte igual del valor, aunque no incluimos en esta distribución a los menores de edad. (Competencia 1, 2 y 6)**

   A) **¿Cuál es el coste por adulto? Exprésalo algebraicamente, y explica a qué te refieres con cada incógnita.**

   B) **Sabemos que el número de adultos que asisten a la barbacoa es de 18. Sin embargo, al contar el coste final, hay que añadir el precio de los postres, que aún no se puede cuantificar. Así las cosas, ¿Cuál es el coste por adulto? Exprésalo algebraicamente y explica a qué te refieres con cada incógnita.**

6. **En una explotación agrícola empaquetan las naranjas en cajas de madera que contienen un número variable de naranjas. Sabemos que una caja de madera tiene**

una masa de 450g. M es la masa de una caja llena de naranjas expresada en gramos. N es el número de naranjas que contiene dicha caja. (Competencia 1, 2 y 6)

A) Escribe la expresión algebraica con la que podemos obtener la masa promedio de una naranja, en gramos, a partir de estas dos variables.

B) Escribe ahora una expresión algebraica con la que podemos obtener la masa promedio de una naranja, pero esta vez en kilogramos, a partir de las mismas variables.

C) ¿Cuál es el promedio de la masa de naranjas de una caja que pesa 4870 gramos y contiene 26 naranjas?

Anexo 7

Explicación teórica de la sesión 1

¿Qué es el lenguaje algebraico? Es un lenguaje con el que podemos expresar mensajes mediante símbolos, letras y números. Comúnmente las letras representan variables de valor desconocido, y la letra más utilizada es la x.
Propuesta de ejemplo que relacione el álgebra con temas anteriores: El área de un rectángulo de base b y altura h. A= b*h. El perímetro de un cuadrado a+a+a+a=4a
¿Qué es una expresión algebraica? Cuando el lenguaje algebraico, mediante letras y números, nos permite reflejar una situación le llamamos expresiones algebraicas. Ejemplos:
- El triple de un número 3x,
- La edad de María hace 3 años x-3

¿Qué es la parte literal y que el coeficiente? La **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplos:

En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x. En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parte literal xy^2. $6a - 3b + c + 8$

- Los coeficientes son +6, –3, + 1y +8 respectivamente. Las partes literales son *a, b* y *c*. El último término no tiene parte literal.

¿Qué son los monomios y los polinomios?

Un **monomio** viene dado por el producto de números. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la variable, o variables; la indeterminada, en cuanto a la variable es la que conforma la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

El área del círculo, pr^2, es un monomio con indeterminada, *r* y coeficiente

p. Su parte literal es r^2

Cada monomio tiene un grado que se establece según los siguientes criterios:

1. Cuando haya una única variable, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
2. Si aparecen varias variables, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplo:

$3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.

$7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b.

Un número su grado es 0

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. Su grado viene dado por el mayor grado de entre todos sus monomios.

Ejemplo:

$4 \times x^2 \times y^3 - 7 + 3 \times y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y

ACTIVIDAD GUIADA

Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

a) El triple de un número más su mitad.

b) La edad de una persona dentro de 10 años.

c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.

d) La diferencia entre dos números consecutivos.

Señala el coeficiente, la parte literal, el grado y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $5x + 6y^2$

b) $x + 2x^2$

c) $2xy + 6 – 4y$

Anexo 8

Traducción del lenguaje algebraico

Al comprar 2 el segundo me cuesta la mitad de precio	$\times = \times + \frac{\times}{12}$
Lo que me devuelven al pagar con un billete de 20 euros	$\times = 20 - \times$
El perímetro de un rectángulo	$2\times + 2\times$
Un estuche cuesta 2,25 euros	$\times = 2{,}25$
He comprado 4 lápices, 2 bolis y 1 rotulador y en total me ha costado 2,25 euros	$4\times + 2\times + \times = 2{,}25$

Paula dentro de 6 años tendrá 12 años	$\times + 6 = 12$
Al doble de un número le resto 3 y obtengo 8	$2 \times - 3 = 8$
La edad de alguien hace 3 años era 8	$\times - 3 = 8$
Un número y su siguiente suma 9	$\times + (\times + 1) = 9$
La edad de Ane es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años	$\times = \frac{\times - 3}{3}$

Anexo 9

Desarrollando la creatividad

$\times = \frac{\times + \times}{2}$	$3 \times +2(\times +1)$
$\times = 24$	$\times^2$
$4 \times$	$2 \times +2 \times$
$0,5 \times$	$8 \times$

$x + y = 12$ $130x + 60y = 860$	$y = \frac{a * b}{2}$
$x + y = 20$	$x + 1 = 9$

Anexo 10

Problemas algebraicos

Ejercicio 1.

Harina de otro costal

Un panadero tiene un saco de 2 kg de harina. Retira una parte, que reserva para preparar magdalenas, y reparte el resto en 9 cuencos, de modo que en cada cuenco hay la misma cantidad de harina.

a

¿Qué cantidad de harina hay en cada cuenco?

Razona tu respuesta.

b

Utiliza el álgebra para expresar la cantidad de harina que tiene el panadero en cada cuenco.

c

¿Qué significa la letra que utilizas?

Ejercicio 2

Dos rectángulos con la misma área

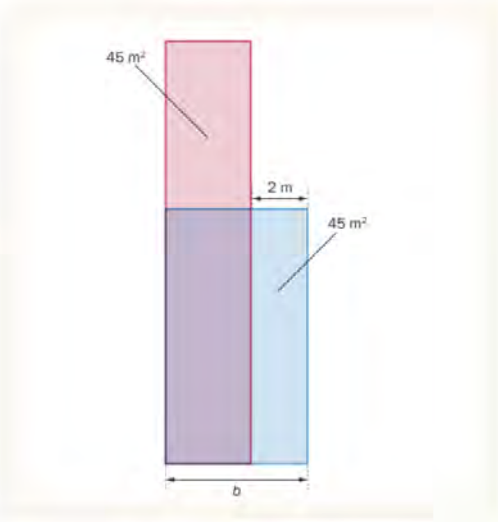
a

Un rectángulo tiene una área de 45 m^2 y una base de *b* metros.

¿Cuántos metros mide la altura de este rectángulo?

b

¿Cuánto mide la altura del rectángulo si la longitud de la base se reduce en 2 metros pero el área se mantiene?



c

¿Qué altura es mayor, la del rectángulo original o la del segundo?

Justifica tu respuesta.

d

¿Cuál es la diferencia de altura de los dos rectángulos?

Completa la expresión algebraica.

–

Anexo 11

Ficha de sesión 2: Método Singapur.

<table>
<tr><th colspan="4">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: 2</td><td colspan="2">Ecuaciones Lineales</td><td>Método Singapur</td></tr>
<tr><th colspan="4">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. Lenguaje de las ecuaciones
2. Ecuaciones equivalentes
3. Valor numérico de una expresión algebraica
4. Resolución de ecuaciones lineales: modelo de la balanza y método analítico</td></tr>
<tr><th colspan="4">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Introducir aspectos clave de las ecuaciones lineales y trabajar distintas estrategias de resolución de ecuaciones.</td></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES</th><th colspan="2">Descripción</th><th>Recursos</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Introducción a las ecuaciones de primer grado</td><td colspan="2" rowspan="6">En esta primera actividad, de igual manera que en la sesión 1, se introducirán en el aula los conceptos teóricos de las ecuaciones. Se expondrán diferentes ejemplos durante todo el transcurso de la explicación y al finalizar la instrucción se realizará una actividad grupal, con el docente como guía. La estructura de la explicación y los ejemplos se muestran a continuación en la Ficha 1.</td><td>Ficha 1</td></tr>
<tr><th>Organización</th></tr>
<tr><td>Clase Magistral</td></tr>
<tr><th>Tiempo</th></tr>
<tr><td>15 minutos</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">Modelo de la balanza para resolver ecuaciones</td><td colspan="2" rowspan="2">Mediante esta actividad presentamos el modelo de la balanza para resolver las ecuaciones lineales. Para llevar a cabo dicha actividad utilizaremos el simulador accesible de la siguiente página web: https://phet.colorado.edu/es/simulations/equality-explorer. Antes de todo, se les explicará a los alumnos el funcionamiento del simulador y los aspectos más relevantes del modelo de la balanza, dicha explicación se encuentra en</td><th>Recursos</th></tr>
<tr><td>Simulador Phet

Ficha 2: estructura de la explicación

Ficha 3: ejercicios de ecuaciones</td></tr>
</table>

	el Ficha 2. Se les dará 20 minutos con el objetivo de que exploren, manipulen y afiancen el concepto de la igualdad, la representación de las variables y sus diferentes valores. A continuación, se les entregará una ficha con ejercicios variados con los cuales tendrán que realizar diferentes acciones con el simulador; desde pesar objetos, representar ecuaciones hasta encontrar el valor de las variables. La ficha 3 al finalizar la tabla estructural de la sesión.	**Organización** Grupos de 2-3 **Tiempo** 1 hora
Resolución de ecuaciones: Método analítico	En esta última actividad, se pretende trabajar la resolución de ecuaciones de una manera abstracta y utilizando los símbolos y procesos propios de las matemáticas. Los alumnos deberán de resolver los ejercicios basándose en las 2 estrategias trabajadas, pero esta vez sin la utilización de materiales manipulables. Trabajarán de manera analítica las acciones realizadas mediante la balanza, comprenderán, por ejemplo, que retirar un objeto de la balanza es igual a realizar una operación de resta de manera analítica. Para realizar dichos ejercicios se les entregará la ficha 4, que se encuentra posterior a la tabla.	**Recursos** Ficha 4 **Organización** Individual **Tiempo** 45 minutos

Ficha 1

Explicación teórica ecuaciones

¿Qué es una ecuación? Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

$6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita

$4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e

$x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 (1 + 2 = 3).

¿Cuál es la solución de una ecuación? Y ¿Su ecuación equivalente?

Resolver una ecuación es **encontrar el valor numérico que debe tener x** para que la igualdad sea cierta.

Es decir, una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias. **Resolver** una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Ejemplo:

En la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Habitualmente se transforman las ecuaciones en ecuaciones equivalentes más sencillas, las cuales tienen la misma solución.

Ejemplo:

$3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente

Ficha 2

Modelo de balanza

El modelo de la balanza y sus dos estrategias de resolución de ecuaciones.

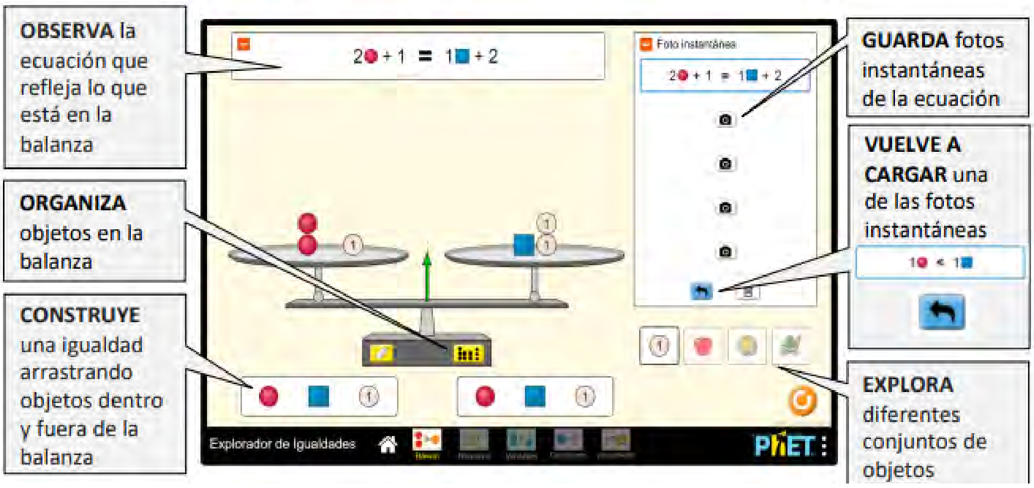
- En la estrategia de la balanza dinámica, basada en el principio del equilibrio, se encuentra el valor de la incógnita mediante la eliminación de objetos de los platillos. El objetivo es retirar de los dos platillos la cantidad proporcional de los objetos, con el objetivo de hallar una igualdad que nos permita saber el peso de los objetos o el valor de la incógnita.
- La estrategia de la balanza fija se basa en las operaciones inversas que se aplican a los términos de la ecuación. Es una estrategia que se extrapola de la matemática más analítica, pero que ayuda a visualizar mucho mejor el proceso de resolver una ecuación.

Explicaciones acerca de la utilización del simulador:

El ***Explorador de Igualdades*** permite a los estudiantes explorar las condiciones que resultan en igualdad y desigualdad, el efecto de aplicar operaciones a una igualdad o desigualdad, y resolver ecuaciones simples.

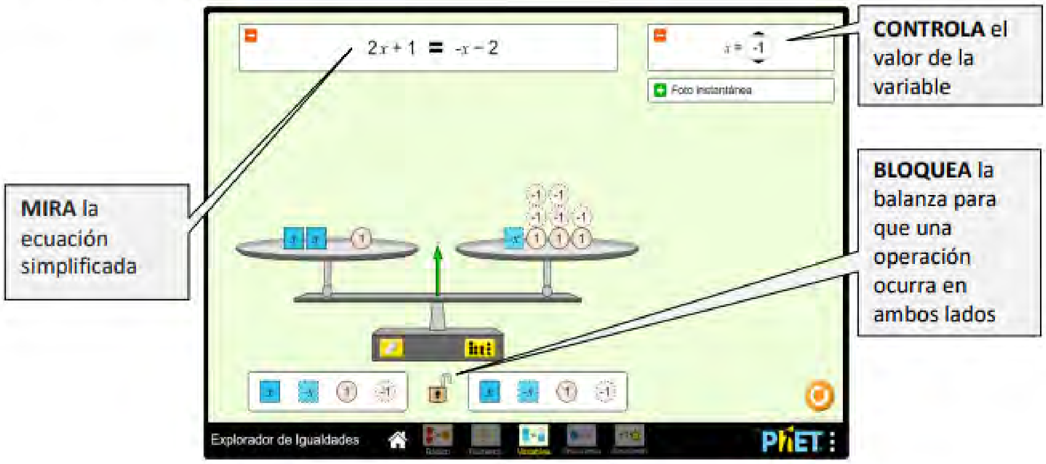
Ventana de Básico

En la ventana de Básico, los estudiantes pueden descubrir relaciones de igualdad y crear definiciones funcionales de igualdad y desigualdad.



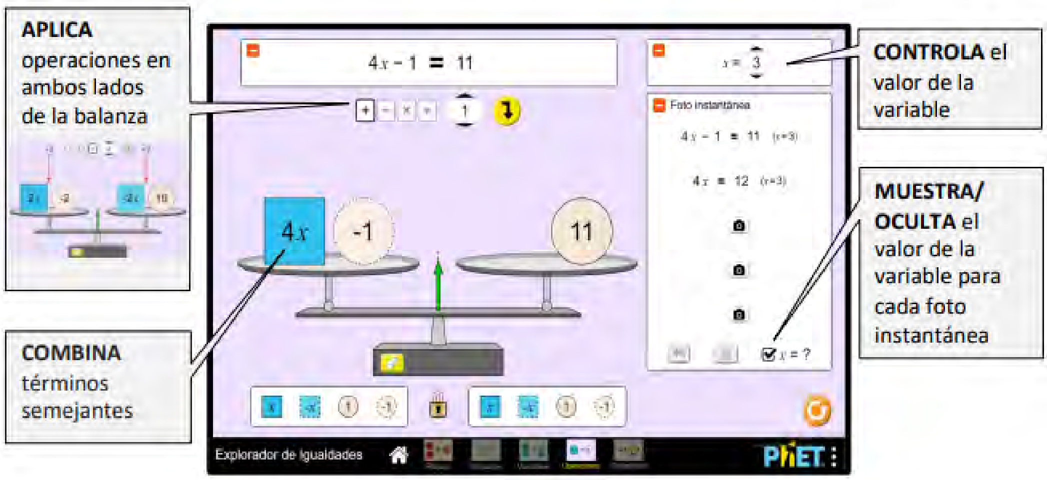
Ventana de Variables

En la ventana de Variables, los estudiantes exploran cómo los diferentes valores de una variable impactan el estado de igualdad.



Ventana de Operaciones

En la ventana de Operaciones, los estudiantes pueden crear una desigualdad o ecuación y aplicar operaciones universales para explorar qué sucede con cada término, y descubrir cómo deshacer una operación.

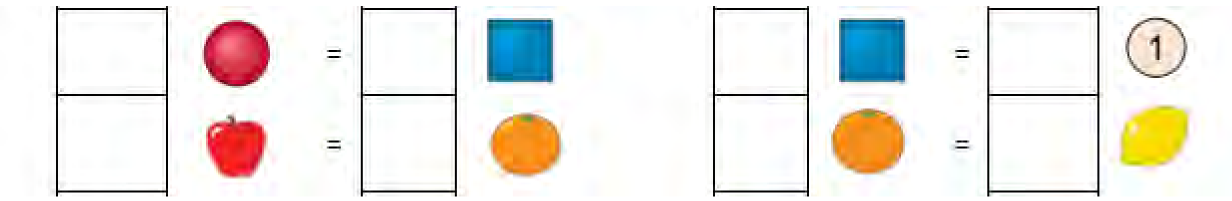


Ficha 3

Explorador de igualdades

Juega con la simulación y realiza las siguientes actividades: Ventana Básico

1. Completa las siguientes igualades y exprésalas de manera algebraica, representando cada figura con una variable. ¿Qué es lo que representa cada variable? ¿Qué es lo que interpretas en cada igualdad?

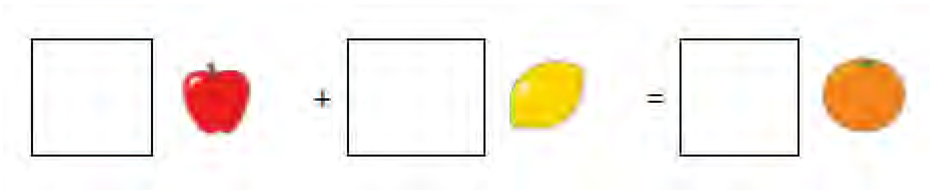


2. Utilizando la igualdad  entre  y entre  y 

puedes lograr el valor de la igualdad entre  y 

? ¿Si la bola roja pesa 1 kg, cuánto pesan las demás figuras?

3. Rellena el valor de cada cuadrado para que se cumpla dicha igualdad y luego exprésalo algebraicamente:



¿Si la naranja pesa 2 kilos, cuánto es peso de la naranja + la del limón?

Resuelve y analiza las siguientes ecuaciones: Ventana Variables y Ventana Operaciones

5. ¿Para qué valor de x en las siguientes ecuaciones la balanza está en equilibrio?

$$1)\ 2 \times -1 = \times +1$$

$$2)\ \times +6 = 8 \times -1$$

$$3)\ 7 \times +6 = \times +4$$

Por lo tanto, ¿cuál es la solución de dichas ecuaciones?

6. Oculta la ventana de las variables y encuentra la solución de las siguientes ecuaciones:

$$1)\ 2 \times +9 = \times +3$$

$$2)\ 6 \times +14 = 3 \times$$

$$3)\ \times +9 - 1 = \times +2 \times$$

¿Qué estrategia has utilizado? Explícalo.

7. Busca el equivalente de las siguientes expresiones algebraicas:

$$a)\ 2x + 4 \qquad x = 1$$

$$b)\ 21x + 8 \qquad x = 2$$

$$c)\ 1 + x \qquad x = 6$$

Para un valor distinto de x, ¿seguirían siendo equivalentes las ecuaciones encontradas? ¿Por qué?

2 INCÓGNITAS

8. Construye una situación equilibrada usando tanto x como y. Oculta los valores de las variables. ¿Puedes determinar los valores de x y y? ¿Por qué?

9. Simplifica mediante el principio del equilibrio las siguientes ecuaciones de 2 incógnitas:

$$1)\ \times + \times +4 = \times +1$$

2) $\times = 2 + \times + 2\times$

3) $1 + \times + \times = \times - 2$

¿Puedo hallar en alguno de los casos el valor de alguna de las dos incógnitas? ¿Por qué?

Ficha 4

Resolución de ecuaciones: Método analítico

1. **Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.**

2. **Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$, explícalo paso a paso.**

3. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

   a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

4. **Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.**

   a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$
   d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

5. **Escribe dos ecuaciones equivalentes a las siguientes:**

   a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 =$
   7
   d) $x = -5$

Anexo 12

Ficha de sesión 3: Método Singapur.

<table>
<tr><th colspan="3">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: 3</td><td>Consolidando lo aprendido mediante juegos</td><td>Método Singapur</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Evaluación de expresiones algebraicas
2. Resolución de ecuaciones lineales</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Consolidar lo aprendido en las sesiones anteriores mediante juegos interactivos.</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>Descripción</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Juego de cartas</td><td rowspan="3">En esta actividad, se pretende consolidar los conocimientos acerca de resolver ecuaciones lineales mediante un juego de cartas. Para ello se les proporcionará a los alumnos una baraja algebraica que consta de 44 cartas reversibles. Por un lado, encontramos los términos de signo positivo y por atrás los mismos términos con signo negativo. Las 4 cartas restantes, muestran el signo de la igualdad.

El juego pretende que los alumnos utilicen dichas cartas para resolver las ecuaciones, basándose en las operaciones inversas. A un lado de la ecuación colocarán los términos con la variable, que en este caso es la x y al otro lado, los números. Para cambiar los términos de un lado a otro, los alumnos tendrán que darles la vuelta a las cartas, mediante esa acción podrán realizar las operaciones inversas. Una vez estén los términos ordenados y colocados, tendrán que</td><td>Baraja algebraica</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
<tr><td>Grupo de 4-5</td></tr>
</table>

	realizar las sumas y las restas y buscar las cartas que corresponden a dichas soluciones. Se realizará la actividad de manera competitiva, y se repartirá a cada grupo de 5 personas una baraja algebraica. Las ecuaciones que deberán de resolver se irán presentando en la pizarra secuencialmente, y el equipo más rápido se llevará un punto; el equipo con más puntos será el ganador de la partida.	**Tiempo** 1 hora
Parchís algebraico	En este segundo juego se trabajará la evaluación de expresiones algebraicas a través de un parchís. Para comenzar el juego, cada jugador lanzara el dado para posicionarse en la casilla que corresponde al número que le ha tocado y empezara a jugar el que haya conseguido la mayor puntuación. Desde dicha posición, lanzará el dado y sustituirá *x* por el valor del dado que le ha tocado en la ecuación correspondiente a la casilla. Según el valor numérico obtenido avanzará (solución de ecuación positiva) o retrocederá (solución de ecuación negativa). En cada turno, los alumnos podrán decidir si utilizar el dado blanco que corresponde a números positivos o un dado rojo que representa números negativos. La elección será determinante, ya que deberán decidir si va a usar el dado blanco o el dado rojo según la expresión algebraica en la que se encuentren. El objetivo es llegar primero a la meta sin pasarse, por lo que la mejor opción es que los alumnos obtengan soluciones positivas con las que puedan avanzar en la tabla. Se harán grupos de 4 estudiantes y se entregará cada grupo una tabla de parchís, dos dados y 4 fichas.	**Recursos** Tabla de parchis 2 dados 4 fichas **Organización** Grupos de 4 **Tiempo** 1 hora

Anexo 13

Ficha de sesión 4: Método Singapur.

<table>
<tr><th colspan="4">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: 4</td><td colspan="2">Transferencia del álgebra a la vida cotidiana</td><td>Método Singapur</td></tr>
<tr><td colspan="4">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">2 Relacionar la vida cotidiana con el álgebra
3 Resolución de problemas
4 Relación de contenidos matemáticos: álgebra y fracciones</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="4">Transferir los conceptos aprendidos a situaciones de la vida cotidiana
Evaluar</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td colspan="2">Descripción</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Álgebra en el mercado</td><td colspan="2" rowspan="2">Mediante esta actividad, se pretende reforzar los contenidos vistos en las anteriores sesiones con el objetivo de aplicar esos conceptos para resolver situaciones o problemas de la vida real.
En este primer problema, se presenta una situación en el mercado en el que se tiene una compra y se quiere encontrar diferentes valores de diferentes incógnitas que presentan el precio de los productos o la cantidad de kilos. El problema conduce a los alumnos a construir expresiones algebraicas y</td><td>Science Bits
Ordenador
Ficha 1</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
</table>

	encontrar sus soluciones combinando respuestas abiertas y respuestas cerradas donde los alumnos deben de argumentar y justificar sus respuestas. Esto permite a los alumnos ser conscientes de su aprendizaje y desarrollar el pensamiento lógico-matemático. Se utilizará la plataforma *Science Bits* con la cual deberán de resolver dicho problema del bloque de números racionales y álgebra del apartado "Construir Expresiones Algebraicas con Racionales". En caso de no tener un ordenador, el problema se imprimirá, mediante la ficha 1	Grupos de 4 **Tiempo** 30 minutos
Un contrato de trabajo	Como en el caso del anterior problema, se pretende relacionar el álgebra con una situación cotidiana y además relacionar el tema del álgebra con otro contenido de la asignatura como lo son las fracciones. Este problema pone sobre la mesa un contrato de trabajo, y requiere calcular el salario a percibir y las variables de las que depende. La principal dificultad que propone es que una letra no siempre representa un objeto, sino una cantidad de magnitud asociada y que una expresión algebraica debe de ser coherente en términos de unidades. Para su realización se utilizará el bloque de números racionales y álgebra del apartado "Construir Expresiones Algebraicas con Racionales" de la plataforma *Science Bits*. En caso de no tener un ordenador, el problema se imprimirá mediante la ficha 2.	**Recursos** *Science Bits* Ordenador Ficha 2 **Organización** Individual **Tiempo** 30 minutos
Prueba final	A través de esta actividad se evaluará los conocimientos que el alumno ha adquirido durante estas 4 sesiones. La evaluación, se dividirá en dos Bloques. El primer bloque compuesto de ejercicios	**Recursos** Anexo 19 **Organización** Individual

	procedimentales y de teoría, con los cuales se evaluará la comprensión instrumental adquirida del alumno. Y el segundo bloque, compuesto de problemas algebraicos cotidianos donde se evaluará la compresión relacional. Los ejercicios evaluativos se encuentran en el Anexo 19.	**Tiempo** 1 hora

Ficha 1

En el mercado

Luis va al mercado a comprar pechugas de pollo y lomo de ternera. En total compra 1,5 kg de carne y paga 12,39 €.

El precio de las pechugas de pollo es de 7,90 € el kilo y el del lomo de ternera es de 8,50 € el kilo. Sin embargo, una inoportuna mancha nos impide saber cuánta carne de cada tipo compra y cuánto paga por cada tipo de carne.

a

¿Es posible saber cuánta carne de cada tipo compra?

Explica tu estrategia para averiguarlo.

b

Como sabes, el álgebra nos puede ayudar a resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, podemos utilizar una variable *p* para referirnos a los kilogramos de pollo y una variable *t* para referirnos a los kilogramos de ternera.

¿Qué expresión algebraica nos permite hallar el dinero que paga Luis por la carne de pollo? ¿Y por la carne de ternera?

- Dinero que paga por la carne de pollo: ☐ euros
- Dinero que paga por la carne de ternera: ☐ euros

c

¿Puedes relacionar estas cantidades de dinero con los 12,39 € que Luis paga en total?

Explica cuál es esta relación.

d

Trata de establecer una relación algebraica de igualdad entre el precio que Luis paga por la ternera, el precio que paga por el pollo y los 12,39 € que paga en total.

Utiliza las expresiones algebraicas que has construido en el apartado *b*.

☐

e

La igualdad que has construido es una **ecuación**.

En una ecuación tratamos de encontrar los valores concretos de las variables que hacen cierta la igualdad. Por ello nos referimos a las letras como **incógnitas**.

¿Cuántas incógnitas hay en esta ecuación?

En la ecuación hay [...].

f

¿Has resuelto alguna vez una ecuación con dos incógnitas? ¿Se te ocurre alguna estrategia para hacerlo?

g

Si la ecuación anterior tuviera una sola incógnita, podríamos resolverla con las técnicas que conocemos de cursos anteriores.

¿Es posible deshacerse de alguna de las dos incógnitas?

Recuerda que Luis compra 1,5 kg de carne en total y que la carne solo puede ser de dos tipos: de ternera o de pollo.

Trata de expresar cuántos kilogramos de ternera compra Luis en términos de solo la variable *p*, que se refiere a los kilogramos de pollo.

- Cantidad de pollo: [ ] kg
- Cantidad de ternera: [ ] kg

h

A partir de estas expresiones, que se refieren solo al peso de la carne de pollo, ¿puedes expresar cuántos euros paga Luis por cada tipo de carne?

- Dinero que paga por la carne de pollo: ☐ euros
- Dinero que paga por la carne de ternera: ☐ · (☐) euros

i

Por último, relaciona estas dos cantidades con los 12,39 € que paga Luis en total.

☐ = 12,39

j

Antes de resolver la ecuación, nos vamos a detener para recuperar el significado de los elementos que aparecen en ella.

Relaciona cada expresión con su significado.

- Precio del kilo de pollo (€/kg): ☐
- Precio del kilo de ternera (€/kg): ☐
- Cantidad de pollo comprada (kg): ☐
- Cantidad de ternera comprada (kg): ☐
- Dinero que se paga por el pollo (€): ☐
- Dinero que se paga por la ternera (€): ☐
- Dinero que se paga en total (€): ☐

$1,5 - p$ | p | $7,9p$ | $7,9p + 8,5(1,5 - p)$ | $8,5(1,5 - p)$ | $7,9$ | $8,5$

$$7,9p + 8,5(1,5 - p) = 12,39$$

k

Llega el momento de resolver la ecuación.

¿Para qué valor de p es cierta la igualdad que hemos planteado?

Utiliza el editor de ecuaciones si necesitas ayuda.

$p =$ ☐

l

Entonces, ¿cuánta carne de pollo y cuánta de ternera compra Luis?

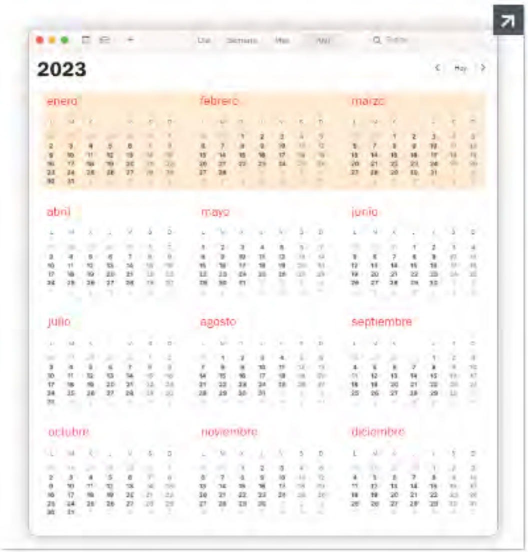
Luis compra ☐ kg de carne de pollo y ☐ kg de carne de ternera.

Editor de ecuaciones

Ficha 2

Un contrato de trabajo

Paula recibe una oferta de trabajo por la que se perciben 30 000 euros y un dispositivo móvil por un año de trabajo. Pero no se acaba de decidir porque no sabe si le interesa estar tanto tiempo en esta empresa.



a

¿Cuánto va a percibir Paula con esta oferta si trabaja solo durante 3 meses en la empresa?

Expresa verbalmente esta cantidad.

b

Trata de expresar con álgebra esta cantidad y explica el significado de las variables que utilizas.

Cantidad que percibe por tres meses: ☐

c

En efecto, la cantidad que percibe por tres meses se corresponde con $\frac{3}{12}$ de la cantidad anual, o lo que es lo mismo, una cuarta parte.

Ahora expresa con álgebra cuánto percibe Paula si trabaja durante 10 meses en la empresa.

Recuerda que la oferta es de 30 000 € y un dispositivo móvil por un año de trabajo.

Cantidad que percibe por diez meses: ☐

d

Paula acepta al fin la oferta de trabajo de 30 000 € y un dispositivo móvil al año. Pero, como temía, decide abandonar la empresa antes de terminar el año. Ha trabajado durante 7 meses y ha percibido un total de 17 300 € y el dispositivo móvil.

Considerando que el trato ha sido justo, ¿en cuántos euros está valorado el dispositivo móvil?

Propón una estrategia para averiguar el valor del dispositivo móvil o para obtener alguna información que pueda ser de ayuda.

e

Vamos a tratar de averiguar el valor del dispositivo móvil utilizando el álgebra.

Expresa qué fracción del sueldo anual cobra Paula por 7 meses de trabajo.

Considera que *m* es el valor del dispositivo móvil en euros.

f

Si el trato con Paula es justo, podemos considerar que esta fracción se corresponde con lo que percibe: 17 300 € y un dispositivo móvil.

Expresa con álgebra esta cantidad.

Considera que *m* es el valor del dispositivo móvil en euros.

g

Así pues, podemos construir una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece *m*, el valor en euros del dispositivo móvil.

Resuelve la ecuación y obtén el valor en euros del móvil.

Reflexionad antes acerca de cuál es la mejor manera de gestionar las fracciones.

El dispositivo móvil vale ___ euros.

Anexo 14

Ficha de sesión A: Método Tradicional.

<table>
<tr><th colspan="3">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: A</td><td>Introducción a él álgebra</td><td>Método Singapur</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Aspectos teóricos del lenguaje algebraico:
- Letras y números
- Coeficiente y parte literal
- Expresiones algebraicas
- Monomios y polinomios
2. Resolución de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Introducir aspectos clave del lenguaje algebraico y trabajarlos mediante ejercicios</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>Descripción</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Conceptos teóricos del álgebra</td><td rowspan="6">En esta primera actividad de la sesión se introducirán en el aula los conceptos clave del lenguaje algebraico. Todos esto será expuesto y explicado por el docente, mediante la utilización de la pizarra y utilizando como guía la estructura de la explicación de la ficha 1.</td><td>Pizarra
Ficha 1</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
<tr><td>Clase Magistral</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Recursos</td></tr>
</table>

Trabajando los conceptos	Para la realización de dicha actividad se les entrega a los alumnos la ficha 2, donde los alumnos encontrarán todo tipo de ejercicios en los que se puede aplicar lo explicado en la primera parte de la sesión. Dicha actividad se realizará de manera individual y el docente será una persona clave a la hora de ayudar e instruir al alumno.	Ficha 2 **Organización** Individual **Tiempo** 45 minutos
Corrección de ejercicios	En esta última actividad, se corregirán los ejercicios del Anexo 13 que los alumnos han realizado durante la clase. El docente será el encargado de guiar la corrección en la pizarra a toda la clase. La corrección se hará de una manera interactiva y los alumnos podrán participar activamente compartiendo sus respuestas y reflexiones.	**Recursos** Pizarra **Organización** Clase Magistral **Tiempo** 30 minutos

Ficha 1

Explicación teórica introducción

¿Qué es el lenguaje algebraico? Es un lenguaje con el que podemos expresar mensajes mediante símbolos, letras y números. Comúnmente las letras representan variables de valor desconocido, y la letra más utilizada es la x.

Propuesta de ejemplo que relacione el álgebra con temas anteriores: El área de un rectángulo de base b y altura h. A= b*h. El perímetro de un cuadrado a+a+a+a=4a

¿Qué es una expresión algebraica? Cuando el lenguaje algebraico mediante letras y números nos permite reflejar una situación le llamamos expresiones algebraicas. Ejemplos:

- El triple de un número 3x,
- La edad de María hace 3 años x-3
- La mitad de edad de una persona x/2
- El producto de dos números consecutivos x*(x+1)

¿Qué es la parte literal y que el coeficiente? La **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplos:

- En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x. En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parteliteral xy^2. $6a - 3b + c + 8$

- Los coeficientes son +6, –3, + 1y +8 respectivamente. Las partes literales son *a, b* y *c*. El último término no tiene parte literal.

¿Qué son los monomios y los polinomios?

Un **monomio** viene dado por el producto de números. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la variable, o variables; la indeterminada, en cuanto a la variable es la que conforma la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

El área del círculo, pr^2, es un monomio con indeterminada, *r* y coeficiente

p. Su parte literal es r^2

Cada monomio tiene un grado que se establece según los siguientes criterios

3. Cuando haya una única variable, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
4. Si aparecen varias variables, el grado del monomio será la suma de los exponentes deesas indeterminadas.

Ejemplo:

$3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.

$7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en *a* y *b*.

Un número su grado es 0

pr^2 es un monomio de grado 2 en la indeterminada *r*

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. Su grado viene dado por el mayor grado de entre todos sus monomios

Ejemplo:

$4 \times x^2 \times y^3 - 7 + 3 \times y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y

$x - 2 \times y + 6 \times z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z

Ficha 2

Ejercicios prácticos: Sesión A

1. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) 3 – 14xy b) 2a + 6b – 9c c) 6xy + 8 d) 2xy + 6 – 4y

e) 6e+4y f) 6x+8z+9y g) 4 h) 4x-3x

2. **Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:**

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

3. **Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:**

a) $x – 2y = 3x + 4$ b) $5x + 6y^2$ c) $8a + 9a^2$ d) $2x + 3x^2$

4. Indica el grado

a) $5x – 6$ b) $9x + y^2$ c) $x + 2x^2$ d) $4x + 5xy^2$

5. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:

a) Raquel tiene x cromos.
b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel.
c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe.
d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe

juntos.

e) Marta tiene la mitad de los cromos que

Anexo 15

Ficha de sesión B: Método Tradicional.

FICHA DE SESIÓN		
Sesión: B	**Ecuaciones de primer grado**	**Método Tradicional**
CONTENIDOS		
1. El lenguaje de las ecuaciones 2. Ecuaciones equivalentes 3. Valor numérico de una expresión algebraica 4. Resolución de ecuaciones lineales		
OBJETIVOS		
Trabajar los conceptos clave de las ecuaciones y su resolución		
ACTIVIDADES	**Descripción**	**Recursos**
Conceptos teóricos del álgebra	En esta primera actividad de la sesión se introducirán en el aula los conceptos teóricos de las ecuaciones. La clase se agrupará de manera magistral, y los conceptos serán expuestos y explicados por el docente, mediante la utilización de la pizarra y utilizando como guía la estructura de la explicación de la ficha 1.	Pizarra Ficha 1 **Organización** Clase Magistral **Tiempo** 45 minutos
	Para la realización de dicha actividad se les entrega a los	**Recursos**

Trabajando los conceptos	alumnos la ficha 2, donde se encuentran todo tipo de ejercicios en los que se puede aplicar lo explicado en la primera parte de la sesión. Como en la anterior sesión, los ejercicios se realizarán de manera individual y el docente será una persona clave a la hora de ayudar e instruir al alumno.	Ficha 2 **Organización** Individual **Tiempo** 45 minutos
Corrección de ejercicios	En esta última actividad, se corregirán los ejercicios de la ficha 2 de manera individual. Los alumnos entregarán cada ejercicio al profesor una vez lo haya terminado y la corrección se realizará al momento.	**Recursos** Ficha 2 **Organización** Clase magistral **Tiempo** 30 minutos

Ficha 1

Explicación teórica: Sesión B

¿Qué es una ecuación? Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

$6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita

$4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e

$x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 ($1 + 2 = 3$).

¿Cuál es la solución de una ecuación? Y ¿Su ecuación equivalente?

Resolver una ecuación es **encontrar el valor numérico que debe tener x** para que la igualdad sea cierta.

Es decir, una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica laigualdad.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias. **Resolver** una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Ejemplo:

En la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre secumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundomiembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Habitualmente se transforman las ecuaciones en ecuaciones equivalentes más sencillas, las cuales tienen la misma solución.

Ejemplo:

$3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuacioneses $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienenen cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene unaecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distintade cero), se obtiene una ecuación equivalente

¿Cómo hallara la solución numérica de una ecuación?

Para hallar la solución de la ecuación hay que ir simplificando la ecuación, hasta **dejar la x sola** en uno de los miembros, que es a lo que se le llama **despejar la x.**
Para ello, además de tener en cuenta la **jerarquía de operaciones,** se siguen estas reglas prácticas:

- Cuando un término está **SUMANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **RESTANDO**.
- Cuando un término está **RESTANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **SUMANDO**.
- Cuando un término está **MULTIPLICANDO** en un miembro, pasa al otro miembro **DIVIDIENDO** a todo el miembro.
- Cuando un término está **DIVIDIENDO** en un miembro, pasa al otro miembro **MULTIPLICANDO** a todo el miembro.

Ejemplo:

$$4 \times +2 = 14 - 2 \times$$

1. Reubicamos términos: Mediante la transposición de términos, tenemos que pasar los términos que llevan x al primer miembro y los números que no llevan x al segundo miembro. Los términos que ya están en el miembro que les corresponde no hay que tocarlos. En la ecuación original vemos que tenemos dos términos con x: el 4x, que ya está en el primer miembro y el -2x que está en el segundo miembro y hay que pasarlo al primer miembro. El 4x lo dejamos tal y como está y el 2x que está RESTANDO, pasa SUMANDO al primer miembro. Con los números hacemos lo mismo, el 14 que ya está en el segundo miembro y el +2, que está en el primer miembro y hay que pasarlo al segundo miembro:

$$4 \times +2 \times = 14 - 2$$

2. Simplificar: En este paso hay que agrupar los términos semejantes; es decir, operar por un lado con los términos con x y por otro lado con los términos sin x. Con los términos que

tienen una x, operamos con los términos de delante, ; es decir, sumamos 4 y 2. Lo mismo hacemos con el 14 y el 2 que se están restando:

$$6 \times = 12$$

3. Despejar la x: Tenemos la ecuación ya con los términos en su sitio y simplificados. Vamos ahora a despejar la x. Tenemos que dejar la x completamente sola y ahora mismo tiene un 6 delante que está multiplicando, por lo que pasa al otro miembro dividiendo:

$$\times = 12/6$$

Ficha 2

Ejercicios prácticos: Sesión B

1. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a. $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b. $2 - 3a$ para $a = -5$.
c. $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

2. Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente

3. Resuelve la ecuación 6 – x = 2x – 3, explícalo paso a paso

4. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x – 1$	2, –1, –3		$a^2 – 6 = –2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x – 3$	3, –2, –3		$b – 4 = 8 – b$	3, 4, 6

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x – 1 = 3x – 4$ b) $7x + 9 = 5x – 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x – 9 = 2x – 11$

6. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x – 6 = x + 10$.

a) $x – 10 = 5$ b) $16 – x = 3x – 5x$ c) $4x = 32$

d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

7. Escribe dos ecuaciones equivalentes a las siguientes:

a) $2x – 5 = 13$ b) $3x = 15$

c) $5x + 12 = 7$ d) $x = – 5$

Anexo 16

Ficha de sesión C: Método Tradicional.

<table>
<tr><th colspan="3">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: C</td><td>Problemas algebraicos</td><td>Método Tradicional</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Resolución de problemas con el álgebra</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Trabajar la resolución de problemas mediante el lenguaje algebraico</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>Descripción</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Ejemplificación de resolución de problemas</td><td rowspan="6">En esta primera parte de la sesión el docente de manera magistral resolverá varios problemas algebraicos. Mediante dicha explicación los alumnos adquirirán conocimiento acerca de cómo abordar un problema y qué pasos seguir para llegar a la solución. Los problemas y la instrucción del docente se encuentran en la ficha 1.</td><td>Pizarra

Ficha 1</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
<tr><td>Clase Magistral</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>45 minutos</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Los alumnos trabajarán la resolución de problemas algebraicos por medio de los ejercicios que les será</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td>Ficha 2</td></tr>
</table>

Trabajando los problemas algebraicos	entregados a través de la ficha 2.	**Organización** Individual **Tiempo** 45 minutos
Corrección de ejercicios	En esta última actividad, se corregirán los problemas del Ficha 2 La corrección se realizará de manera grupal y esta vez se dará vital importancia a la participación del alumno. Mediante preguntas clave realizadas por el docente el alumno deberá de razonar acerca de cómo y por qué ha resuelto los problemas de esa manera. Además, se pondrán en común las diferentes estrategias de resolución llevadas a cabo por los alumnos.	**Recursos** Ficha 2 **Organización** Clase magistral **Tiempo** 30 minutos

Ficha 1

Estrategia para la resolución de problemas

EJEMPLO 1: En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿Cuántas habitaciones son simples y cuantas son dobles?

Sigue los siguientes pasos para la resolución de problemas:

Paso 1: Antes de todo, lee el enunciado detenidamente e intenta entender bien el problema y la pregunta que plantean.

Paso 2: Copia la información más relevante y busca cuál es la incógnita o la variable de las que quieres hallar su solución y llámale x.

En este caso, llamamos x al número de habitaciones simples. Por lo tanto, de ahí hallamos otra expresión. Si hay un total de 34 habitaciones dobles y simples, las habitaciones dobles son 34-x.

El número de camas es de 54.

Paso 3: Escribe en forma de expresión algebraica, en este caso ecuación, la información sacada del enunciado:

$x + 2(34 - x) = 54$.

Paso 4: Si no necesitamos ninguna ecuación más. Resuelve la ecuación.

- Quita el paréntesis y multiplica x2
  $x + 68 – 2x = 54$.

- Primero ponemos los términos con x en un lado y los términos sin x en un lado. A los términos que se les cambie de lado se les aplica la operación inversa. Si es suma, resta y si es resta, suma.

  $x – 2x = 54 – 68$.

- *Opera*

  - $x = – 14/– 1 = 14$.

Paso 5: Comprueba el resultado y piensa si es razonable.

EJEMPLO 2: En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Leemos el enunciado detenidamente.

Paso 2: Llámale x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos 50-x.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total 2x+4(50-x) patas

Paso 2: Escribe la ecuación sabiendo que en total hay 120 patas: $2x + 4(50 – x) = 120$

Paso 3: resuelve la ecuación.

2x + 200 – 4x = 120

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos: 2x + 200 – 4x – 200 =120– 200

Operando obtenemos: –2x = –80

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación: –2x/–2 = –80/–2 luego x = 40

Ficha 2

Problemas algebraicos

1. **Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble deotro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.**

2. **Tienes un rectángulo de altura *x* cm y de base 2*x* + 3. Si a la base de este rectángulo le quitan 2cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?**

3. **Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado**

Anexo 17

Ficha de sesión D: Método Tradicional.

<table>
<tr><th colspan="3">FICHA DE SESIÓN</th></tr>
<tr><td>Sesión: D</td><td>Repaso y evaluación</td><td>Método Tradicional</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONTENIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. Repaso a los contenidos algebraicos dados
2. Prueba de evaluación</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Repasar los contenidos trabajados en la anterior sesión y realizar una prueba de evaluación</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES</td><td>Descripción</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Repaso de contenidos y dudas</td><td rowspan="5">En esta primera parte de la sesión el docente repasará los contenidos dados hasta ahora. Se les dará voz a los alumnos para que sean ellos mismos quienes quieran elegir qué actividades o qué dudas resolver.</td><td>Pizarra</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
<tr><td>Clase Magistral</td></tr>
<tr><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>1 hora</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Prueba final</td><td rowspan="3">Se evaluarán los conocimientos adquiridos del alumnado mediante los ejercicios del Anexo 18. La evaluación, se dividirá en dos Bloques. El primer bloque compuesto de ejercicios procedimentales y de teoría, con los cuales se evaluará la comprensión instrumental adquirida del alumno. Y el segundo</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td>Anexo 3</td></tr>
<tr><td>Organización</td></tr>
</table>

	bloque, compuesto de problemas algebraicos cotidianos donde se evaluará la compresión relacional. Los ejercicios evaluativos se encuentran en el Anexo 6.	Individual **Tiempo** 1 hora

Anexo 18

Situación de aprendizaje: unidad de geometría

Titulo: Geometría

Curso: 2ºESO

Área: Matemáticas

DESCRIPCIÓN

La presente situación de aprendizaje presenta la finalidad de trabajar la unidad de geometría abordándola mediante diversas actividades diseñadas en base a la metodología tradicional y el Método Singapur. Para ello, se trabajará la relación de cuerpos geométricos y las figuras planas, así como sus propiedades subyacentes. Se combinarán actividades manipulativas propias del método Singapur y actividades más teórico-practicas. Esto hace de esta situación de aprendizaje una oportunidad idónea para poner en práctica y valorar la utilidad de relacionar las dos metodologías.

C**OMPETECIAS ESPECIFICAS**

Competencias especificas	Área
Interpretar, modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana, propias de las matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar procedimientos y obtener soluciones.	Matemáticas
Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.	Matemáticas
Desarrollar destrezas sociales, como la cooperación, participando activamente en equipos de trabajo inclusivos reconociendo la diversidad y el valor de las aportaciones de los demás, para compartir y construir conocimiento de matemático de forma colectiva	Matemáticas

Conectar distintos elementos matemáticos relacionando conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	Matemáticas
Vincular y contextualizar las matemáticas con otras áreas de conocimiento, interrelacionando conceptos y procedimientos, para resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.	Matemáticas

TRATAMIENTO DE COMPETENCIAS TRANSVERSALES

Mediante dicha situación de aprendizaje, concretamente con la actividad 3, “Maqueta”, se trabaja de una manera general la competencia emprendedora debido a que los alumnos deben de tomar la iniciativa ante una idea o un proyecto. Se implican en su planificación, desarrollo y exposición de resultados. Todo ello, ejercitando el pensamiento crítico, analizando e interpretando las diferentes estrategias de actuación. En paralelo, se trabaja el pensamiento creativo que también está unido a esta competencia, de manera que se desarrollen nuevas ideas generando propuestas originales e innovadoras.

A su vez, se trabaja la competencia personal y social, fomentando el trabajo colaborativo y el trabajo en equipo en las siguientes actividades: “Tangram”, “Maqueta” y “Construyendo figuras geométricas”.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Objetivos del aprendizaje	Criterios de evaluación
1.Relacionar, identificar y razonar a cerca de las figuras geométricos de tres dimensiones y sus propiedades, así como las figuras planas que los forman.	- Realizar conexiones entre los distintos elementos matemáticos valorando su utilidad para razonar y fijar conocimientos en un contexto matemático Instrumento de evaluación: Observación de la Actividad 1 y corrección de la Actividad 4.
2. Aprender el teorema de Pitágoras	-Incorporar la utilización de la visualización y del razonamiento geométrico como forma de razonamiento para entender y gestionar la información referida en el espacio Instrumento de evaluación: Exposición de la Maqueta, Actividad 3.
4.Transferir conceptos geométricos a problemas de la vida real	- Emplea estrategias y formas de razonamiento diversas para resolver un problema y explicar su proceso. Instrumento de evaluación: Corrección de la Actividad 5. - Interpreta la información de un problema y de una situación de la vida cotidiana respondiendo a las preguntas planteadas Instrumento de evaluación: Corrección de la Actividad 4. - Incorpora la utilización de la visualización y del razonamiento geométrico como forma de razonamiento para entender y gestionar la información referida en el espacio Instrumento de evaluación: Corrección de la Actividad 4.

SABERES

	Saber	Área
1	Sentido espacial: Descripción y clasificación de formas geométricas planas y tridimensionales en función de sus propiedades o características	Matemáticas
2	Sentido espacial: Construcción de formas geométricas con distintas herramientas: materiales manipulables, instrumentos de dibujo, programas de geometría dinámica, realidad aumentada, etc.	Matemáticas
3	Sentido espacial: Reconocimiento de conexiones entre el sentido espacial con los demás sentidos (numérico, algebraico…) y con otras disciplinas (arte, ciencia, vida diaria).	Matemáticas
4	Sentido de la medida: Deducción, interpretación y aplicación de las principales estrategias para obtener longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales	Matemáticas
5	Sentido de la medida: Selección y uso de instrumentos (analógico o digital) y unidades adecuadas para medir de forma directa diferentes magnitudes del entorno.	Matemáticas
6	Sentido socioemocional: Asunción de responsabilidades y participación activa para optimizar el trabajo en equipo.	Matemáticas
7	Sentido socioemocional: Empleo de estrategias de gestión y toma de decisiones adecuadas para resolver situaciones propias del trabajo en equipo.	Matemáticas

Actividad	Metodología	Tipo de aprendizaje	Recursos	Organización
Tangram	Método Singapur	Aprendizaje basado en la manipulación	Fichas de Tangram	Grupos de 2
Propiedades de las figuras geométricas	Metodología Tradicional	Aprendizaje basado en la instrucción	Ficha 1	Clase magistral
Maqueta	Método Singapur/ Metodología Tradicional	Aprendizaje cooperativo basado en proyectos	https://www.youtube.com/watch?v=ve6UbBHUepM	Grupos de 5
Construcción de figuras geométricas	Método Singapur	Aprendizaje basado en la manipulación	Ficha 2,3,4,5	Grupos de 2
Trabajando las propiedades de las figuras y el teorema de Pitágoras mediante problemas cotidianos	Método Singapur	Aprendizaje basado en problemas	Ficha 6	Individual

DESARROLLO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN

Actividades	Descripción de actividades y de evaluación	Temporización
Actividades iniciales	**1. Tangram:** En esta primera actividad se utilizará el conocido/popular juego del Tangram con el objetivo de fomentar la creatividad y trabajar el desarrollo de la percepción espacial construyendo figuras geométricas a partir de otras. A cada grupo de 4 personas se les entregarán diversas piezas de Tangram y con ellas tendrán que construir figuras geométricas combinando las piezas para imitar la pieza exacta.	1h
Actividades de desarrollo	**2. Propiedades de las figuras geométricas:** Aprovechando las piezas de Tangram, se introducirá en el aula conceptos como el área, el perímetro, el volumen y el nombre de las figuras planas y tridimensionales de una manera teórica. Para ello, se ha utilizado la explicación del Anexo 21.	5h

Actividades de estructuración	**3. Maqueta:** Mediante esta actividad se trabajará con los alumnos el teorema de Pitágoras. Para ello, con el objetivo de que los alumnos construyan su propio aprendizaje y que su aprendizaje sea lo más significativo posible, se les propone realizar en grupos de 5 personas una maqueta que demuestre el teorema de Pitágoras. Al comienzo de la sesión, se les muestra algunas maquetas realizadas por alumnos de otros centros, en el que también se explica el teorema mediante conceptos matemáticos. La intención es que los alumnos comiencen a fabricar la maqueta en dicha sesión y que la terminen en casa. Para su evaluación los alumnos deberán de exponer delante de toda la clase la maqueta que han fabricado y probar el teorema mediante un ejemplo. **4. Construcción de figuras geométricas:** Los alumnos construirán figuras geométricas tridimensionales mediante las fichas del Anexo 23. Se repartirá una copia de cada ficha a cada alumno y se les dará tiempo para que puedan construir las figuras. Una vez construidas las figuras, tendrán que analizar cuáles son sus propiedades rellenando una ficha que será recogida para posteriormente evaluarla. Tendrán que expresar las siguientes propiedades: nombre de figura tridimensional y de lados planos, cálculo de área, longitudes y volumen y tipo de ángulos.	
Actividades de aplicación	**5. Trabajando las propiedades de las figuras y el teorema de Pitágoras mediante problemas cotidianos:** Los alumnos transferirán los conocimientos trabajados en las sesiones anteriores para resolver problemas de la vida real.	2h

ABORDAJE DE VECTORES

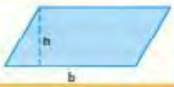
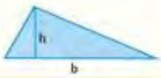
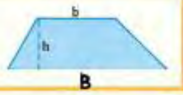
Esta situación de aprendizaje se fundamenta en el aprendizaje basado en competencias ya que se orienta hacia un aprendizaje profundo y funcional, en el que los alumnos mediante la realización de un proyecto construyen su propio aprendizaje. Además de ello, se trabajará la transferencia de los contenidos geométricos aprendidos a la resolución de problemas de la vida real. Gracias a ello, se contextualizarán los contenidos geométricos de una manera en la que los alumnos puedan percibir su funcionalidad o el porqué de su uso.
Además de ello, se tendrá en cuenta la perspectiva de género de manera que en los trabajos grupales se tendrá en cuenta la equidad de género, así como que se observará si los roles de trabajo están correctamente establecidos.

MEDIDAS Y AYUDAS UNIVERSALES

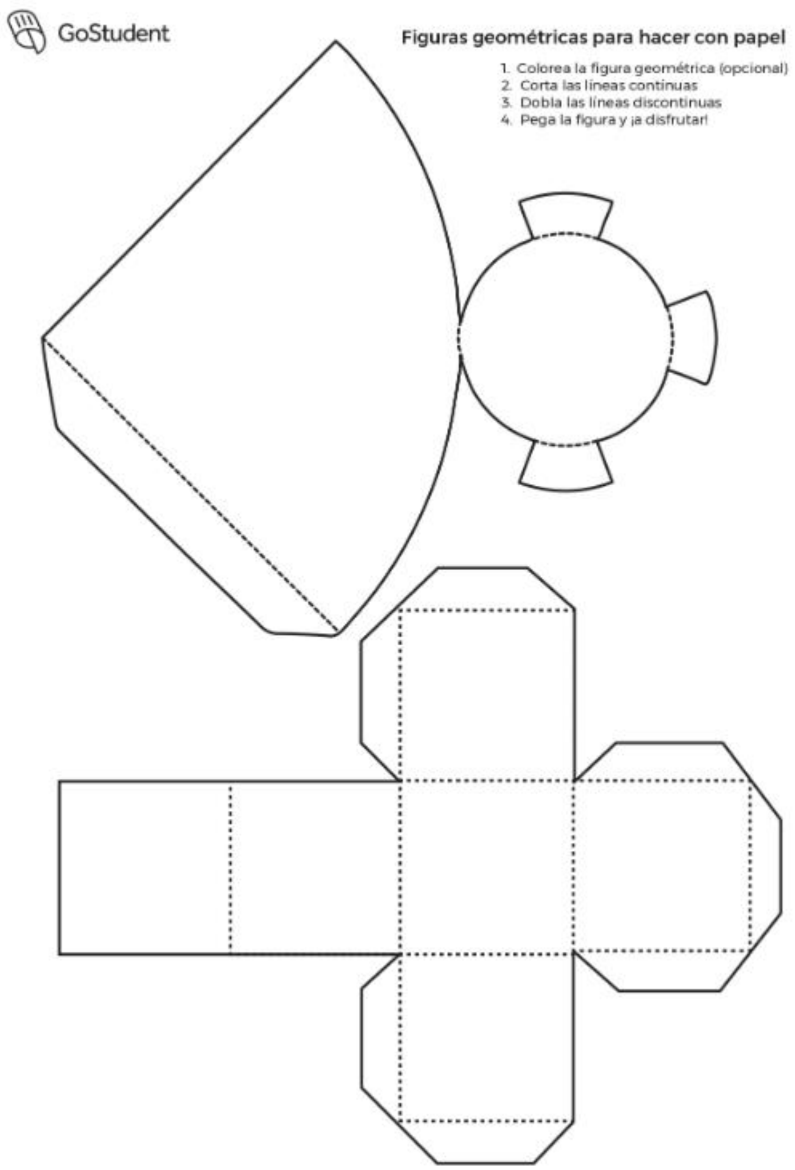
Los alumnos con necesidades educativas especiales tendrán un plan individualizado que es establecido por el centro al principio de curso. No obstante, a través del trabajo cooperativo, se potenciará la plena participación y, también el progreso de los estudiantes con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NESE por sus siglas en catalán) en las actividades diseñadas.

Ficha 1

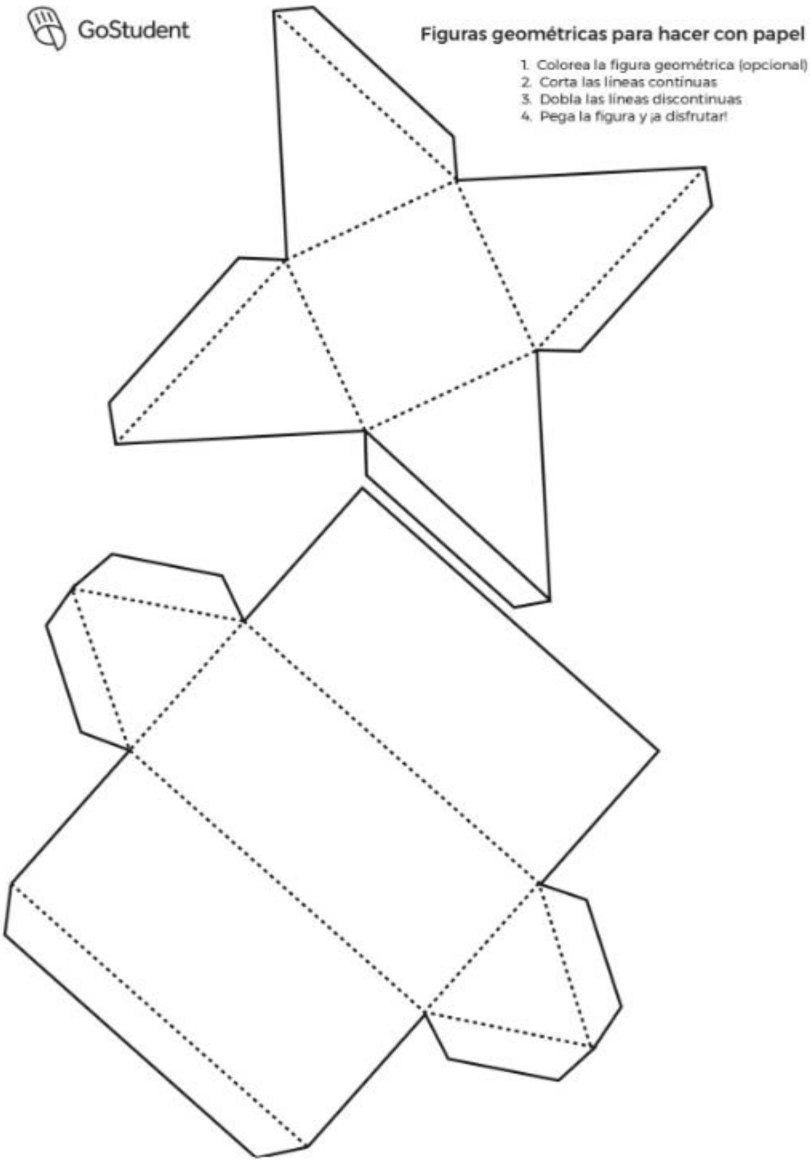
ALGUNAS FÓRMULAS IMPORTANTES DE LA GEOMETRÍA PLANA

Figuras		*Fórmulas*	
RECTÁNGULO		Área = $b \times h$	b → base h → altura
CUADRADO		Área = $L \cdot L = L^2$	L → lado
ROMBOIDE		Área = $b \times h$	b → base h → altura
TRIÁNGULO		Área = $\frac{b \cdot h}{2}$	b → base h → altura
ROMBO		Área = $\frac{D \cdot d}{2}$	D → diagonal mayor d → diagonal menor
TRAPECIO		Área = $\frac{B+b}{2} \bullet h$	B → base mayor b → base menor h → altura
POLÍGONO REGULAR		Área = $\frac{P \cdot ap}{2}$	P → perímetro ap → apotema
CÍRCULO		Área = $\pi \cdot r^2$	r → radio
SECTOR CIRCULAR		Área = $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot n°}{360°}$	r → radio n° → número de grados
LONGITUD CIRCUNFERENCIA		$L = 2 \cdot \pi \cdot r$	L → longitud de la circunferencia r → radio

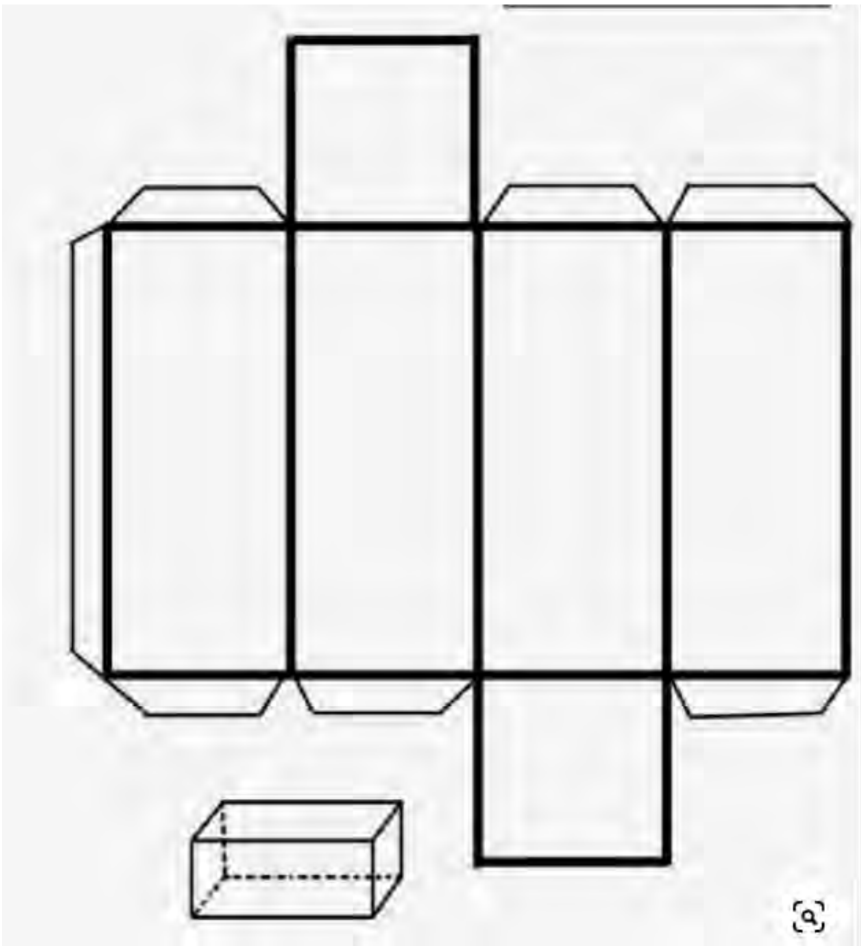
Ficha 2


GoStudent
Figuras geométricas para hacer con papel
1. Colorea la figura geométrica (opcional)
2. Corta las líneas continuas
3. Dobla las líneas discontinuas
4. Pega la figura y ¡a disfrutar!

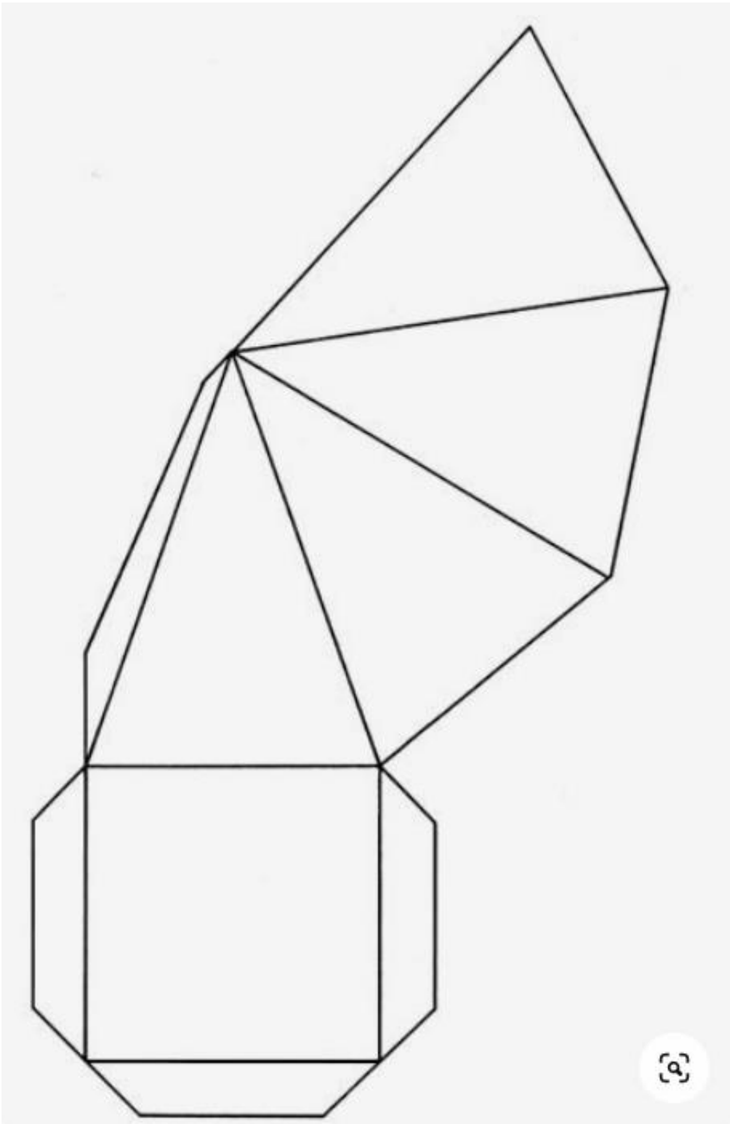
Ficha 3


GoStudent
Figuras geométricas para hacer con papel
1. Colorea la figura geométrica (opcional)
2. Corta las líneas continuas
3. Dobla las líneas discontinuas
4. Pega la figura y ¡a disfrutar!

Ficha 4



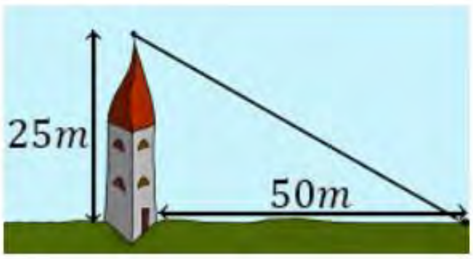
Ficha 5



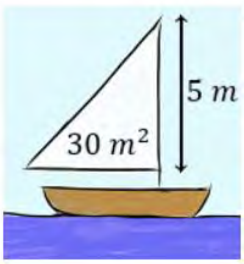
Ficha 6

Ejercicios tomados de:
https://www.problemasyecuaciones.com/Pitagoras/problemas-resueltos-teorema-pitagoras-tringulo-rectangulo-secundaria.html

1. **Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre ¿Cuánto debe medir el cable?**



2. **Hallar las medidas de los lados de una vela con forma de triangulo rectángulo si se quiere que tenga un área de 30 metros al cuadrado y que uno de sus catetos mida 5 metros para que se pueda colocar en el mástil.**



3. **Una piscina tiene 8m de largo, 6m de ancho y 1.5m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 € el metro cuadrado. ¿Cuánto costará pintarla? ¿Cuánto litros de agua serán necesarios para llenarla?**

4. Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 25.66 cm. Calcula el área total y el volumen: